

# Ασκήσεις στην Βισκοελαστική Μοντελοποίηση

Γ. Παπανικολάου

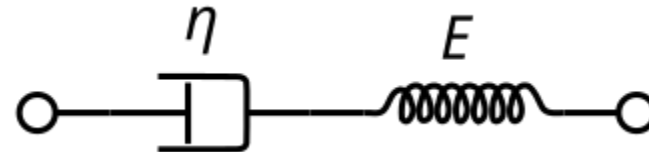
# Άσκηση 1

**Άσκηση 1:** Να εξαχθεί η καταστατική εξίσωση ενός μοντέλου Maxwell

**Λύση:**

Η καταστατική εξίσωση του **μοντέλου Maxwell** προκύπτει από τον συνδυασμό των ιδιοτήτων ενός ιδανικού ελαστικού ελατηρίου και ενός ιδανικού ιξώδους αποσβεστήρα, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι **σε σειρά**.

Η διαδικασία παραγωγής βασίζεται στα εξής βήματα:



## 1. Κατανομή Τάσης και Παραμόρφωσης:

- Επειδή τα στοιχεία είναι σε σειρά, η **συνολική τάση** ( $\sigma$ ) είναι ίδια και στα δύο στοιχεία:

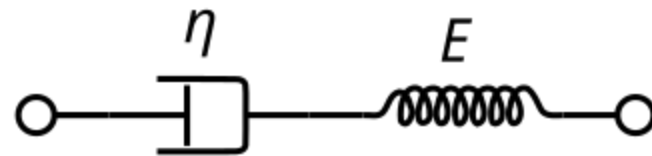
$$\sigma = \sigma_{spring} = \sigma_{dashpot}.$$

- Η **συνολική παραμόρφωση** ( $\epsilon$ ) είναι το άθροισμα των επιμέρους παραμορφώσεων:

$$\epsilon = \epsilon_{spring} + \epsilon_{dashpot}.$$

## 2. Νόμοι Συμπεριφοράς:

- Για το ελατήριο (Νόμος του Hooke):  $\sigma = E \cdot \epsilon_{spring} \Rightarrow \epsilon_{spring} = \frac{\sigma}{E}$ .



- Για τον αποσβεστήρα (Νεύτωνειο ρευστό):  $\sigma = \eta \cdot \frac{d\epsilon_{dashpot}}{dt} \Rightarrow \frac{d\epsilon_{dashpot}}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$ .

## 3. Συνδυασμός και Παραγωγή:

Παραγωγίζοντας τη σχέση της συνολικής παραμόρφωσης ως προς τον χρόνο:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_{spring}}{dt} + \frac{d\epsilon_{dashpot}}{dt}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει η **τελική διαφορική εξίσωση**:

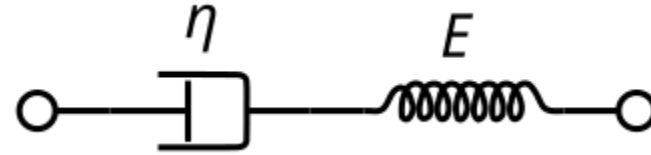
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει πώς η ταχύτητα παραμόρφωσης ενός υλικού εξαρτάται τόσο από τον ρυθμό μεταβολής της τάσης (ελαστικότητα) όσο και από το μέγεθος της τάσης (ιξώδες).

# Άσκηση 2

**Άσκηση 2:** Τι προβλέπει το μοντέλο Maxwell για τον ερπυσμό?

Λύση: 
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$



## 1. Ερπυσμός (Creep)

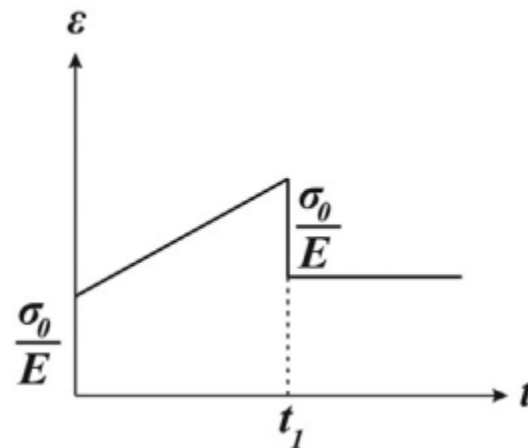
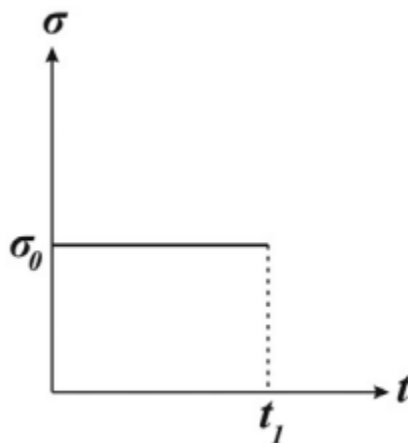
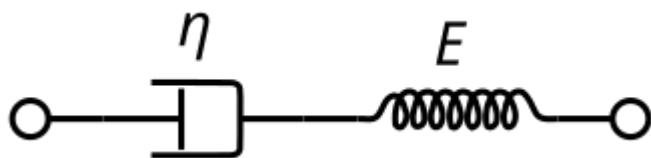
Στον ερπυσμό, επιβάλλεται μια **σταθερή τάση**  $\sigma_0$  στο υλικό τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

- **Συνθήκη:**  $\sigma(t) = \sigma_0$  (σταθερή), άρα  $\frac{d\sigma}{dt} = 0$  για  $t > 0$ .
- **Εφαρμογή:** Η εξίσωση απλοποιείται σε  $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta}$ .
- **Λύση:** Ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο, η παραμόρφωση  $\epsilon(t)$  είναι:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$

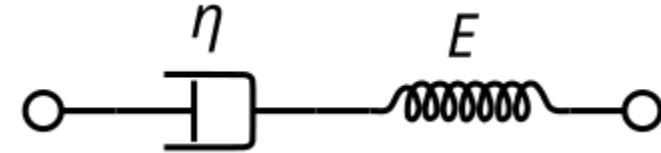
# Άσκηση 2 (συνέχεια)

- **Συμπεριφορά:** Το υλικό παρουσιάζει μια αρχική ακαριαία ελαστική παραμόρφωση ( $\frac{\sigma_0}{E}$ ) και στη συνέχεια η παραμόρφωση αυξάνεται **γραμμικά** με τον χρόνο λόγω του ιξώδους (dashpot).



# Άσκηση 3

**Άσκηση 3:** Τι προβλέπει το μοντέλο Maxwell για την χαλάρωση?



**Λύση:**

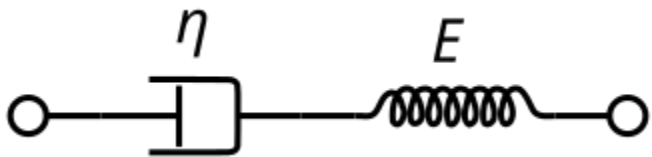
## Χαλάρωση Τάσης (Stress Relaxation)

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Στη χαλάρωση, επιβάλλεται μια **σταθερή παραμόρφωση**  $\epsilon_0$  και παρακολουθούμε πώς μεταβάλλεται η τάση.

- **Συνθήκη:**  $\epsilon(t) = \epsilon_0$  (σταθερή), άρα  $\frac{d\epsilon}{dt} = 0$  για  $t > 0$ .
- **Εφαρμογή:** Η εξίσωση γίνεται  $0 = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \implies \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma$ .
- **Λύση:** Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μια **εκθετική μείωση**:  
$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
  
όπου  $\tau = \frac{\eta}{E}$  είναι ο **χρόνος χαλάρωσης** (relaxation time).

# Άσκηση 3 (συνέχεια)



- **Συμπεριφορά:** Η τάση μειώνεται σταδιακά και τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος αυξάνεται, καθώς η ελαστική ενέργεια του ελατηρίου "εκτονώνεται" μέσω της κίνησης του αποσβεστήρα.

| Φαινόμενο | Σταθερό Μέγεθος              | Εξίσωση Αποτέλεσμα            | Συμπεριφορά               |
|-----------|------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| Ερπυσμός  | Τάση ( $\sigma_0$ )          | Γραμμική αύξηση $\epsilon(t)$ | Το υλικό ρέει επ' άπειρον |
| Χαλάρωση  | Παραμόρφωση ( $\epsilon_0$ ) | Εκθετική πτώση $\sigma(t)$    | Η τάση μηδενίζεται        |

# Άσκηση 4

**Άσκηση 4.** Τι προβλέπει το μοντέλο Maxwell στην περίπτωση σταθερής ταχύτητας παραμόρφωσης?

**Λύση:**

## 1. Σταθερή ταχύτητα παραμόρφωσης ( $\dot{\epsilon} = R$ )

Όταν το υλικό παραμορφώνεται με σταθερό ρυθμό  $R$  (π.χ. σε μια δοκιμή εφελκυσμού), η εξίσωση γίνεται:

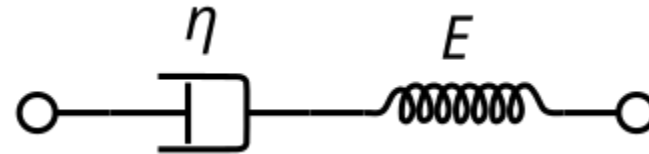
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

- **Συνθήκη:**  $\frac{d\epsilon}{dt} = R$ .

- **Εφαρμογή:**  $R = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$ .

- **Λύση:** Πρόκειται για μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η λύση της για αρχική συνθήκη  $\sigma(0) = 0$  είναι:

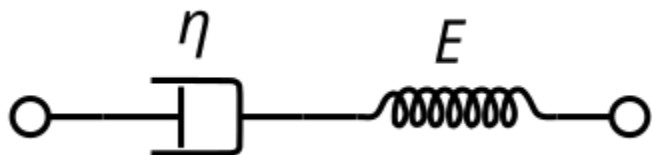
$$\sigma(t) = \eta R \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right)$$





# Άσκηση 4 (συνέχεια)

- **Συμπεριφορά:** Η τάση αυξάνεται αρχικά και τείνει σε μια **οριακή τιμή**  $\sigma_{max} = \eta R$ . Το υλικό "μαλακώνει" καθώς η ροή του αποσβεστήρα αντισταθμίζει την ελαστική αντίσταση.



# Άσκηση 5

**Άσκηση 4.** Τι προβλέπει το μοντέλο Maxwell στην περίπτωση σταθερής ταχύτητας τάσης?

**Λύση:**

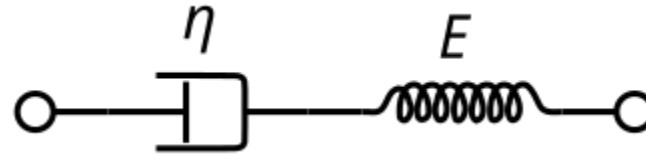
**Σταθερή ταχύτητα τάσης ( $\dot{\sigma} = \alpha$ )**

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Όταν η τάση επιβάλλεται με σταθερό ρυθμό  $\alpha$  (loading rate), η εξίσωση αναδιατάσσεται για την παραμόρφωση:

- **Συνθήκη:**  $\frac{d\sigma}{dt} = \alpha \implies \sigma(t) = \alpha t$  (για  $\sigma(0) = 0$ ).

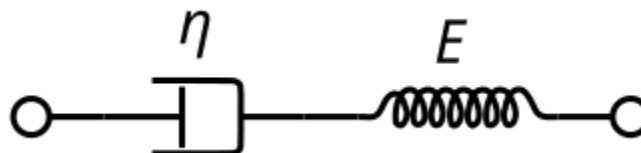
- **Εφαρμογή:**  $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\alpha}{E} + \frac{\alpha t}{\eta}$ .



- **Λύση:** Ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο  $t$ :

$$\epsilon(t) = \frac{\alpha t}{E} + \frac{\alpha t^2}{2\eta}$$

# Άσκηση 5 (συνέχεια)



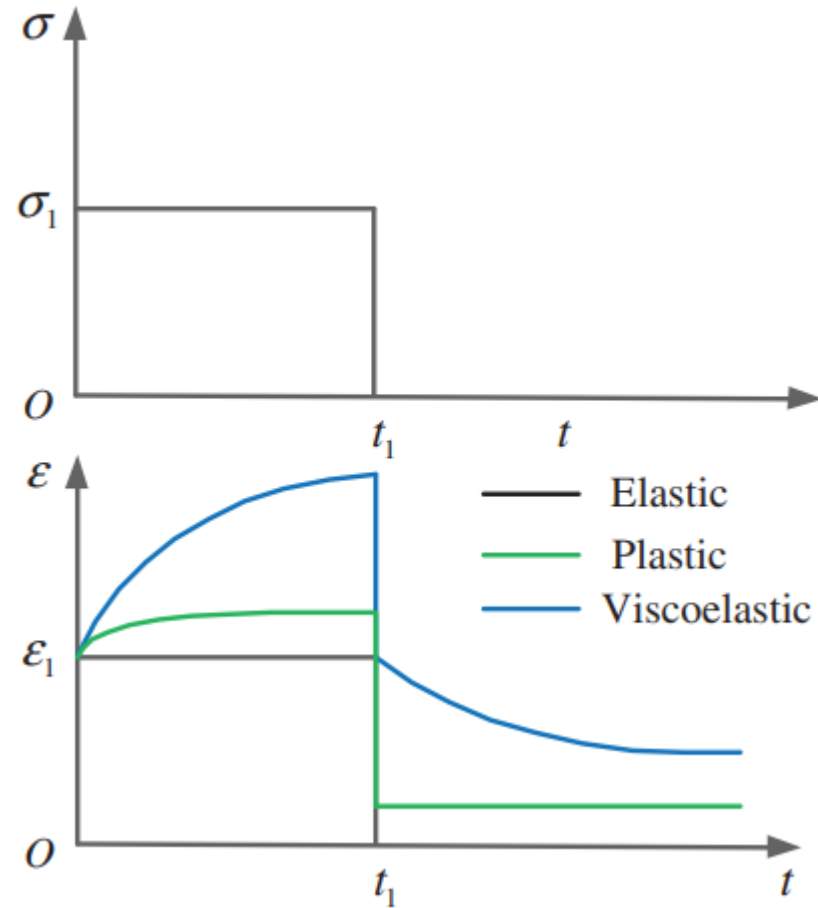
- **Συμπεριφορά:** Η παραμόρφωση αυξάνεται **παραβολικά** με τον χρόνο. Η πρώτη συνιστώσα αντιπροσωπεύει την ελαστική απόκριση και η δεύτερη την ιξώδη ροή που επιταχύνεται όσο αυξάνεται η τάση.

| Παράμετρος        | Σταθερή Ταχύτητα Παραμόρφωσης ( $R$ ) | Σταθερή Ταχύτητα Τάσης ( $\alpha$ )                           |
|-------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Μεταβλητή         | $\sigma(t) = \eta R(1 - e^{-t/\tau})$ | $\epsilon(t) = \frac{\alpha t}{E} + \frac{\alpha t^2}{2\eta}$ |
| Είδος Απόκρισης   | Εκθετική προσέγγιση σε κορεσμό        | Παραβολική αύξηση                                             |
| Κυρίαρχο Στοιχείο | Ιξώδες ( $\eta$ ) σε μεγάλους χρόνους | Συνδυασμός $E$ και $\eta$                                     |

# Άσκηση 6

**Άσκηση 6.** Ένα σώμα διεγείρεται με την ανάπτυξη σταθερής τάσης  $\sigma = \sigma_0$ . Αν την χρονική στιγμή  $t = t_1$  αφαιρέσουμε την διέγερση, να δείξετε γραφικά, την καμπύλη της διέγερσης συναρτήσει του χρόνου καθώς και της απόκρισής του, αν υποθέσουμε ότι αυτό συμπεριφέρεται α) Ελαστικά, β) Πλαστικά, και γ) Βισκοελαστικά.

**Απάντηση:**

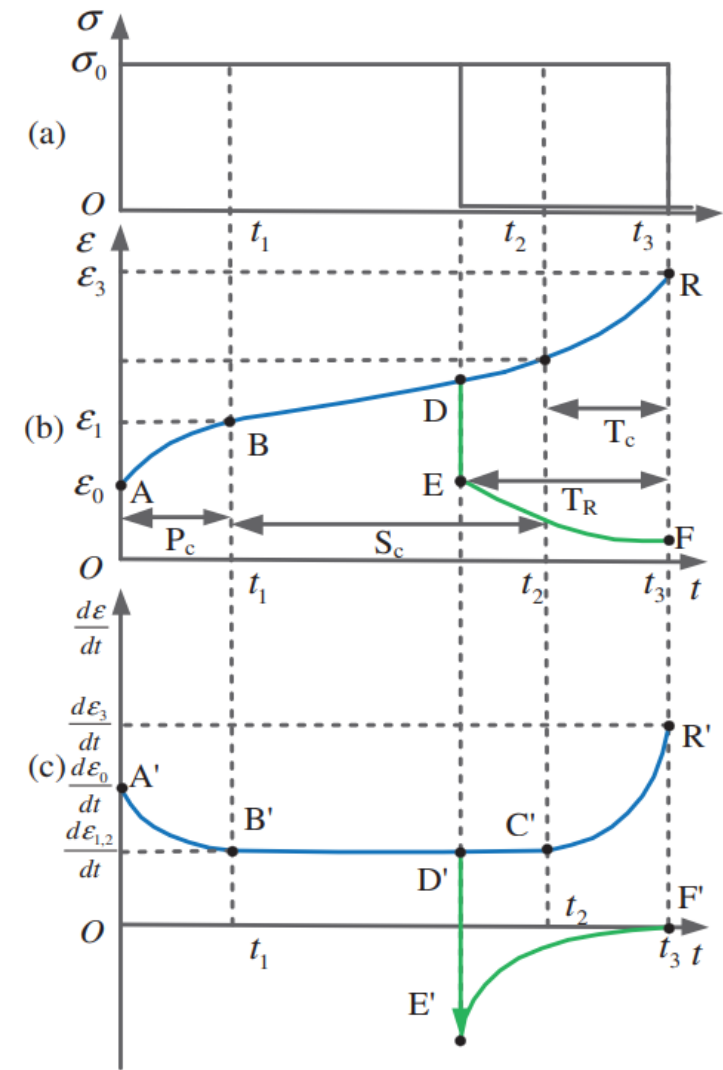


# Άσκηση 7

**Άσκηση 7.** Σε ένα πείραμα ερπυσμού και επανάταξης μετά από τον ερπυσμό, ενός πολυμερούς, να σχεδιαστούν τα διαγράμματα α) Διέγερσης  $\sigma=f(t)$ , β) απόκρισης  $\varepsilon = f(t)$  και γ) ταχύτητας παραμόρφωσης  $d\varepsilon/dt = f(t)$ .

**Λύση:**

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα τρία διαγράμματα. Με μπλε χρώμα φαίνεται η απόκριση σε ερπυσμό αν δεν είχαμε επανάταξη και με πράσινο χρώμα φαίνεται η απόκριση κατά την επανάταξη. Η επανάταξη συμβαίνει στο σημείο D της καμπύλης  $\varepsilon=f(t)$ .

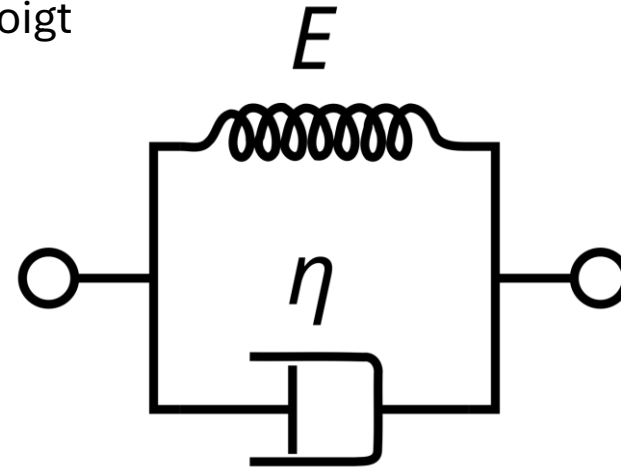


# Άσκηση 8

**Άσκηση 8:** Να εξαχθεί η καταστατική εξίσωση ενός μοντέλου Voigt

**Λύση:**

Το μοντέλο Voigt (ή Kelvin–Voigt) είναι ένα απλό ρεολογικό μοντέλο γραμμικής ιξωδοελαστικότητας και αποτελείται από: ένα ελατήριο (μέτρο ελαστικότητας  $E$ ) και έναν αποσβεστήρα (dashpot) με ιξώδες  $\eta$ , συνδεδεμένα παράλληλα.



# Άσκηση 8 (συνέχεια)

Κινηματικές και δυναμικές συνθήκες

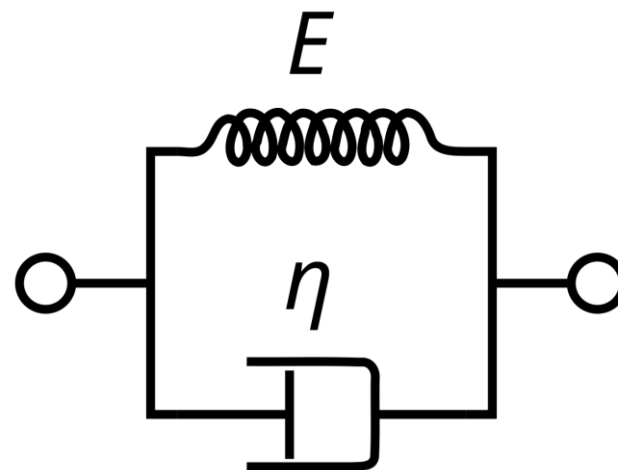
Λόγω της παράλληλης σύνδεσης ισχύει:

1. Ίδια παραμόρφωση στα δύο στοιχεία

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d$$

2. Συνολική τάση ίση με το άθροισμα των τάσεων

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d$$



# Άσκηση 8 (συνέχεια)

Καταστατικές σχέσεις επιμέρους στοιχείων

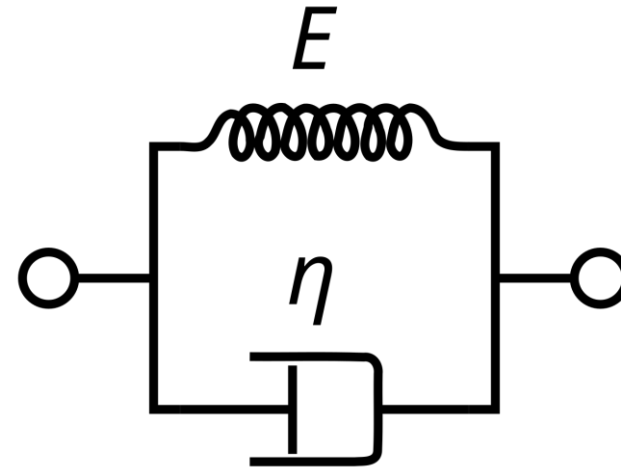
• Για το ελατήριο (Hooke):

$$\sigma_s = E \varepsilon$$

• Για τον αποσβεστήρα (Newton):

$$\sigma_d = \eta \dot{\varepsilon}$$

όπου  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$





# Άσκηση 8 (συνέχεια)

Καταστατική εξίσωση μοντέλου Voigt

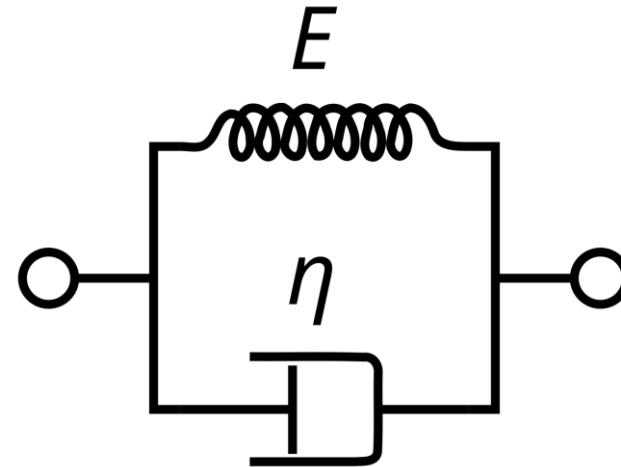
Αντικαθιστώντας:

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

Τελική μορφή

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

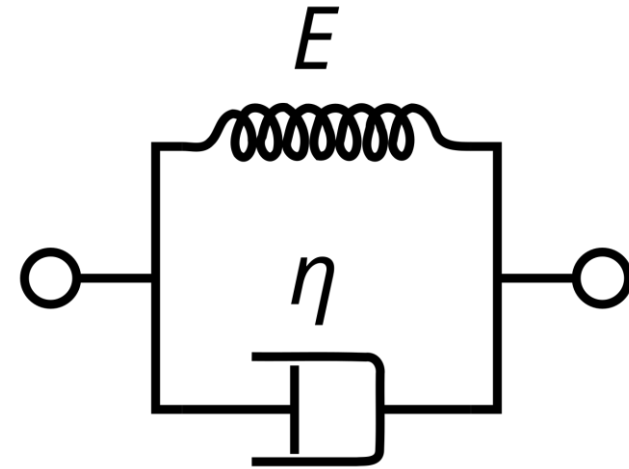
Αυτή είναι η **καταστατική εξίσωση του μοντέλου Voigt**.



# Άσκηση 8 (συνέχεια)

## Παρατηρήσεις

- Το μοντέλο περιγράφει καλά **ερπυσμό** (creep).
- Δεν περιγράφει σωστά **χαλάρωση τάσης** (stress relaxation).
- Χρησιμοποιείται συχνά για πολυμερή, βιοϋλικά και εδάφη.



# Άσκηση 9

**Άσκηση 9.** Τι προβλέπει το μοντέλο Voigt στην περίπτωση του ερπυσμού?

**Λύση:**

Θεωρούμε **μοντέλο Voigt (Kelvin–Voigt)** με καταστατική εξίσωση:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

**Φόρτιση βήματος (step stress)**

Επιβάλλεται σταθερή τάση:

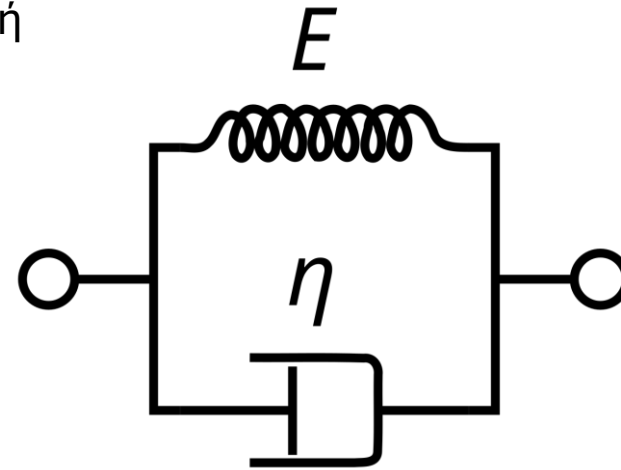
$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$$

όπου  $H(t)$  η συνάρτηση Heaviside και αρχική συνθήκη:

$$\varepsilon(0) = 0$$

Για  $t > 0$ , η εξίσωση γίνεται:

$$\eta \dot{\varepsilon}(t) + E \varepsilon(t) = \sigma_0$$



# Άσκηση 9 (συνέχεια)

## Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Η γενική λύση είναι:

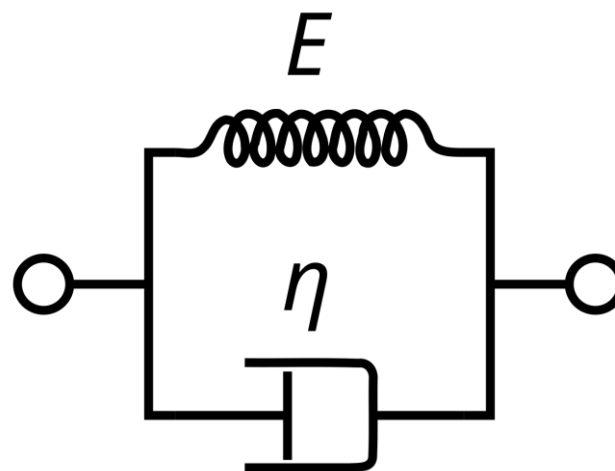
$$\varepsilon(t) = C e^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{\sigma_0}{E}$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη  $\varepsilon(0) = 0$  :

$$0 = C + \frac{\sigma_0}{E} \Rightarrow C = -\frac{\sigma_0}{E}$$

## Τελική λύση (ερπυσμός)

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right)}$$



# Άσκηση 9 (συνέχεια)

Χαρακτηριστικός χρόνος

Ορίζεται:

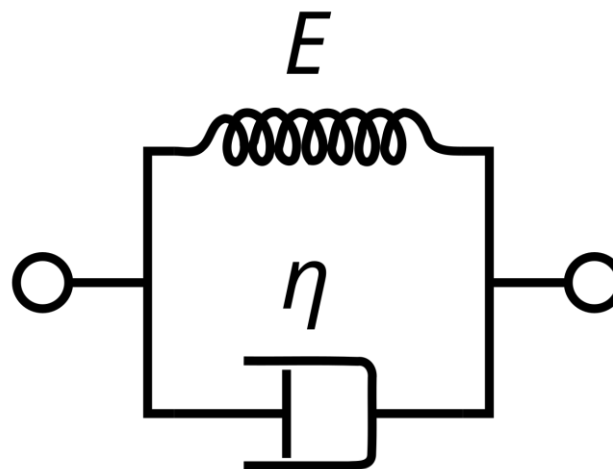
$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

οπότε:

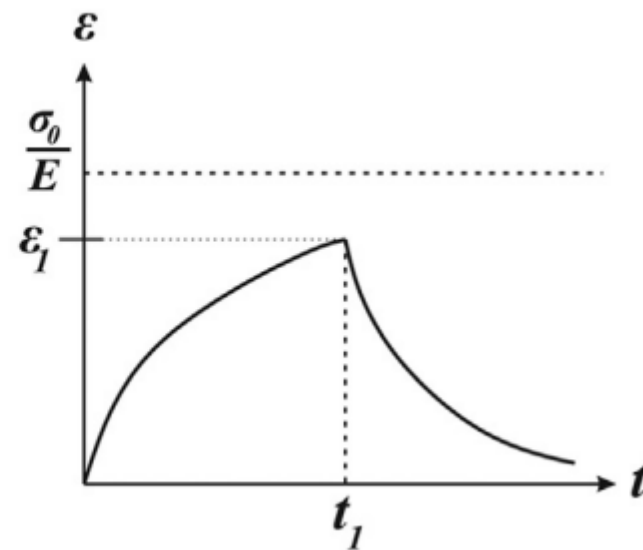
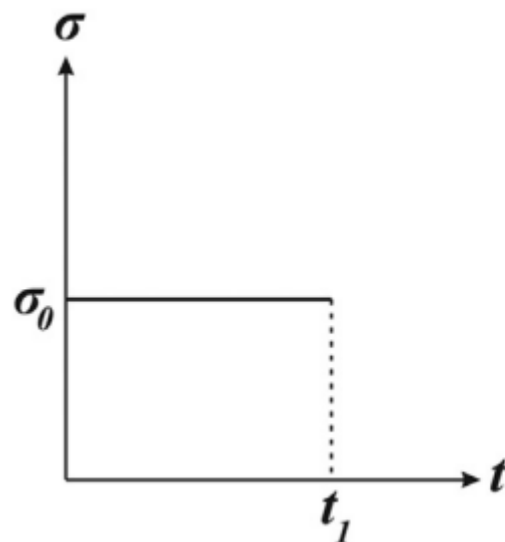
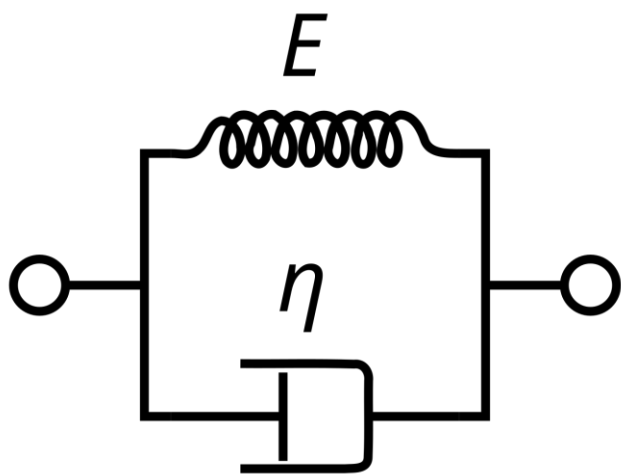
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

**Φυσική ερμηνεία**

- $\varepsilon(0) = 0 \rightarrow$  καμία στιγμιαία παραμόρφωση
- $\varepsilon(\infty) = \sigma_0/E \rightarrow$  ασυμπτωτική ελαστική παραμόρφωση
- Το υλικό παρουσιάζει **ερπυσμό**, αλλά **όχι μόνιμη ροή**



## Άσκηση 9 (συνέχεια)



# Άσκηση 10

**Άσκηση 10.** Τι προβλέπει το μοντέλο voigt για την χαλάρωση τάσης?

**Λύση:**

Θεωρούμε το **μοντέλο Voigt (Kelvin–Voigt)** με καταστατική εξίσωση:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

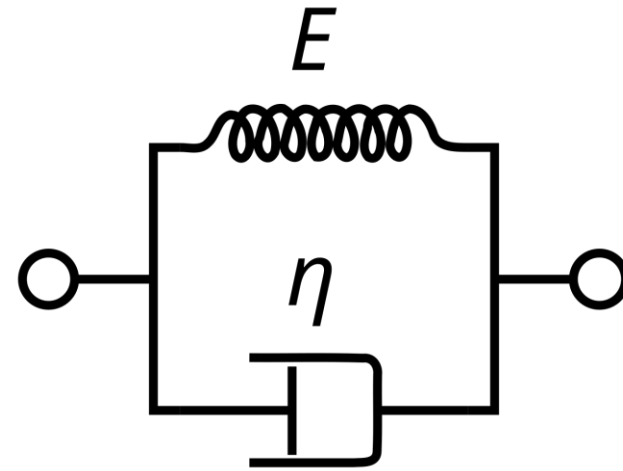
**Πρόβλημα χαλάρωσης τάσης (stress relaxation)**

Επιβάλλεται **βηματική παραμόρφωση**:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$$

δηλαδή:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varepsilon_0, & t \geq 0 \end{cases}$$



# Άσκηση 10 (συνέχεια)

Υπολογισμός της τάσης

Για  $t > 0$ :

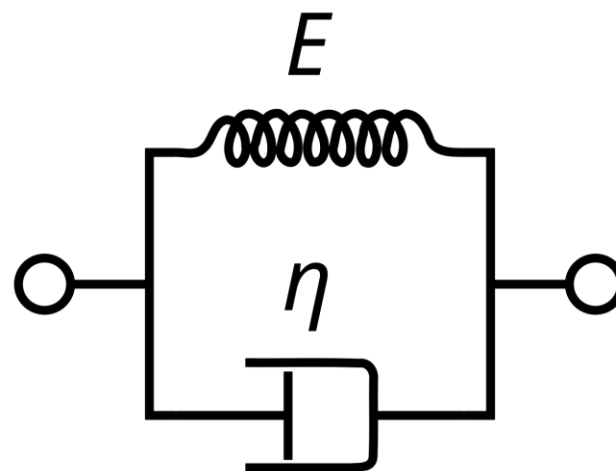
$$\dot{\varepsilon}(t) = 0$$

Άρα από την καταστατική εξίσωση:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0$$

δηλαδή:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 = \sigma_{\text{σταθερή}}$$





# Άσκηση 10 (συνέχεια)

Τι συμβαίνει στο  $t = 0$ ;

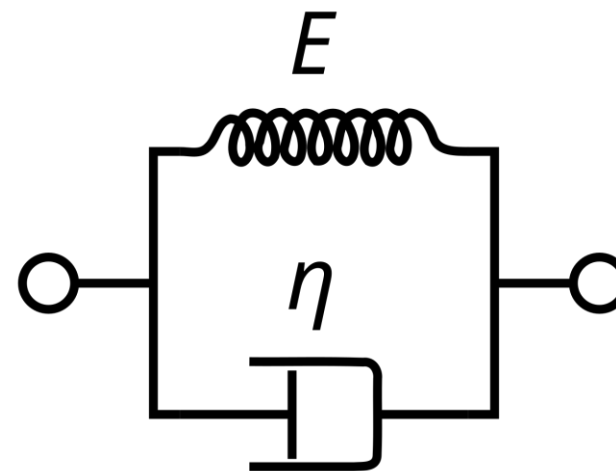
Η παράγωγος της παραμόρφωσης είναι:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$$

οπότε:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 + \eta \varepsilon_0 \delta(t)$$

→ εμφανίζεται **άπειρη τάση (κρουστική)** στο  $t = 0$ .



# Άσκηση 10 (συνέχεια)

**Συμπέρασμα – Γιατί αποτυγχάνει το Voigt**

**1. Καμία χαλάρωση τάσης**

Η τάση **δεν** μειώνεται με τον χρόνο:

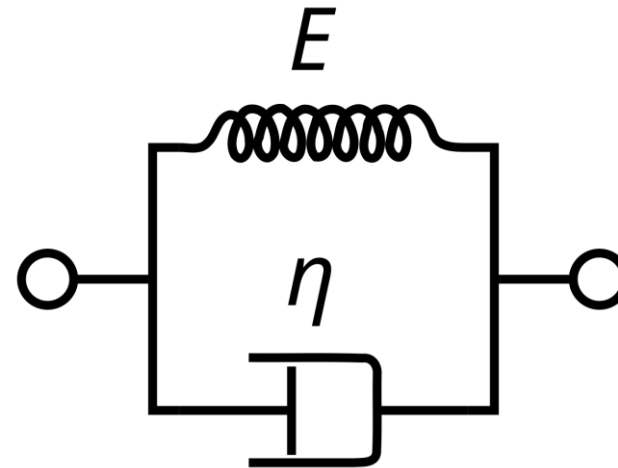
$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left( \text{σταθερή} \right)$$

**2. Μη φυσική συμπεριφορά στο  $t = 0$**

Απαιτείται:

$$\sigma(0) = \infty$$

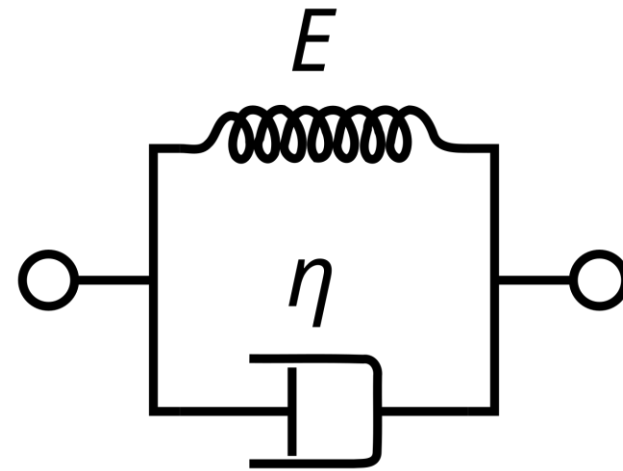
για να επιβληθεί στιγμιαία παραμόρφωση, κάτι **μη ρεαλιστικό**.



# Άσκηση 10 (συνέχεια)

## Φυσική ερμηνεία

- Στο Voigt, το **ιξώδες στοιχείο είναι παράλληλο** → εμποδίζει στιγμιαία παραμόρφωση
- Για να συμβεί βήμα παραμόρφωσης, ο αποσβεστήρας απαιτεί άπειρη τάση
- Άρα το μοντέλο:
  - ✓ περιγράφει ερπυσμό
  - ✗ δεν περιγράφει χαλάρωση τάσης



# Άσκηση 10 (συνέχεια)

## Σύγκριση (ενδεικτικά)

Μοντέλο

Voigt

Maxwell

Standard Linear Solid

Χαλάρωση τάσης

✗ όχι

✓ εκθετική

✓ ρεαλιστική

