

A black, delta-shaped aircraft is shown in flight, viewed from below. It is positioned in the upper left quadrant of the frame. Two bright, white contrails trail behind it, extending towards the left edge of the image. The aircraft is flying over a vast, undulating sea of white clouds that fills the lower two-thirds of the image. The sky above the clouds is a gradient of colors, transitioning from a deep blue at the top to a warm orange and yellow near the horizon, suggesting a sunset or sunrise. The overall composition is clean and modern, with a focus on the aircraft and the atmospheric perspective.

Ασκήσεις Συνθέτων Υλικών

Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

Άσκηση 1.

Σε ένα μακρόνιο GFRP σύνθετο υλικό, με $V_f = 30\%$, $E_f = 70\text{GPa}$, $E_m = 3.5\text{ GPa}$, εφαρμόζουμε κατά την διεύθυνση των ινών, φορτίο P_c . Αν είναι γνωστό το P_c , να βρεθεί το ποσοστό του φορτίου που αναπτύσσεται στις ίνες.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{\frac{E_f}{E_m}}{\frac{E_f}{E_m} + \frac{V_m}{V_f}}$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση:

$$V_f = 0.30, V_m = 1 - V_f = 0.70, E_f = 70\text{GPa}, E_m = 3.5\text{GPa} \quad \text{και βρίσκουμε:} \quad \frac{P_f}{P_c} = 0.90$$

Παρατήρηση: Στην πράξη, υπάρχει μία μέγιστη περιεκτικότητα σε ίνες η οποία είναι $V_{f\max} = 0.70$. Για περιεκτικότητες μεγαλύτερες αυτής της τιμής, η διαθέσιμη ποσότητα της μήτρας δεν επαρκεί για να καλύψει την επιφάνεια όλων των ινών.

Άσκηση 2.

Το UD σύνθετο υλικό με μήτρα από Al ενισχυμένο με ίνες Borsic (Boron coated with Sic) σε περιεκτικότητα $V_f = 40\%$ είναι ένα σύνθετο υλικό που αντέχει σε υψηλές θερμοκρασίες. Να υπολογιστούν, η πυκνότητα, η αντοχή παράλληλα προς τις ίνες και τα μέτρα E1 και E2 του συνθέτου. Δίνονται οι ιδιότητες της μήτρας και των ινών.

Material	Density g/cm ²	Modulus of elasticity (Gpa.)	Tensile strength Mpa.
Fibers (Borosic)	2.36	380	2760
Matrix(aluminum)	2.7	69	34.5

Λύση: $V_f = 0.4 \quad \Rightarrow \quad V_m = 0.6$

Από τον Νόμο των φάσεων:

$$\rho_c = \rho_m * V_m + \rho_f * V_f = 2.7 * 0.6 + 2.36 * 0.4 = 2.56 \text{ g/cm}^3$$

$$E_{c,11} = E_m * V_m + E_f * V_f = 69 * 0.6 + 380 * 0.4 = 193.4 \text{ GPa}$$

$$T_{Sc} = T_{Sm} * V_m + T_{Sf} * V_f = 34.5 * 0.6 + 2760 * 0.4 = 1124.7 \text{ MPa}$$

Στην εγκάρσια διεύθυνση, έχουμε:

$$\frac{1}{E_{c,\perp}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} = \frac{0.6}{69} + \frac{0.4}{380} = 9.75 * 10^{-3} \quad \therefore E_{c,\perp} = 102.56 \text{ GPa}$$

Άσκηση 3.

Σε ένα UD-GFRP πολυεστερικής μήτρας και με παράλληλες ίνες γυαλιού με $V_f=40\%$, $E_f=69\text{GPa}$, και $E_m=3.4\text{GPa}$, να υπολογιστούν: a) το διάμηκες μέτρο E_1 , b) τα φορτία που φέρουν οι ίνες και η μήτρα, αν το σύνθετο έχει διατομή $A_c=250\text{mm}^2$ και εφαρμόζεται στο σύνθετο μία τάση $\sigma_c=50\text{MPa}$ κατά την διεύθυνση των ινών, c) την παραμόρφωση της μήτρας και της ίνας για την εφαρμοζόμενη τάση του ερωτήματος b, d) Το εγκάρσιο μέτρο του συνθέτου όταν η τάση των 50MPa εφαρμόζεται κάθετα προς τις ίνες.

Λύση:

$$\text{a) } E_{c,11} = E_m * V_m + E_f * V_f = 3.4 * 0.6 + 69 * 0.4 = 30 \text{ GPa}$$

$$\text{b) } \frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f * V_f}{E_m * V_m} = \frac{69 * 0.4}{3.4 * 0.6} = 13.5 \quad F_f = 13.5 F_m$$

$$F_c = A_c * \sigma = 250 * 50 = 12500 \text{ N}$$

$$F_c = F_f + F_m$$

$$13.5 F_m + F_m = 12500$$

$$F_m = 860 \text{ N}$$

$$\text{Όπου: } F_f = F_c - F_m = 12500 - 860 = 11640 \text{ N}$$

$$\text{c) } A_m = V_m * A_c = 0.6 * 250 = 150 \text{ mm}^2$$

$$A_f = V_f * A_c = 0.4 * 250 = 100 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{860}{150} = 5.73 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = \frac{F_f}{A_f} = \frac{11640}{100} = 116.4 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{5.73}{3.4 * 10^3} = 1.69 * 10^{-3}$$

$$\text{And } , \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{116.4}{69 * 10^3} = 1.69 * 10^{-3}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{50}{30 * 10^3} = 1.69 * 10^{-3}$$

$$\text{d) } E_{c,\perp} = \frac{E_m * E_f}{V_m * E_f + V_f * E_m} = \frac{3.4 * 69}{0.6 * 69 + 0.4 * 3.4}$$

$$E_{c,\perp} = 5.5 \text{ GPa}$$

Άσκηση 4.

Έστω ένα UD – GFRP σύνθετο υλικό με κατ'όγκο περιεκτικότητα σε ίνες $V_f = 65\%$. Να υπολογιστούν τα μέτρα ελαστικότητας του συνθέτου παράλληλα και κάθετα προς τις ίνες E_1 και E_2 αντίστοιχα. Δίνονται: $E_m=3.5\text{GPa}$, και $E_f=70\text{GPa}$.

Λύση:

$$E_{c,||} = E_m * V_m + E_f * V_f = 3.5 * 0.35 + 70 * 0.65 = 47 \text{ GPa}$$

$$\frac{1}{E_{c,\perp}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} = \frac{0.35}{3.5} + \frac{0.65}{70} = 0.11 \rightarrow E_{c,\perp} = 9 \text{ GPa}$$

Άσκηση 5.

Έστω ένα UD – Kevlar-epoxy σύνθετο υλικό με κατ'όγκο περιεκτικότητα σε ίνες $V_f = 60\%$. Το σύνθετο υπόκειται σε παραμόρφωση $\epsilon_1 = 0.1\%$ παράλληλα προς τις ίνες. Να υπολογιστούν το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου παράλληλα προς τις ίνες E_1 , καθώς και η τάση σ_1 .

Δίνονται: $E_m = 5 \text{ GPa}$, και $E_f = 140 \text{ GPa}$.

Λύση:

$$\begin{aligned} E_{c,||} &= E_f * V_f + E_m * (1 - V_f) \\ &= 140 * 0.6 + 5 * 0.4 = 86 \text{ GPa} \\ \sigma_{c1} &= \epsilon * E \\ &= 0.001 * 86 = 86 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Να βρεθεί ο λόγος E_1/E_2 ενός UD-FRP με $V_f=50\%$, αν $E_f/E_m=50$.

Λύση:

$$\begin{aligned} E_{c,11} &= E_m * V_m + E_f * V_f \\ &= E_m * 0.5 + 50 E_m * 0.5 = 25.5 E_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{c,\perp} &= \frac{E_f * E_m}{E_m * V_f + E_f * V_m} \\ &= \frac{50 E_m * E_m}{E_m * 0.5 + 50 E_m * 0.5} = \frac{50 E_m}{25.5} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{E_{c,II}}{E_{c,\perp}} = \frac{25.5 E_m + 25.5}{50 E_m} = \frac{650.25}{50} = 13.005$$

Άσκηση 7.

Ένα σύνθετο UD-FRP ενισχυμένο με S-glass fibers μέσα σε epoxy resin, έχει μέτρο ελαστικότητας $E_1=18.2\text{GPa}$. Αν η πυκνότητα της μήτρας $\rho_m=1.3\text{g/cm}^3$, η πυκνότητα του γυαλιού είναι $\rho_f=2.2\text{ g/cm}^3$, το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας $E_m=2.75\text{GPa}$, και το μέτρο των ινών $E_f=380\text{GPa}$, να βρεθούν:

a) Η κατ'όγκο περιεκτικότητα των ινών, b) Η πυκνότητα του συνθέτου, c) Ο λόγος του φορτίου που φέρουν οι ίνες προς το φορτίο που φέρει η μήτρα.

Λύση:

$$\text{a) } E_c = E_m * (1 - V_f) + E_f * V_f$$

$$18.2 = 2.75 * (1 - V_f) + 380 * V_f$$

$$V_f = 0.041 \quad \implies \quad V_m = (1 - V_f) = 0.959$$

$$\text{b) } \rho_c = \rho_m * V_m + \rho_f * V_f$$

$$= 1.3 * 0.959 + 2.2 * 0.041$$

$$= 1.2467 + 0.0902 = 1.3369 \text{ gm/cm}^3$$

$$\text{c) } \frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f * V_f}{E_m * V_m} = \frac{380 * 0.041}{2.75 * 0.959} = 5.91$$

Άσκηση 8.

Ένα μακρόνιο σύνθετο υλικό UD-GFRP με πολυεστερική μήτρα είναι ενισχυμένο με ίνες γυαλιού μήκους 3mm και διαμέτρου 0.005mm, σε κ.ο. περιεκτικότητα $V_f = 60\%$. Αν η τάση αστοχίας των ινών είναι $\sigma_f = 1500\text{MPa}$, η αντοχή σε διάτμηση $\tau = 25\text{MPa}$, και η αντοχή σε εφελκυσμό της μήτρας είναι 50MPa, να βρεθούν: α) Το κρίσιμο μήκος των ινών, β) η μέγιστη μέση ορθή τάση στην ίνα, και γ) η αντοχή του συνθέτου. Τέλος, να συγκριθούν οι αντοχές του συνθέτου με μακρές ίνες και του συνθέτου με κοντές ίνες μήκους ίσου με το κρίσιμο μήκος.

Λύση:

$$L_c = \frac{\sigma_f * D}{2\tau} = \frac{1500 * 0.005}{2 * 25} = 0.15\text{mm}$$

$$\text{Max. average stress} = \left[1 - \frac{L_c}{2L}\right] * \sigma_{f \max} = \left[1 - \frac{0.15}{6}\right] * 1500 = 1462.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = V_f * \sigma_f * \left[1 - \frac{L_c}{2L}\right] + V_m * \sigma_m = 0.6 * 1500 \left[1 - \frac{0.15}{2*3}\right] + 0.4 * 50 = 897.5 \text{ MPa}$$

$$\text{Συνεχείς ίνες: } \sigma_c = V_f * \sigma_f + V_m * \sigma_m = 0.6 * 1500 + 0.4 * 50 = 920 \text{ MPa}$$

$$\text{Κοντές ίνες μήκους } L_f = L_{\text{crit}}: \sigma_c = \frac{V_f * \sigma_f}{2} + V_m * \sigma_m = \frac{0.6 * 1500}{2} + 0.4 * 50 = 470 \text{ MPa}$$

Άσκηση 9.

Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας ενός κοντόινου με παράλληλες ίνες σύνθετου είναι $\sigma_f = 131\text{GPa}$. Αν η κ.ο. περιεκτικότητα σε ίνες είναι $V_f = 40\%$, το μέτρο ελαστικότητας των ινών $E_f = 400\text{GPa}$, και το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας $E_m = 5\text{GPa}$, να υπολογιστεί το κρίσιμο μήκος των ινών, αν το μήκος των ινών είναι 2mm και το κρίσιμο μήκος είναι μικρότερο του μήκους των ινών.

Λύση:

$$E_c = E_m * V_m + \left[1 - \frac{L_c}{2L}\right] E_f * V_f$$

$$131 = 5 * 0.6 + \left[1 - \frac{L_c}{2 * 2}\right] * 400 * 0.4$$

$$\therefore L_c = 0.8 \text{ mm}$$

Άσκηση 10.

- Να υπολογιστούν οι ελαστικές σταθερές ενός κοντόινου GFRP, με $W_f = 60\%$, όταν:
 - 1. Οι ίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους, και 2. Οι ίνες είναι τυχαίου προσανατολισμού. Δίνονται:

$$E_f = 70 \text{ GPa}$$

$$E_m = 3.5 \text{ GPa}$$

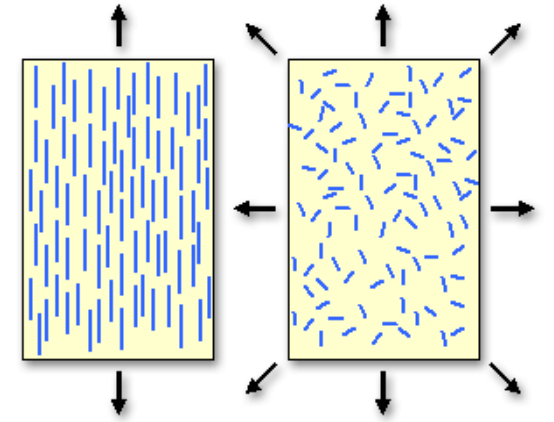
$$\rho_f = 2.5 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_m = 1.2 \text{ g/cm}^3$$

$$l_f = 25 \text{ mm}$$

$$d_f = 2.5 \text{ mm}$$

$$W_f = 0.60$$



Λύση:

1. Ίνες Παράλληλες:

Γνωρίζουμε ότι:

$$E_{11} = \frac{1 + 2(l_f / d_f) \eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} E_m \qquad E_{22} = \frac{1 + 2 \eta_T V_f}{1 - \eta_T V_f} E_m$$

Εύρεση του V_f και των συντελεστών η_L και η_T :

$$V_f = \frac{\frac{W_f}{\rho_f}}{\left(\frac{W_f}{\rho_f}\right) + \left(\frac{W_m}{\rho_m}\right)}$$

$$W_m = 1 - W_f = 1 - 0.60 = 0.40$$

$$V_f = \frac{\frac{0.6}{2.5}}{\left(\frac{0.6}{2.5}\right) + \left(\frac{0.4}{1.2}\right)} = 0.42$$

$$\eta_L = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2\left(\frac{l_f}{d_f}\right)} = \frac{(70/3.5) - 1}{(70/3.5) + 2(25/2.5)} = 0.475$$

$$\eta_T = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + 2} = \frac{(70/3.5) - 1}{(70/3.5) + 2} = 0.864$$

$$E_{11} = \frac{1 + 2(25/2.5) * 0.475 * 0.42}{1 - 0.475 * 0.42} * 3.5 = 21.82 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = \frac{1 + 2 * 0.864 * 0.42}{1 - 0.864 * 0.42} * 3.5 = 9.48 \text{ GPa}$$

Άσκηση 11.

Έστω ο τανυστής
των τάσεων:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \text{ GPa}$$

τότε, η μέση
ορθή τάση
είναι:

$$\sigma_{kk}/3 = (5 + 8 + 2)/3 = 5$$

Και ο τανυστής
αναλύεται ως
εξής:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 7 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση ορθή τάση του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων είναι μηδέν.

Άσκηση 12.

Έστω ο τανυστής των τάσεων:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \text{ GPa} \quad \text{Τανυστής των τάσεων}$$

Αν $E = 207 \text{ GPa}, \nu = 0.3, K = E/3(1 - 2\nu) = 173 \text{ GPa}, G = E/2(1 + \nu) = 79.6 \text{ GPa}$

$$\delta_{ij}\epsilon_{kk} = \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3K} = \begin{bmatrix} 0.0289 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0289 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0289 \end{bmatrix} \quad \text{Ανηγμένη Διόγκωση}$$

$$e_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{2G} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0378 & 0.0441 \\ 0.0378 & 0.0189 & 0.0567 \\ 0.0441 & 0.0567 & -0.0189 \end{bmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} = \begin{bmatrix} 0.00965 & 0.0377 & 0.0440 \\ 0.0377 & 0.0285 & 0.0565 \\ 0.0440 & 0.0565 & -0.00915 \end{bmatrix}$$

Αποκλίνων τανυστής των παραμορφώσεων

Τανυστής των παραμορφώσεων

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij} = \begin{bmatrix} 0.00960 & 0.0378 & 0.0441 \\ 0.0378 & 0.0285 & 0.0567 \\ 0.0441 & 0.0567 & -0.00930 \end{bmatrix}$$

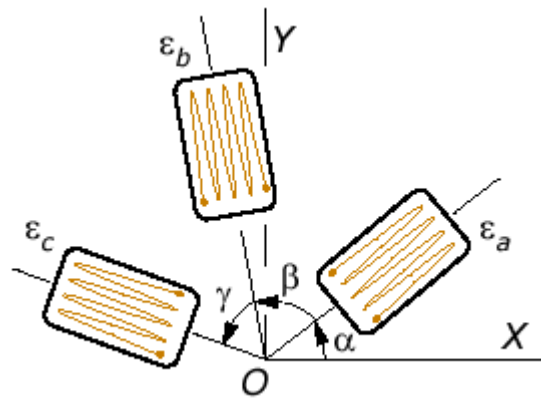
Τανυστής των παραμορφώσεων

Εναλλακτικές λύσεις με μικρές διαφορές λόγω στρογγυλοποιήσεων

Άσκηση 13.

Στην επιφάνεια ενός δοκιμίου τοποθετούμε τρία ηλεκτρομηκυνσιόμετρα (strain gauges) σε δύο εναλλακτικές διατάξεις. α) 0-45-90 και β) 0-60-120. Αν από τις πειραματικές μετρήσεις γνωρίζουμε τις παραμορφώσεις στις διευθύνσεις των ηλεκτρομηκυνσιομέτρων, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση, οι παραμορφώσεις ϵ_x , ϵ_y και γ_{xy} καθώς και οι τιμές των κύριων παραμορφώσεων.

Λύση:



Γενική Περίπτωση: Έστω τρία ηλεκτρομηκυνσιόμετρα των οποίων οι άξονες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες α , β , γ και ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c , οι αντίστοιχες παραμορφώσεις που μετράμε πειραματικά με αυτά. Από την σχέση στροφής:

$$\epsilon'_{xx} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

προκύπτουν:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \epsilon_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta) + \epsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta)$$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta + \gamma) + \epsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

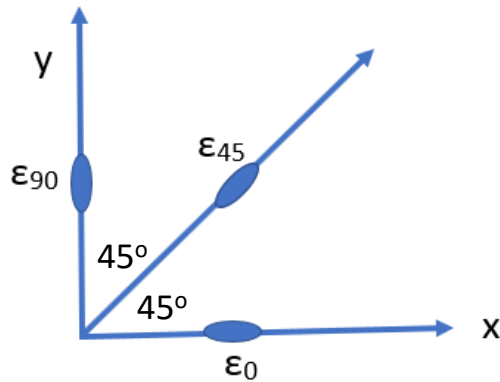
Εφαρμογή: α) Για $\alpha=0^\circ$ και $\beta=\gamma=45^\circ$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta) + \varepsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta + \gamma) + \varepsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta + \gamma)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_c = \varepsilon_{90}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = \varepsilon_{45} - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2}$$

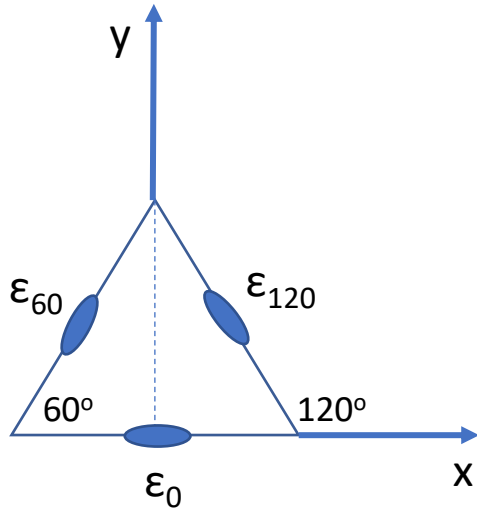


Οι κύριες παραμορφώσεις βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{I,II} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \\ \varepsilon_{III} &= 0\end{aligned}$$

με αντικατάσταση των παραπάνω τιμών.

Εφαρμογή: β) Για $\alpha=0^\circ$ και $\beta=\gamma=60^\circ$ έχουμε:



$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta) + \varepsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2(\alpha + \beta + \gamma) + \varepsilon_{xy} \sin 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_{60} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 120^\circ + \varepsilon_{xy} \sin 120^\circ$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 240^\circ + \varepsilon_{xy} \sin 240^\circ$$

$\Rightarrow$ Από όπου προκύπτουν
τα ε_{xx} , ε_{yy} και ε_{xy} Στη
συνέχεια, από τις
σχέσεις

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_{III} = 0$$

βρίσουμε τις κύριες παραμορφώσεις

Άσκηση 14.

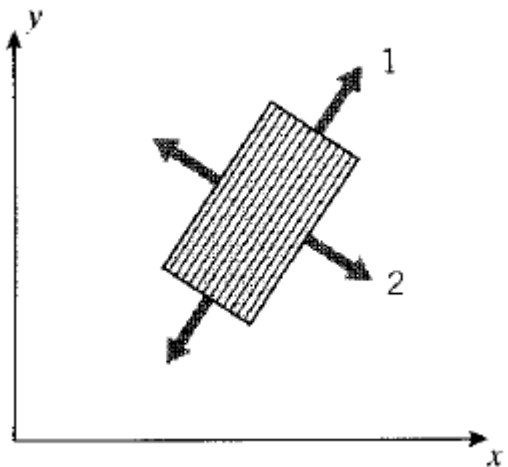
Ας θεωρήσουμε μία στρώση UD-Kevlar-epoxy με σταθερές $E_1=82\text{GPa}$, $E_2=4\text{GPa}$, $G_{12}=2.8\text{GPa}$ και $\nu_{12}=0.25$.
Η Compliance matrix S στο σύστημα 1-2 (κύριο σύστημα) είναι

$$S = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1220 \times 10^{-10} & -.3050 \times 10^{-11} & 0 \\ -.3050 \times 10^{-11} & .2500 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & .3571 \times 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Αν η στρώση στραφεί όπως φαίνεται στο Σχήμα, και ο άξονας 1 σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με τον άξονα x , τότε το μητρώο μετασχηματισμού $[A]$ γράφεται:

$$A = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7500 & .2500 & .8660 \\ .2500 & .7500 & -.8660 \\ -.4330 & .4330 & .5000 \end{bmatrix}$$

και η Compliance matrix $\bar{S}$ στο σύστημα x - y θα είναι:



$$\bar{S} = R A^{-1} R^{-1} S A = \begin{bmatrix} .8830 \times 10^{-10} & -.1970 \times 10^{-10} & -.1222 \times 10^{-9} \\ -.1971 \times 10^{-10} & .2072 \times 10^{-9} & -.8371 \times 10^{-10} \\ -.1222 \times 10^{-9} & -.8369 \times 10^{-10} & -.2905 \times 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 15.

Άσκηση 15: Να βρεθεί η κ.β. περιεκτικότητα των επιμέρους φάσεων, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) PP ενισχυμένο σε περιεκτικότητα 20% κ.ο. με ίνες glass fiber.

β) Epoxy ενισχυμένο σε περιεκτικότητα 25% κ.ο. με ίνες άνθρακα και σε περιεκτικότητα 25% κ.ο. με ίνες Kevlar (υβριδικό σύνθετο).

γ) Κατασκευάζουμε με δύο διαφορετικές μεθόδους Α και Β δοκίμια με την σύνθεση του υλικού της ερώτησης (α) και από τις διαστάσεις τους και το βάρος τους υπολογίζουμε εργαστηριακά τις πυκνότητές τους. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων μας δίνουν:

Δοκίμια κατασκευασμένα με την μέθοδο Α, πυκνότητα του συνθέτου = 1128 Kg/m^3

Δοκίμια κατασκευασμένα με την μέθοδο Β, πυκνότητα του συνθέτου = 1228 Kg/m^3

Ποια από τις δύο μεθόδους θα προτιμήσετε και γιατί? Σε τι συνίσταται ο κίνδυνος επιλογής των δοκιμίων της μεθόδου που απορρίψατε? Να ποσοτικοποιήσετε την αιτία απόρριψης.

Δίνονται οι πυκνότητες των υλικών σε (Kg/m^3). Glass fiber=2540, PP=900, Carbon fiber=1790, Kevlar fiber=1450, και Epoxy=1300.

Λύση:

Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της σχέσης μεταξύ της κ.β. και της κ.ο. περιεκτικότητας.

Λύση της Άσκησης 15 (συνέχεια)

$$\begin{array}{lcl}
 \boxed{\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i} & \Rightarrow & \rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f) \Rightarrow \rho_c = (\rho_f - \rho_m) V_f + \rho_m \\
 \boxed{\rho_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{W_i}{\rho_i}}} & \Rightarrow & \rho_c = \frac{1}{\frac{W_f}{\rho_f} + \frac{(1 - W_f)}{\rho_m}} \Rightarrow \rho_c = \frac{\rho_f \rho_m}{(\rho_m - \rho_f) W_f + \rho_f}
 \end{array}
 \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$(\rho_f - \rho_m) V_f + \rho_m = \frac{\rho_f \rho_m}{(\rho_m - \rho_f) W_f + \rho_f} \Rightarrow \boxed{W_f = \frac{\rho_f V_f}{(\rho_f - \rho_m) V_f + \rho_m} = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c}}$$

Και αντιστρόφως,

$$\boxed{V_f = W_f \frac{\rho_c}{\rho_f}}$$

Λύση της Άσκησης 15 (συνέχεια)

a) $\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i \Rightarrow \rho_c = 0.2 \times 2540 + 0.8 \times 900 = 1228 \text{Kgm}^{-3} \Rightarrow \rho_c = 1228 \text{Kgm}^{-3}$

Επομένως, από την σχέση:

$$W_f = \frac{\rho_f V_f}{(\rho_f - \rho_m) V_f + \rho_m} = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c} \Rightarrow$$

$$W_f = \frac{2540 \times 0.20}{1228} = 0.414 \quad \text{και} \quad W_m = 1 - 0.414 = 0.586 \quad \text{ή} \quad W_f = 41.4\% \quad \text{και} \quad W_m = 58.6\%$$

b) Στο υβριδικό σύνθετο, εφαρμόζουμε και πάλι τη σχέση:

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i \Rightarrow \rho_c = 0.25 \times 1450 + 0.25 \times 1790 + 0.50 \times 1300 = 1460 \text{Kgm}^{-3} \Rightarrow \rho_c = 1460 \text{Kgm}^{-3}$$

Επομένως, από την σχέση:

$$W_f = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c} \Rightarrow$$

Carbon fibers:

$$W_{CF} = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c} = \frac{1790 \times 0.25}{1460} = 0.306$$

Kevlar fibers:

$$W_{KF} = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c} = \frac{1450 \times 0.25}{1460} = 0.248$$

Epoxy matrix:

$$W_{Epoxy} = 1 - 0.306 - 0.248 = 0.446$$

Λύση της Άσκησης 15 (συνέχεια)

- γ) Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα των δοκιμίων που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Α είναι μικρότερη εκείνης των δοκιμίων που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Β. Αυτό σημαίνει ότι τα δοκίμια που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Α εμπεριέχουν φυσαλίδες αέρα. Αυτό είναι επικίνδυνο γιατί οι φυσαλίδες και τα κενά αποτελούν σημεία συγκέντρωσης τάσεων και επομένως πιθανά σημεία έναρξης ρωγμών. Με βάση αυτά, θα επιλέξουμε τα δοκίμια που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Β.

Για την ποσοτικοποίηση των αποτελεσμάτων, θα υπολογίσουμε το ποσοστό των κενών σε κάθε περίπτωση, εφαρμόζοντας τη σχέση:

$$\text{Void Fraction} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}}$$

ρ_{ct} = Η θεωρητική τιμή της πυκνότητας του συνθέτου

ρ_{ce} = Η πειραματική τιμή της πυκνότητας του συνθέτου

Για τα δοκίμια που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Α:

$$\text{Void Fraction} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}} = \frac{1228 - 1128}{1228} = 0.081 = 8.1\%$$

Για τα δοκίμια που κατασκευάσθηκαν με την μέθοδο Β:

$$\text{Void Fraction} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}} = \frac{1228 - 1228}{1228} = 0 = 0\%$$

Άσκηση 16: Ένα UD-GFRP σύνθετο υλικό αποτελείται από ίνες γυαλιού παράλληλες μεταξύ τους μέσα σε μία θερμοσκληρυνόμενη πολυεστερική μήτρα σε κ.ο. περιεκτικότητα $V_f=40\%$.

α) Το σύνθετο υπόκειται σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών. Αν η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε διεύθυνση παράλληλα προς τις ίνες είναι $\sigma_1 = 100\text{MPa}$, να βρεθούν οι παραμορφώσεις ε_1 και ε_2 που αναπτύσσονται σε διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα προς τις ίνες αντίστοιχα.

β) Το σύνθετο υπόκειται σε εφελκυσμό κάθετα προς τις ίνες. Αν η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε διεύθυνση κάθετα προς τις ίνες είναι $\sigma_2 = 15\text{MPa}$, να βρεθούν οι παραμορφώσεις ε_1 και ε_2 που αναπτύσσονται σε διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα προς τις ίνες αντίστοιχα.

Δίνονται: $E_f=76\text{GPa}$, $\nu_f=0.22$, $E_m=3\text{GPa}$, $\nu_m=0.38$.

Λύση:

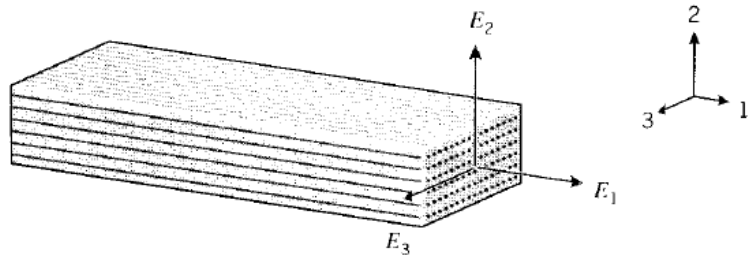
$$(\alpha) \quad \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \text{και} \quad E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$E_1 = 76 \times 0.40 + 3 \times 0.60 = 32.2\text{GPa} \Rightarrow$$

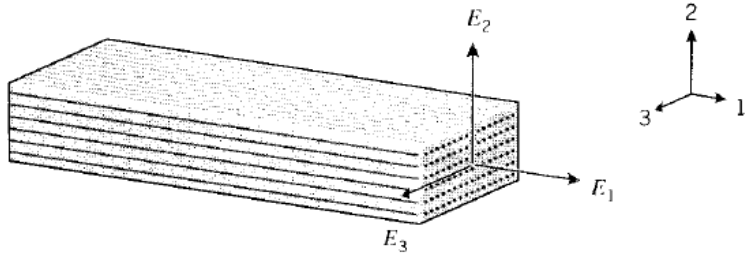
$$\varepsilon_1 = 100 \times 10^6 / 32.2 \times 10^9 = 3.11 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 3.11 \times 10^{-3}}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{και} \quad \nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \Rightarrow$$

$$\nu_{12} = 0.22 \times 0.40 + 0.38 \times 0.60 = 0.316 \Rightarrow \varepsilon_2 = -0.316 \times 0.00311 = -9.83 \times 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = -9.83 \times 10^{-4}}$$



$$(\beta) \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}} \quad \text{και} \quad \boxed{E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}} \Rightarrow$$



$$E_2 = \frac{76 \times 3}{0.6 \times 76 + 0.4 \times 3} = 4.87 \text{ GPa} \Rightarrow \boxed{E_2 = 4.87 \text{ GPa}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 15 \times 10^6 / 4.87 \times 10^9 = 3.08 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 3.08 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}} \Rightarrow \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow$$

$$\nu_{21} = 0.316 \times \frac{4.87}{32.2} = 0.0478 \Rightarrow \boxed{\nu_{21} = 0.0478} \Rightarrow \varepsilon_1 = -0.0478 \times 0.00308 = -1.47 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = -1.47 \times 10^{-4}}$$

Άσκηση 17.

Σε ένα ομογενές και ισότροπο υλικό να βρεθούν συναρτήσει των E και ν το μητρώο Ένδοσης (Compliance Matrix) και το μητρώο δυσκαμψίας (Stiffness Matrix), α) Σε τρεις διαστάσεις, και β) σε δύο διαστάσεις.

Στη συνέχεια, σε ένα εγκάρσιως ισότροπο υλικό, να βρεθούν συναρτήσει των E_1 , E_2 , ν_{12} και ν_{21} το μητρώο Ένδοσης (Compliance Matrix) και το μητρώο δυσκαμψίας (Stiffness Matrix), σε δύο διαστάσεις.

Λύση:

Ισότροπο Υλικό σε 3
διαστάσεις:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ισότροπο Υλικό σε 3
διαστάσεις:

Εκφράσεις με χρήση του G.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Ισότροπο Υλικό σε plane
stress:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Ισότροπο Υλικό σε plane stress:

Εκφράσεις με χρήση του G.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Ισότροπο Υλικό σε plane strain:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ισότροπο Υλικό σε plane strain:

Εκφράσεις με χρήση του G.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ορθότροπο Υλικό:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}, \quad E_3 \nu_{23} = E_2 \nu_{32}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad \text{and} \quad \nu_{32} = \frac{E_3}{E_2} \nu_{23}$$

$$E_2 = E_3 \quad \nu_{23} = \nu_{32}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_z E_x \Delta} & \frac{1-\nu_{zx}\nu_{xz}}{E_z E_x \Delta} & \frac{\nu_{zy}+\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{\nu_{zy}+\nu_{xz}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

where,

$$\Delta = \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xz}-\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

where $\frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}.$

$$\begin{cases} \frac{\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_z E_x \Delta} \\ \frac{\nu_{zy}+\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x \Delta} = \frac{\nu_{zy}+\nu_{xz}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} \\ \frac{\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} \end{cases}$$

Εγκαρσίως Ισότροπο Υλικό:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

ν_{12} = Κύριος λόγος του Poisson (η παραμόρφωση εφαρμόζεται στην διεύθυνση 1)>>

ν_{21} = Δευτερεύων λόγος του Poisson (η παραμόρφωση εφαρμόζεται στην διεύθυνση 2)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Άλυτες Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να αναπτυχθούν στον χώρο των τριών διαστάσεων, οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{equilibrium : } \sigma_{ij,j} = 0$$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$\text{kinematic : } \epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$$

Κινηματικές εξισώσεις

$$\text{constitutive : } \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \alpha\delta_{ij}\Delta T$$

Καταστατικές εξισώσεις

Όπου α ο γραμμικός συντελεστής θερμικής διαστολής και ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας.

Άσκηση 2. Αν το polycarbonate έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 2.5\text{GPa}$ και λόγο του Poisson $\nu = 0.37$,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

1. Να υπολογίσετε την compliance matrix S του polycarbonate.
2. Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του S για τον προσδιορισμό του stiffness matrix D .

3. Να βρεθεί το μητρώο των τάσεων για το οποίο το μητρώο των παραμορφώσεων είναι:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.0 \\ 0.03 \\ 0.01 \\ 0.025 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 3. Αν ένα κράμα Αλουμινίου έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 70.6 \text{ GPa}$ και λόγο του Poisson $\nu = 0.27$, Να βρεθούν τα ακόλουθα:

1. Να υπολογίσετε την compliance matrix S του κράματος του Αλουμινίου.
2. Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του S για τον προσδιορισμό του stiffness matrix D .
3. Να βρεθεί το μητρώο των τάσεων για το οποίο το μητρώο των παραμορφώσεων είναι:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.15 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 4. Δίνεται ο τανυστής των τάσεων:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

1. Να αναλυθεί ο παραπάνω τανυστής στην σφαιρική και την αποκλίνουσα συνιστώσα, σύμφωνα με την σχέση:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \Sigma_{ij}$$

2. Αν $G = 357 \text{ MPa}$ και $K = 1.67 \text{ GPa}$, να βρεθούν ο αποκλίνων και ο σφαιρικός τανυστής των παραμορφώσεων, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\delta_{ij} \varepsilon_{kk} = \frac{\delta_{ij} \sigma_{kk}}{3K}, \quad e_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{2G}$$

3. Να βρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων, σύμφωνα με την σχέση:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij}$$

4. Να βρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων, σύμφωνα με την σχέση:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

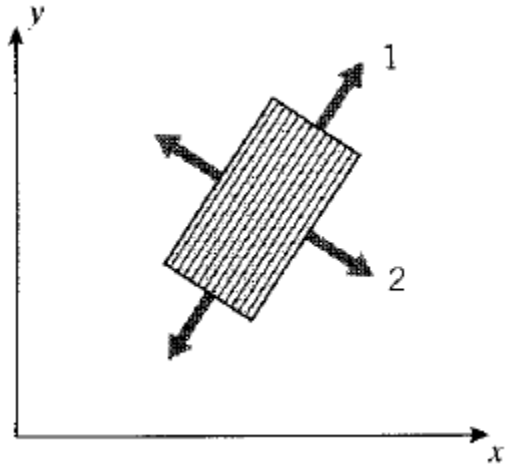
και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με αυτά του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση 5.

Να αποδειχθεί ότι αν ο τανυστής των τάσεων έχει μηδενικό ίχνος, τότε μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν άλλο με μηδενικούς όρους στην κύρια διαγώνιο, δηλαδή ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων παριστά μία κατάσταση καθαρής διάτμησης.

Άσκηση 6. Να βρεθεί στο σύστημα x-y η compliance matrix $\bar{\mathbf{S}}$ καθώς και η stiffness matrix $\bar{\mathbf{D}}$ μίας στρώσης ενός συνθέτου graphite/epoxy με ίνες παράλληλες στον άξονα x. Δίνονται: $E_{11}=230\text{GPa}$, $E_{22}= 6.6\text{GPa}$, $G_{12}=4.8\text{GPa}$, και $\nu_{12}=0.25$. Επίσης, υπενθυμίζεται η σχέση:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}$$



Άσκηση 7.

Να βρεθεί στο σύστημα x-y η compliance matrix $\bar{\mathbf{S}}$ καθώς και η stiffness matrix $\bar{\mathbf{D}}$ μίας στρώσης ενός συνθέτου graphite/epoxy με ίνες 30° ως προς τον άξονα x. Δίνονται: $E_{11}=230\text{GPa}$, $E_{22}= 6.6\text{GPa}$, $G_{12}=4.8\text{GPa}$, και $\nu_{12}=0.25$.

Επίσης, υπενθυμίζεται η σχέση:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}$$