

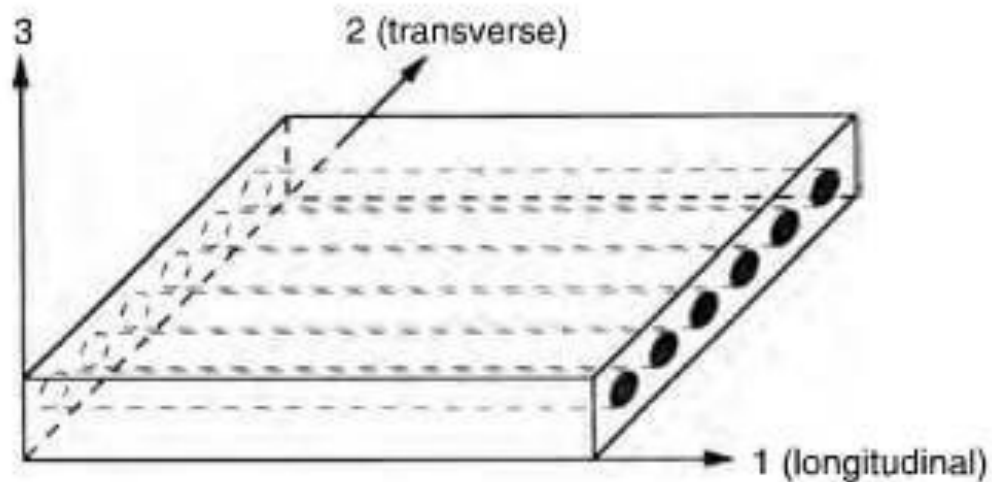
Μικρομηχανική της μίας Lamina

Γ. Παπανικολάου

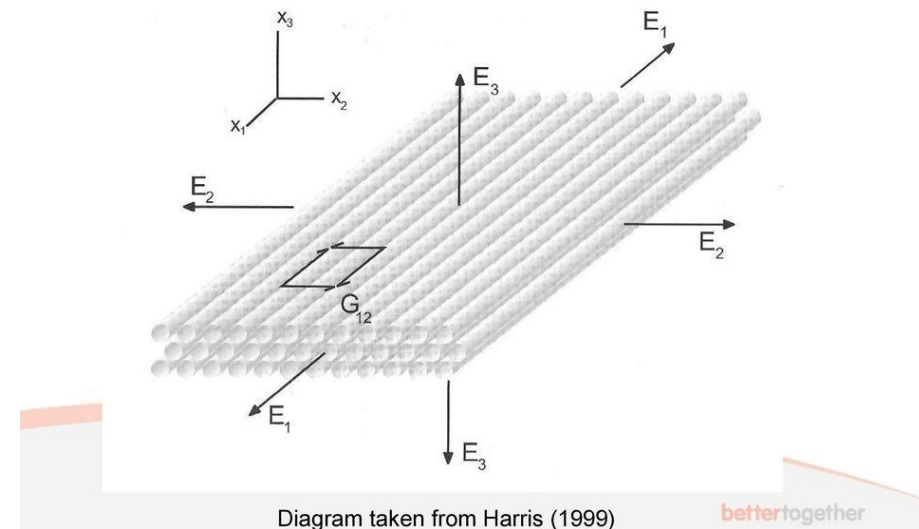


Μικρομηχανική της μίας Lamina

- Η μικρομηχανική της μίας Lamina ασχολείται με την μελέτη της μηχανικής αλληλεπίδρασης των συνιστωσών ενός συνθέτου υλικού. Το αποτέλεσμα της μικρομηχανικής ανάλυσης είναι η δυνατότητα πρόβλεψης της μακρομηχανικής συμπεριφοράς του συνθέτου.
- Η Μικρομηχανική ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με χρήση της «Μηχανικής των Υλικών», ή με χρήση της «Θεωρίας Ελαστικότητας» είτε με χρήση και των δύο ανάλογα με τις απαιτήσεις.



Lamina Axis Notation

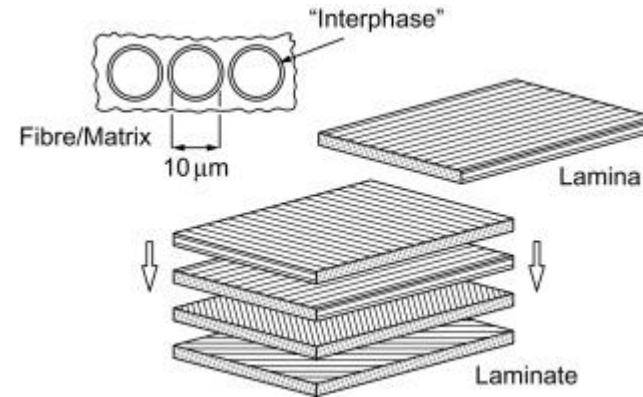


Η κατ'όγκο περιεκτικότητα σε ίνες, V_f

Ας υποθέσουμε ότι ένα σύνθετο υλικό που αποτελείται από ίνες εμβαπτισμένες μέσα σε μία μήτρα. Τότε, ο όγκος του συνθέτου ισούται με το άθροισμα των όγκων των ινών και της μήτρας:

$$v_c = v_f + v_m$$

Όπου: v_c = Ο όγκος του συνθέτου
 v_f = Ο όγκος των ινών
 v_m = Ο όγκος της μήτρας



Ορίζουμε κατ'όγκο περιεκτικότητα των ινών V_f και κατ'όγκο περιεκτικότητα της μήτρας V_m ως:

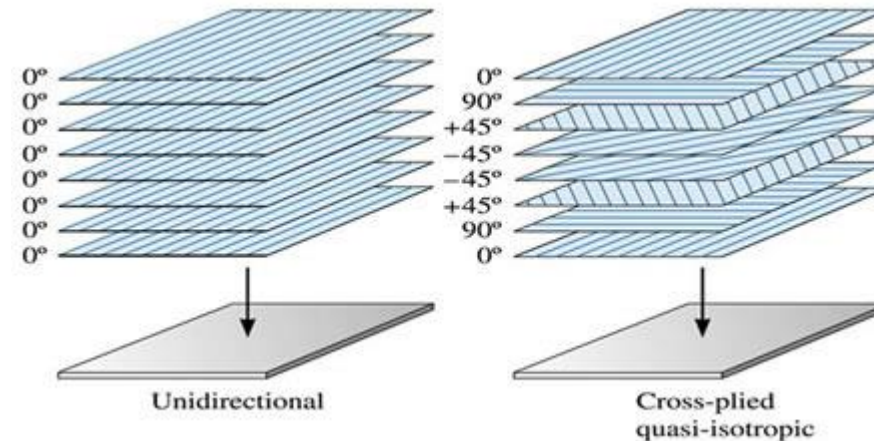
$$V_f = \frac{v_f}{v_c}$$

και

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}$$

Προφανώς ισχύει:

$$V_f + V_m = 1$$



Η κατά βάρος περιεκτικότητα σε ίνες, W_f

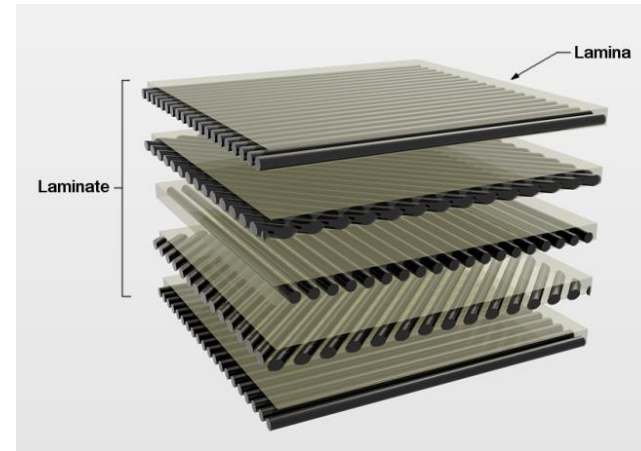
Ας υποθέσουμε ότι ένα σύνθετο υλικό που αποτελείται από ίνες εμβαπτισμένες μέσα σε μία μήτρα. Τότε, το βάρος του συνθέτου ισούται με το άθροισμα του βάρους των ινών και της μήτρας:

$$w_c = w_f + w_m$$

Όπου: w_c = Το βάρος του συνθέτου

w_f = Το βάρος των ινών

w_m = Το βάρος της μήτρας



Ορίζουμε κατά βάρος περιεκτικότητα των ινών W_f και κατά βάρος περιεκτικότητα της μήτρας W_m ως:

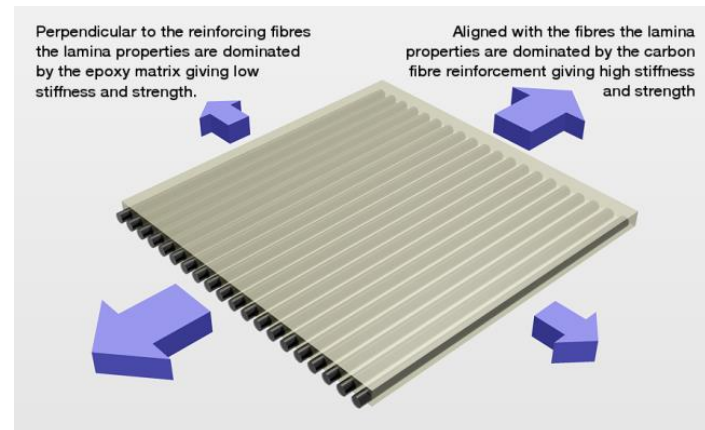
$$W_f = \frac{w_f}{w_c}$$

και

$$W_m = \frac{w_m}{w_c}$$

Προφανώς ισχύει:

$$W_f + W_m = 1$$



Η Πυκνότητα του Συνθέτου

Η πυκνότητα ορίζεται ως ο λόγος της μάζας προς τον αντίστοιχο όγκο.

Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα των φυσικών σωμάτων. Μάζα είναι η ποσότητα της ύλης που περιέχεται σε ένα σώμα. Στο σύστημα μονάδων SI, η μάζα μετράται σε χιλιόγραμμα και αποτελεί θεμελιώδη μονάδα μέτρησης στο σύστημα αυτό.

Στην κλασική μηχανική, η **αδρανειακή μάζα** εμφανίζεται ως σταθερά αναλογίας στον 2ο νόμο του Νεύτωνα:

Στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, η **αδρανειακή μάζα** ορίζεται ως η ιδιότητα της ύλης να αντιστέκεται σε μεταβολές της κίνησής του, ή ισοδύναμα ως το μέτρο της αδράνειας ενός σώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η αδρανειακή μάζα ενός σώματος, τόσο μικρότερη επιτάχυνση υφίσταται από δεδομένη δύναμη που θα του ασκηθεί (βάσει του τύπου $a=F/m$).

Στην κλασική μηχανική η μάζα είναι το υπόθεμα και η πηγή του βαρυτικού πεδίου, δηλαδή η βαρύτητα σε ένα σώμα είναι ανάλογη της μάζας του. Στο ίδιο βαρυτικό πεδίο, σε ένα σώμα με μικρότερη βαρυτική μάζα ασκείται μικρότερη δύναμη από ένα σώμα με μεγαλύτερη **βαρυτική μάζα**.

Αυτή η ποσότητα συγχέεται μερικές φορές με το βάρος. Στη Γη, επειδή η βαρύτητα είναι περίπου της ίδιας έντασης σε όλη την επιφάνεια, συγκρίνουμε ουσιαστικά τις μάζες με βάση τα βάρη τους χρησιμοποιώντας ζυγαριές.

Στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας δεχόμαστε **αξιωματικά** ότι η αδρανειακή μάζα ταυτίζεται με τη βαρυτική μάζα.

Η Πυκνότητα ενός Συνθέτου Συναρτήσει των W_i

Με βάση τα προηγούμενα, η πυκνότητα του συνθέτου θα ορίζεται ως:

$$\rho_c = \frac{w_c}{v_c}$$

Αλλά,

$$v_c = v_f + v_m$$

και,

$$v = \frac{w}{\rho}$$

Επομένως,

$$\frac{w_c}{\rho_c} = \frac{w_f}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m} \Rightarrow \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{w_f}{w_c} \right) + \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{w_m}{w_c} \right) \Rightarrow$$

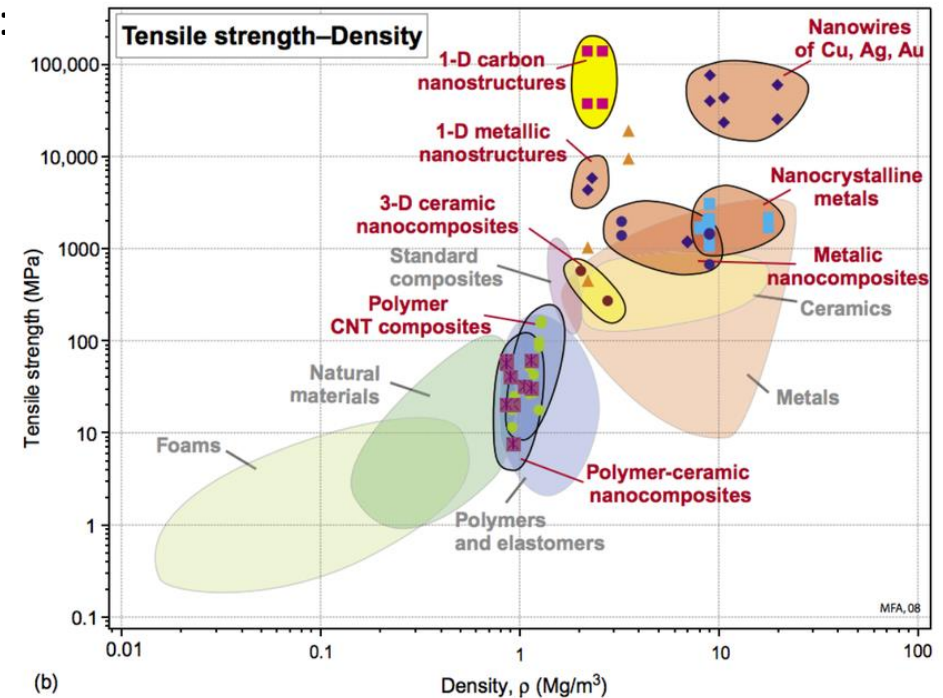
$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m}$$

ή

$$\rho_c = \frac{1}{\left(\frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} \right)} \Rightarrow$$

Γενικότερα, για ένα σύνθετο με n συνιστώσες:

$$\rho_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{W_i}{\rho_i}}$$



Η Πυκνότητα ενός Συνθέτου Συναρτήσει των V_i

Από την σχέση:

$$w_c = w_f + w_m \Rightarrow$$

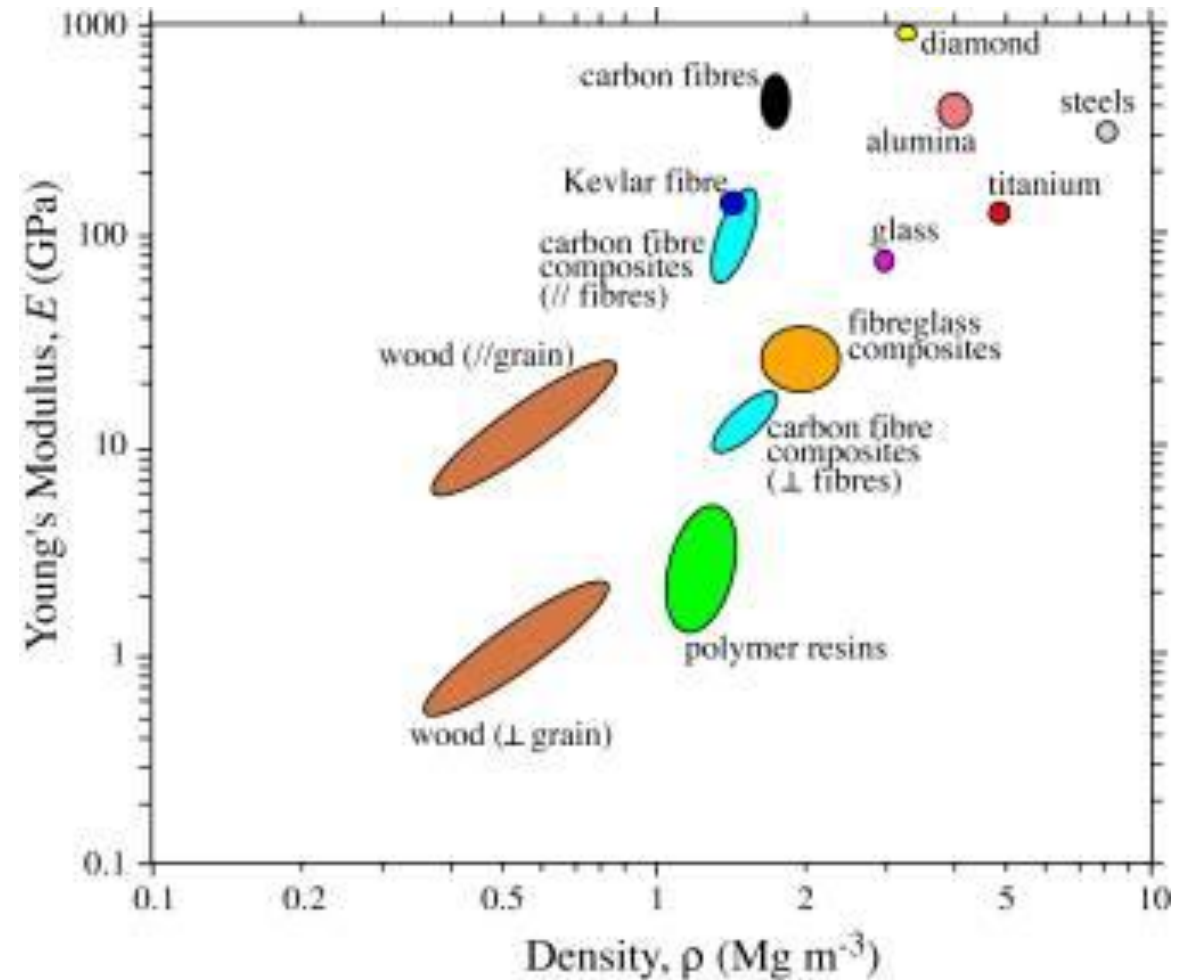
$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m \Rightarrow$$

$$\rho_c = \rho_f \left(\frac{v_f}{v_c} \right) + \rho_m \left(\frac{v_m}{v_c} \right) \Rightarrow$$

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

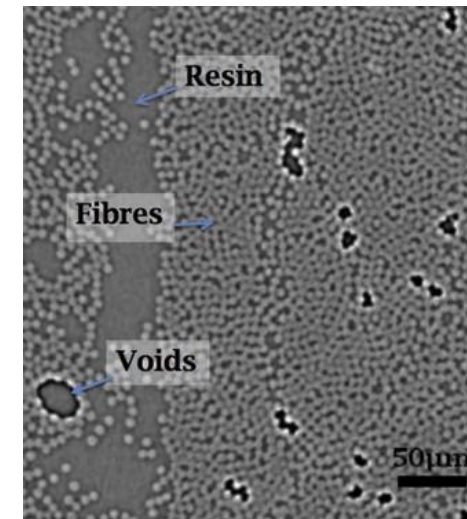
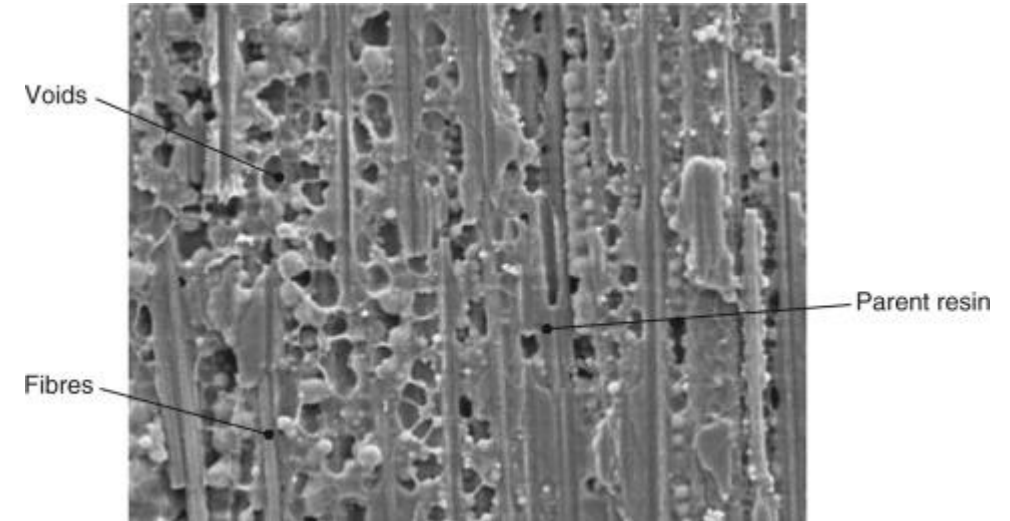
Γενικότερα, για ένα σύνθετο με n συνιστώσες:

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i$$



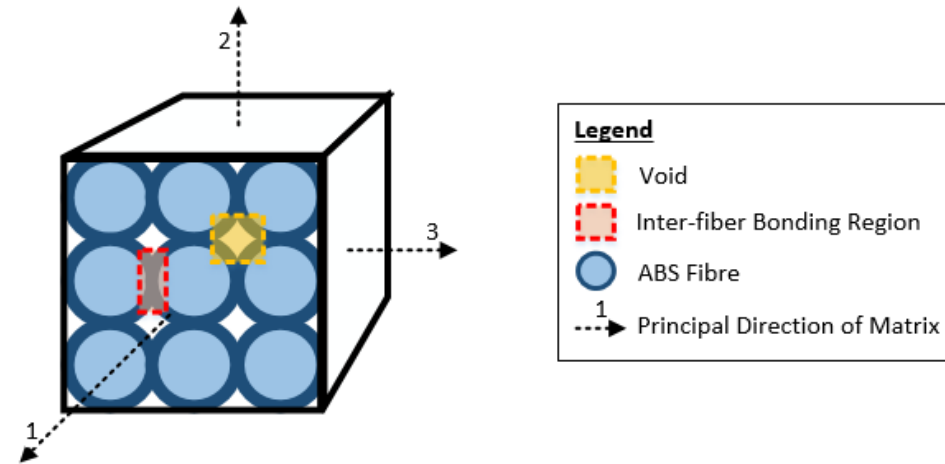
Η περιεκτικότητα των κενών στην μήτρα

- Τα κενά είναι πόροι που δεν έχουν πληρωθεί είτε με ρητίνη ή με ίνες σε ένα σύνθετο υλικό. Τα κενά τυπικά είναι το αποτέλεσμα της κακής κατασκευής του συνθέτου και είναι ανεπιθύμητα.
- Τα κενά μπορούν να επηρεάσουν τις μηχανικές ιδιότητες αλλά και τον χρόνο ζωής του συνθέτου.
- Υποβαθμίζουν κυρίως τις ιδιότητες που επηρεάζονται από την μήτρα, όπως την διαστρωματική διατμητική αντοχή, την αντοχή σε θλίψη κατά την διαμήκη διεύθυνση, καθώς και την αντοχή σε εφελκυσμό κατά την εγκάρσια διεύθυνση.

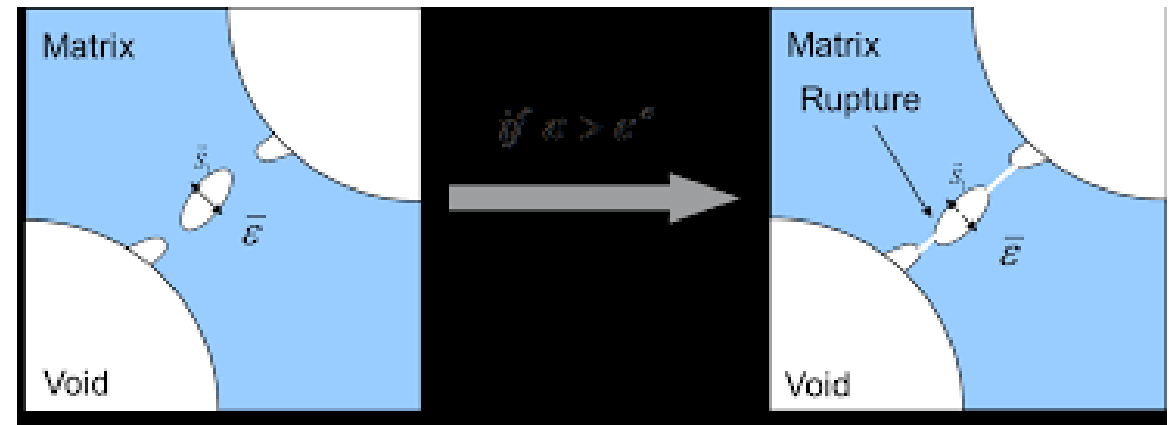


Η περιεκτικότητα των κενών στην μήτρα

Τα κενά λειτουργούν σαν σημεία συγκέντρωσης τάσεως και ανάπτυξης μικρορωγμών, διευκολύνουν την διείσδυση νερού ή υγρασίας μέσα στην μάζα της μήτρας ενώ συμβάλλουν στην ανισοτροπία του συνθέτου.

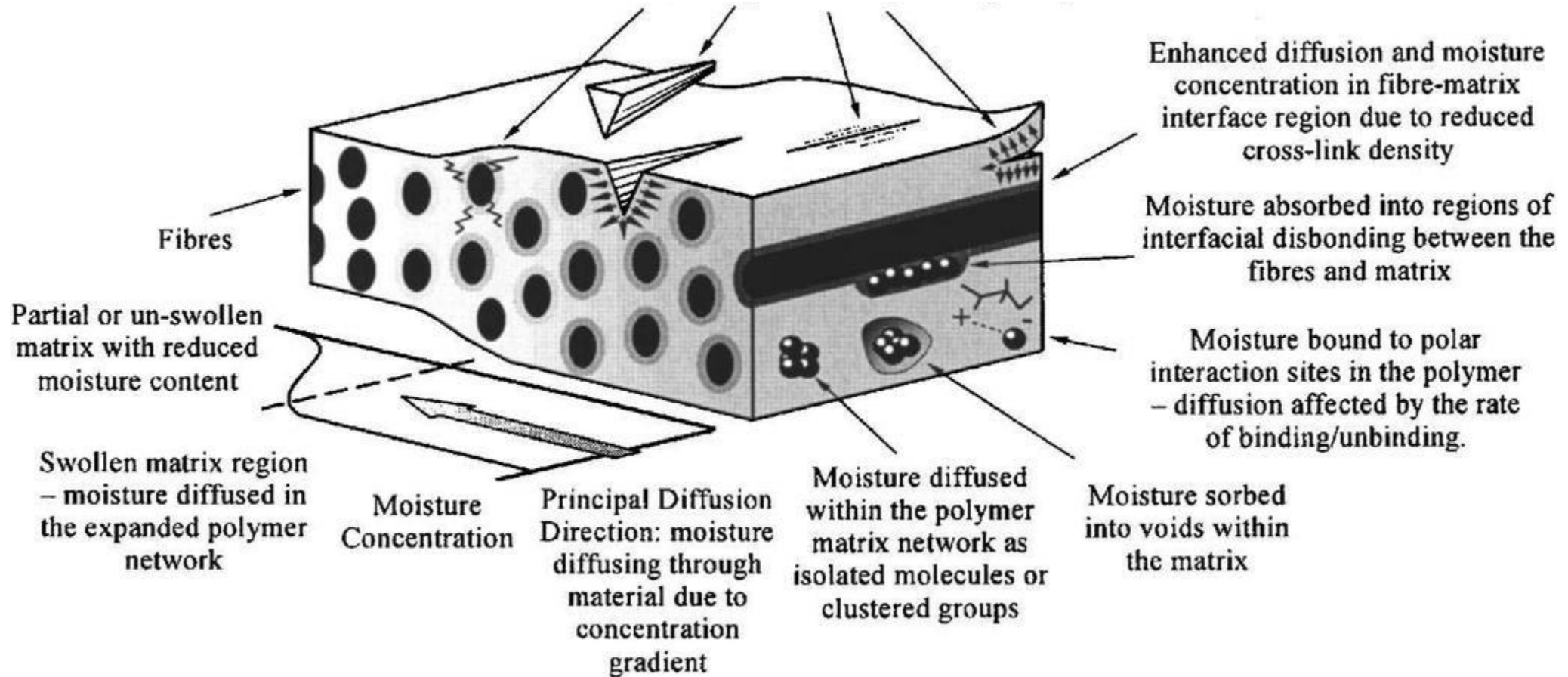


Στις αεροδιαστημικές εφαρμογές, μία περιεκτικότητα κενών της τάξεως του 1% είναι ανεκτή, ενώ η αντίστοιχη μέγιστη περιεκτικότητα σε λιγότερο ευαίσθητες εφαρμογές, είναι της τάξεως του 3-5%.



Επίδραση των κενών στην απορρόφηση υγρασίας

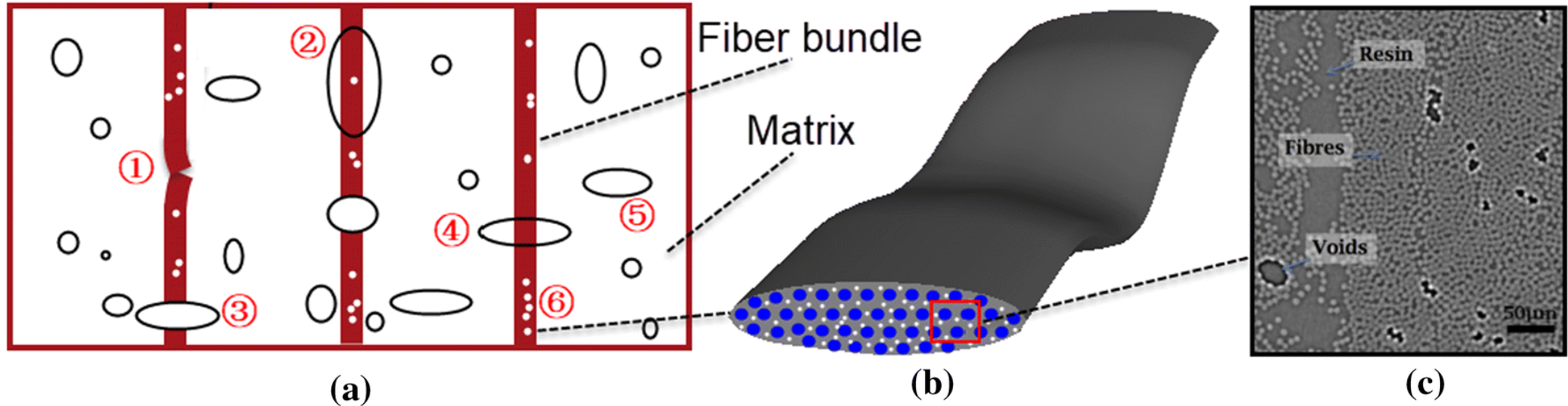
Θραύση που προκαλείται από την υγρασία, με πιθανή απώλεια υλικού και αυξημένη απορρόφηση υγρασίας μέσω ασυνεχειών στην περιοχή των μικρορωγμών.



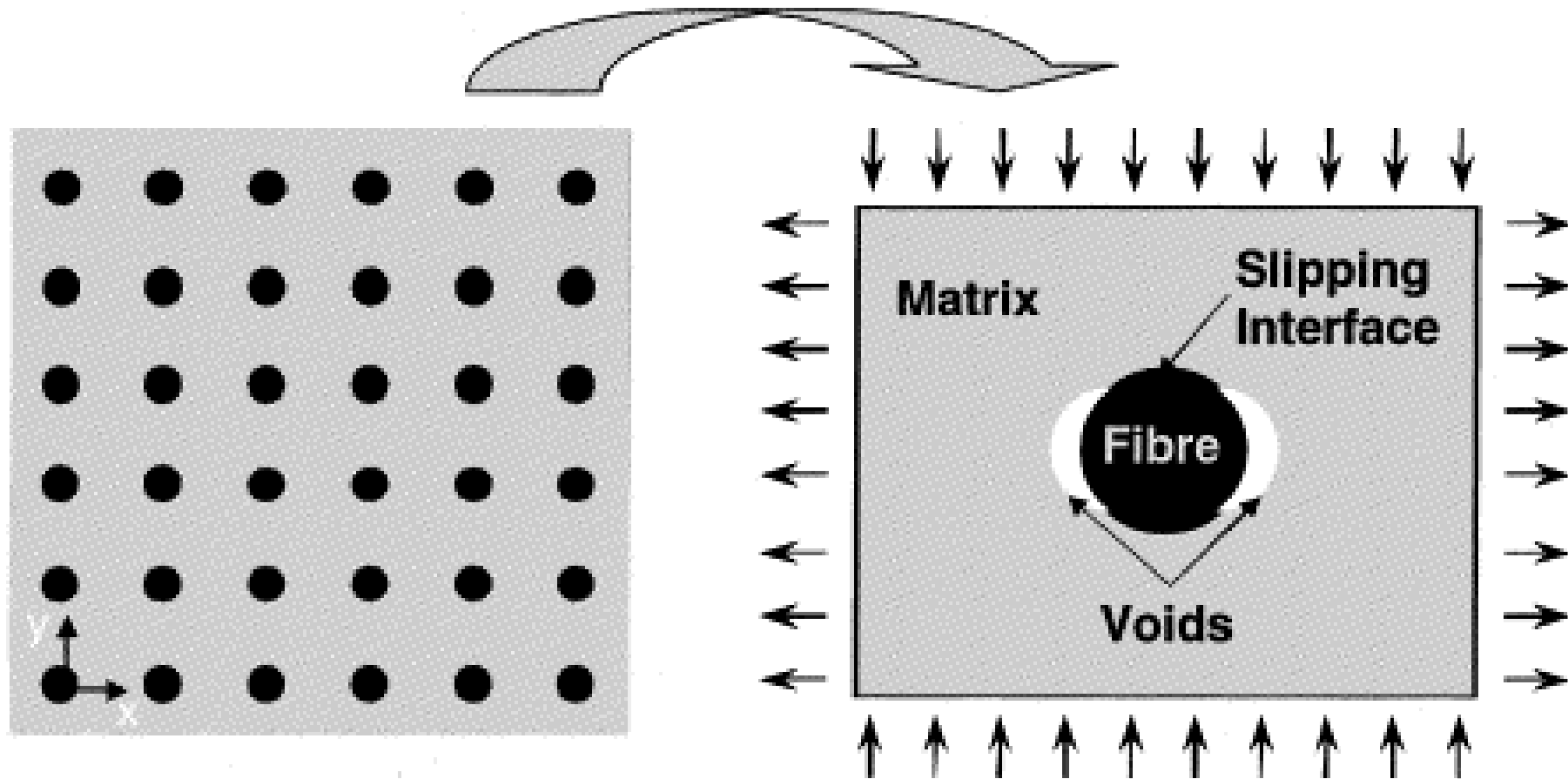
Επίδραση των κενών στην αστοχία του συνθέτου

- 1. Broken fibers (partial breakage)
- 2. Debonded fiber bundle
- 3. Broken fibers (complete breakage)

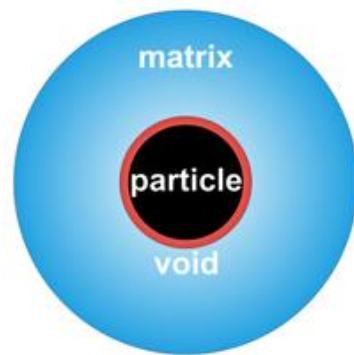
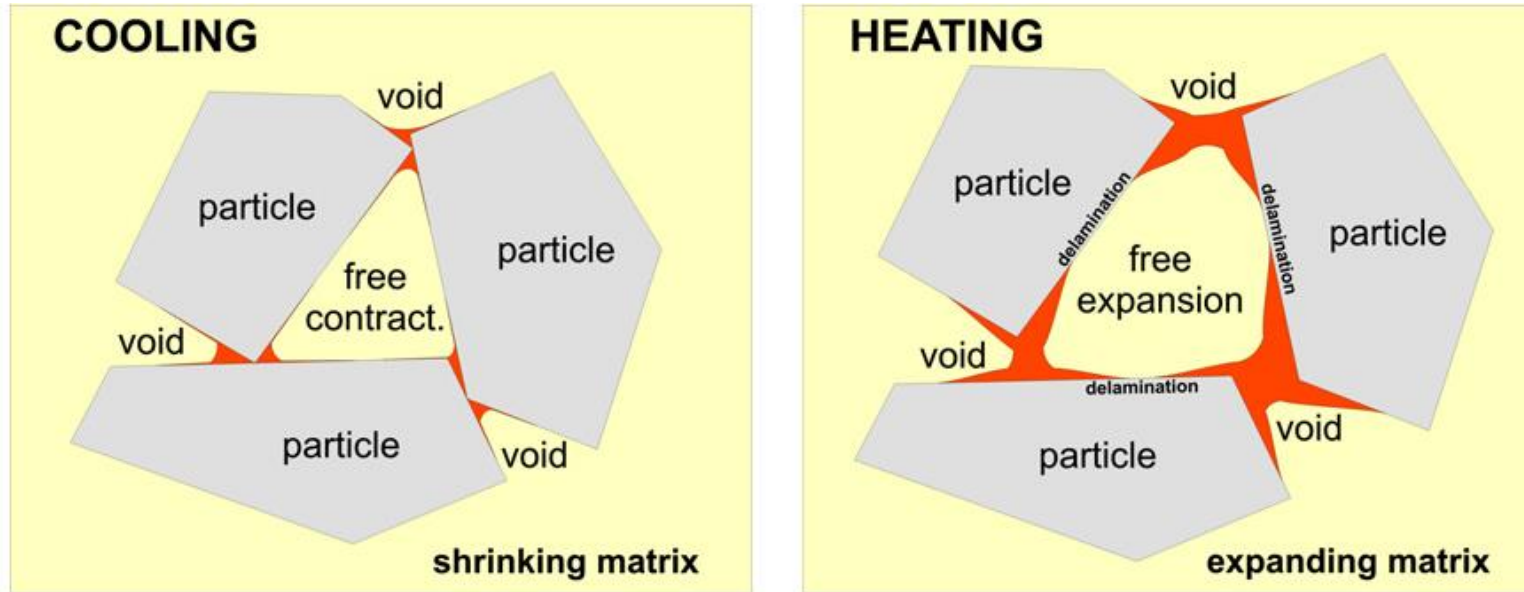
- 4. Bridged flaw
- 5. Air voids without fiber bundles
- 6. Air voids within fiber bundles



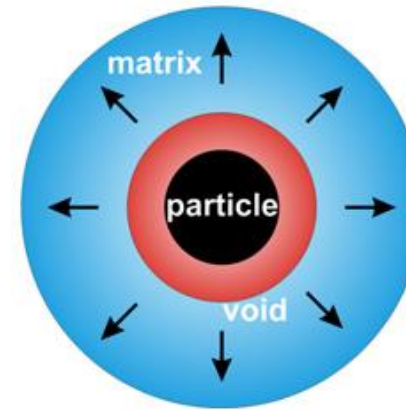
Μετασχηματισμός των κενών λόγω μηχανικής φόρτισης



Επίδραση της θερμοκρασίας στην ανάπτυξη των μικροκενών



expanding void
with
expanding matrix



Η περιεκτικότητα των κενών στην μήτρα

- Άν και μία μικρή αύξηση στην περιεκτικότητα των κενών θα έπρεπε να μην αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα, μία αύξηση της τάξεως του 1-3% της περιεκτικότητας των κενών σε ένα CFRP μπορεί να προκαλέσει μία μείωση των μηχανικών του ιδιοτήτων μέχρι και κατά 20%.
- Η περιεκτικότητα σε κενά μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\text{Void Ratio}(e) = \frac{V_v}{V_t - V_v}$$

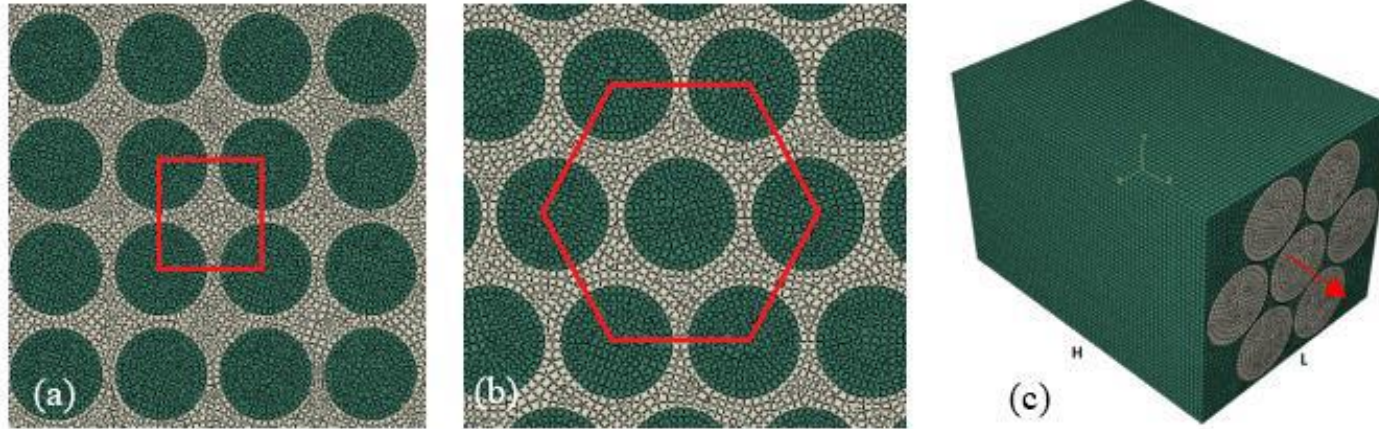
Όπου: V_v = Όγκος των κενών, V_t = Όγκος του συνθέτου

Άλλος τρόπος είναι:

$$\text{Void Fraction} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}}$$

Όπου: ρ_{ct} = Η θεωρητική τιμή της πυκνότητας του συνθέτου
 ρ_{ce} = Η πειραματική τιμή της πυκνότητας του συνθέτου

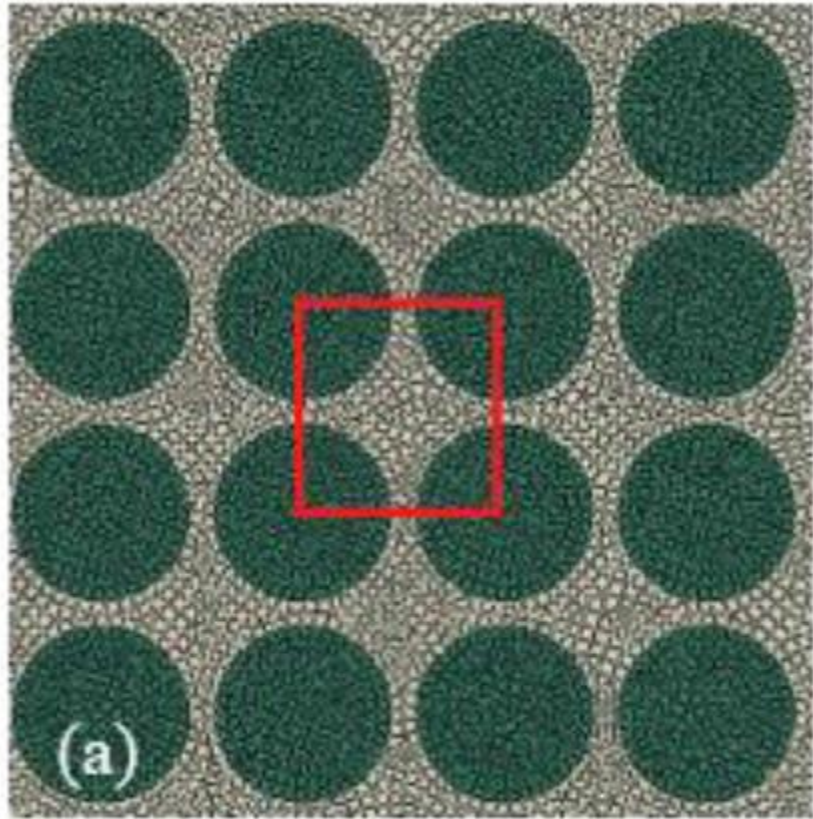
Διατάξεις Ινών



Διακρίνουμε δύο διατάξεις ινών: a) Την τετραγωνική διάταξη και b) Την εξαγωνική διάταξη

Ακτίνα της ίνας = R και απόσταση των κέντρων δύο γειτονικών ινών = $2a$

Γεωμετρία της τετραγωνικής διάταξης



Στην τετραγωνική διάταξη:

- Η απόσταση μεταξύ κέντρων ινών $= 2a$.
- Η μοναδιαία κυψελίδα είναι τετράγωνο πλευράς $2a$.
- Σε κάθε κυψελίδα υπάρχει **μία ίνα** ακτίνας R .

Έτσι:

- **Εμβαδόν κυψελίδας**

$$A_{\text{cell}} = (2a)^2 = 4a^2$$

- **Εμβαδόν ίνας**

$$A_f = \pi R^2$$

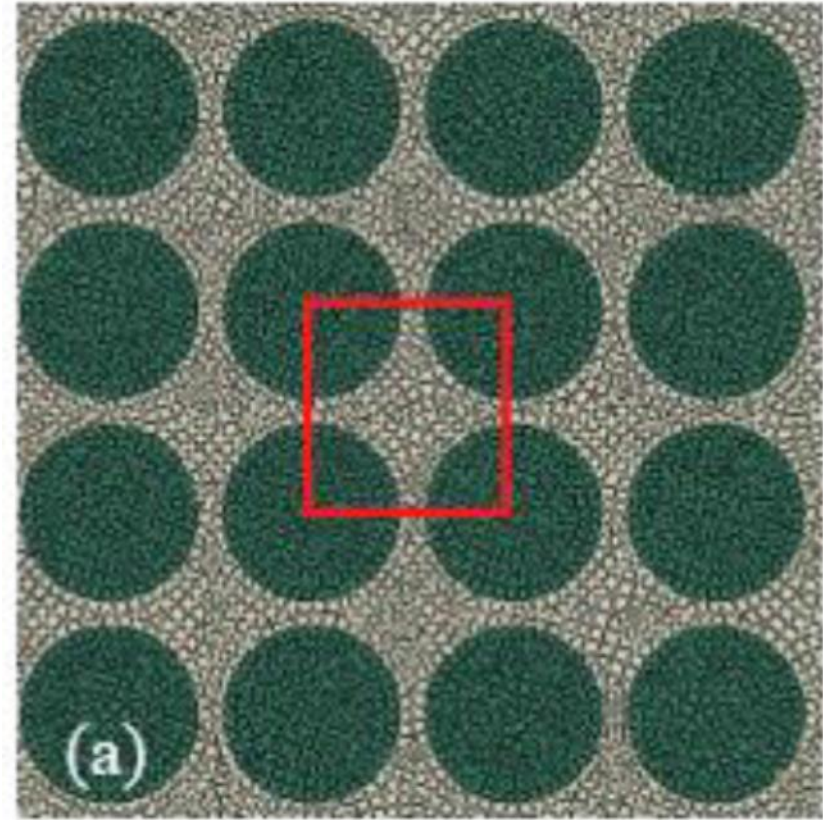
Ορισμός του κλάσματος όγκου (ή επιφάνειας) ινών

Στα UD-FRP σύνθετα το κλάσμα όγκου V_f ισούται με το κλάσμα **επιφάνειας**. Οπότε στην τετραγωνική διάταξη ινών, θα ισχύει:

$$V_f = \frac{A_f}{A_{\text{cell}}} = \frac{\pi R^2}{4a^2}$$

Λύνοντας ως προς $\frac{R^2}{a^2}$:

$$\frac{R^2}{a^2} = \frac{4}{\pi} V_f$$



Μέγιστη τιμή του V_f στην τετραγωνική διάταξη

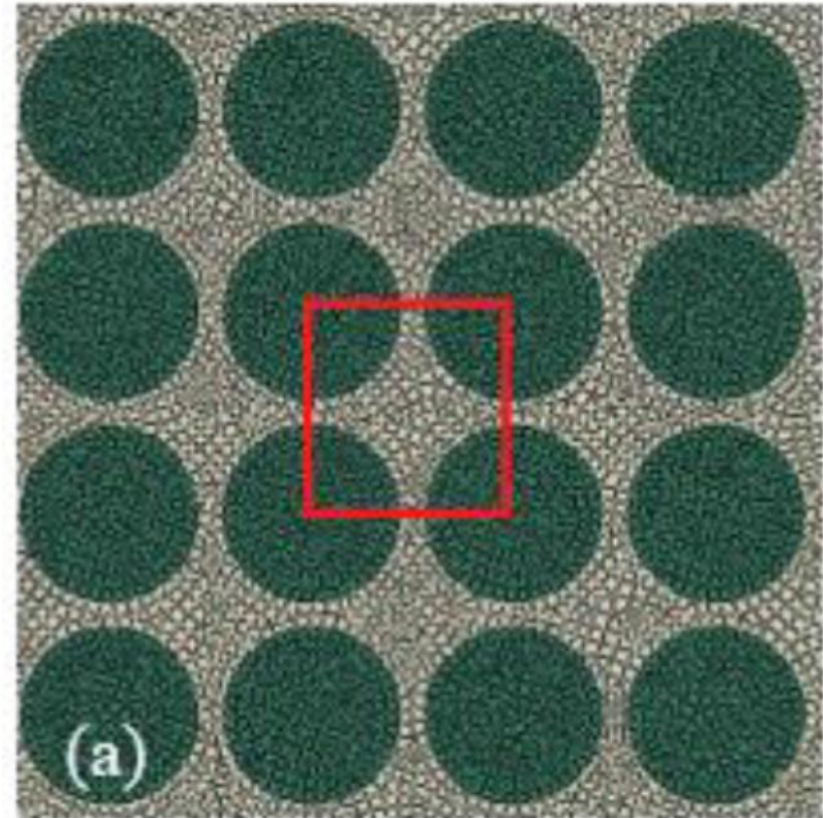
Η μέγιστη τιμή του V_f θα εμφανιστεί όταν οι ίνες
Σε αυτήν την διάταξη θα εφάπτονται μεταξύ τους.
Οπότε, όταν $2a=2R$ ή $a=R$

Από την σχέση

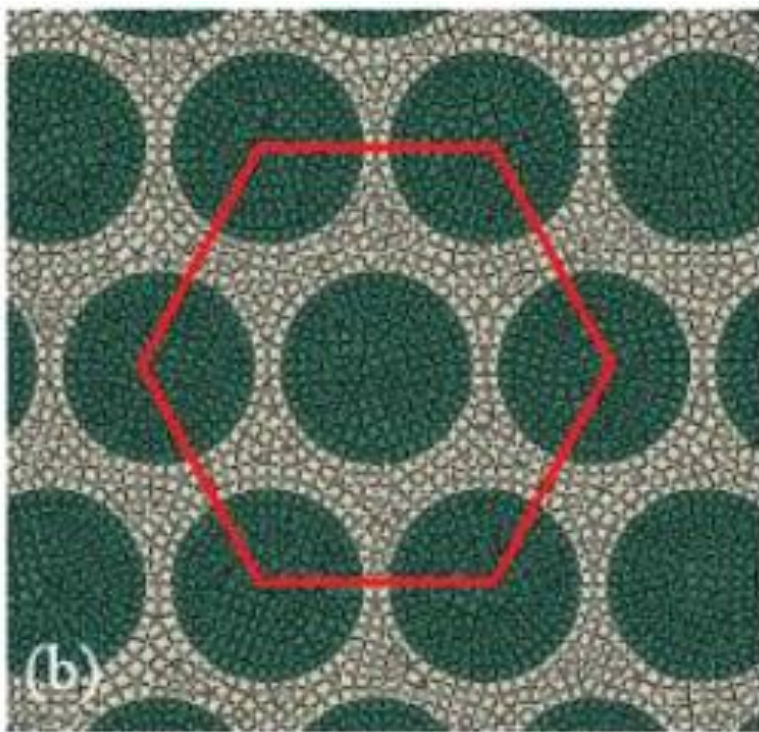
$$V_f = \frac{A_f}{A_{\text{cell}}} = \frac{\pi R^2}{4a^2}$$

Για $a=R$, προκύπτει ότι

$$V_{f\text{max}} = \pi/4 = 0.785 \text{ ή } V_{f\text{max}} = 78.5\%$$



Γεωμετρία της εξαγωνικής διάταξης



Στην εξαγωνική διάταξη:

- Η απόσταση μεταξύ κέντρων ινών $= 2a$.
- Η μοναδιαία κυψελίδα είναι εξάγωνο πλευράς $2a$.
- Κάθετη απόσταση μεταξύ των στρώσεων $= \sqrt{3} \cdot a$

Έτσι:

- **Εμβαδόν κυψελίδας**

$$A_{\text{cell}} = 6\sqrt{3}a^2$$

- **Εμβαδόν ινών**

$$A_f = 3\pi R^2$$

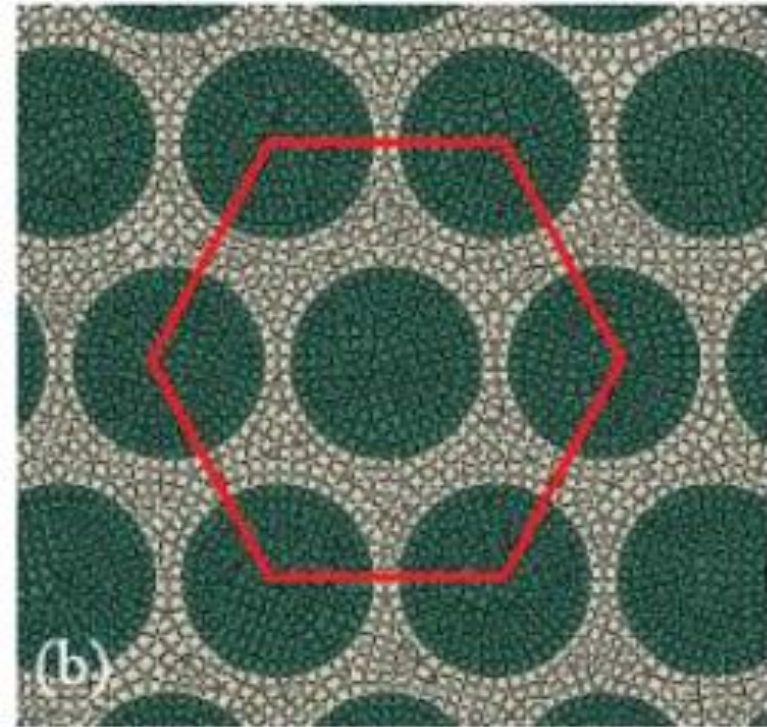
Ορισμός του κλάσματος όγκου (ή επιφάνειας) ινών

Στα UD-FRP σύνθετα το κλάσμα όγκου V_f ισούται με το κλάσμα **επιφάνειας**. Οπότε στην **εξαγωνική διάταξη ινών**, θα ισχύει:

$$V_f = \frac{A_f}{A_{\text{cell}}} = \frac{\pi R^2}{2\sqrt{3} a^2}$$

Λύνουμε ως προς R^2/a^2 :

$$\frac{R^2}{a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_f$$



Μέγιστη τιμή του V_f στην εξαγωνική διάταξη

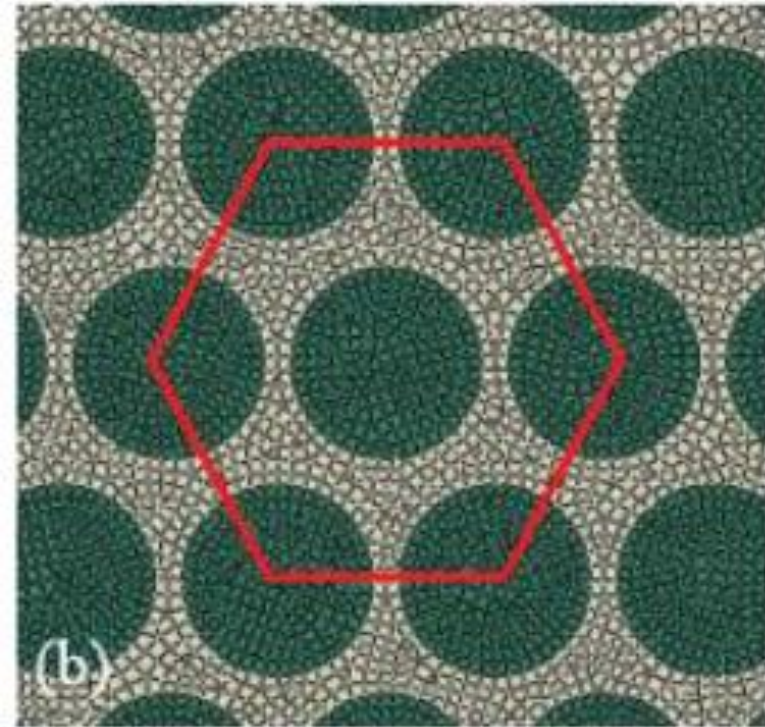
Η μέγιστη τιμή του V_f θα εμφανιστεί όταν οι ίνες σε αυτήν την διάταξη θα εφάπτονται μεταξύ τους. Οπότε, όταν $2a=2R$ ή $a=R$

Από την σχέση

$$V_f = \frac{A_f}{A_{\text{cell}}} = \frac{\pi R^2}{2\sqrt{3} a^2}$$

Για $a=R$, προκύπτει ότι

$$V_{f,\text{max}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.907$$



Το φαινόμενο “Strain Magnification” στα UD-FRP

Το “**strain magnification**” σε ένα UD-FRP σύνθετο με **παράλληλες ίνες σε τετραγωνική διάταξη**, όταν το φορτίο εφελκυσμού εφαρμόζεται **κάθετα προς τις ίνες (transverse loading)**, είναι το εξής φαινόμενο:

Ορισμός

Strain magnification ονομάζεται η **τοπική αύξηση των παραμορφώσεων στη μήτρα** γύρω και μεταξύ των ινών, σε σχέση με τη μέση ή «μακροσκοπική» παραμόρφωση που μετριέται στο σύνθετο υλικό.

Δηλαδή **η μήτρα παραμορφώνεται πολύ περισσότερο** από όσο δείχνει η συνολική (engineering) παραμόρφωση, επειδή οι ίνες έχουν πολύ μεγαλύτερη δυσκαμψία και αναγκάζουν την παραμόρφωση να «συγκεντρώνεται» στις περιοχές της ρητίνης.

Ερμηνεία του φαινομένου

Σε διεύθυνση κάθετη προς τις ίνες:

- Οι ίνες συμπεριφέρονται σαν «άκαμπτοι εγκλωβισμοί».
- Η μήτρα δέχεται σχεδόν όλη την εγκάρσια παραμόρφωση.
- Λόγω της γεωμετρικής ασυνέχειας (τετραγωνική διάταξη ινών), η παραμόρφωση στη μήτρα γίνεται μη ομοιόμορφη, με μέγιστες τιμές στις στενές περιοχές μεταξύ των ινών.
- Έτσι, η τοπική παραμόρφωση στη μήτρα μπορεί να είναι πολλαπλάσια της ονομαστικής παραμόρφωσης που εφαρμόζεται στο σύνολο του δοκιμίου.

Γιατί είναι σημαντικό?

To strain magnification οδηγεί σε:

- τοπικές συγκεντρώσεις τάσεων,
- μικρορρηγμάτωση της μήτρας,
- αποκόλληση ίνας-μήτρας (debonding),
- τελικά θραύση σε εγκάρσιο εφελκυσμό.

Αποτελεί έναν από τους βασικούς λόγους που τα UD σύνθετα είναι πολύ πιο αδύναμα σε εγκάρσια φόρτιση.

Συνοπτικά

Strain magnification = η τοπική ενίσχυση/μεγέθυνση της παραμόρφωσης στη μήτρα λόγω της παρουσίας άκαμπτων ινών σε εγκάρσια φόρτιση.

1. Ορισμός μέσω του συντελεστή συγκέντρωσης παραμόρφωσης

Το strain magnification εκφράζεται με έναν **συντελεστή συγκέντρωσης παραμόρφωσης**:

$$M_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\text{loc}}}{\varepsilon_{\text{avg}}}$$

όπου

- ε_{loc} = μέγιστη τοπική παραμόρφωση στη μήτρα, π.χ. στο στενό διάκενο μεταξύ των ινών,
- ε_{avg} = μακροσκοπική (engineering) παραμόρφωση που εφαρμόζεται στο σύνθετο.

Το $M_{\varepsilon} > 1$ εκφράζει την **ενίσχυση της παραμόρφωσης** στη μήτρα.

2. Θεμελιώδης σχέση από μικρομηχανική (Hashin)

Για ίνες σε **τετραγωνική διάταξη** και εγκάρσια φόρτιση, η μέγιστη παραμόρφωση στη μήτρα προκύπτει από την αναλυτική λύση του Hashin για εγκλωβισμούς κυλινδρικής γεωμετρίας:

$$\varepsilon_{m,\max} = \varepsilon_{22} \left(1 + A \frac{E_f}{E_m} V_f \right)$$

όπου

- ε_{22} = εφαρμοζόμενη εγκάρσια μακροσκοπική παραμόρφωση,
- V_f = κλάσμα όγκου ινών,
- E_f, E_m = εγκάρσια μέτρα ελαστικότητας ίνας και μήτρας,
- A = γεωμετρικός συντελεστής που εξαρτάται από τη διάταξη (για **τετραγωνική** ≈ 1.25 – 1.35).

Τότε:

$$M_\varepsilon = 1 + A \frac{E_f}{E_m} V_f$$

3. Απλή μορφή για υψηλό λόγο δυσκαμψίας ($E_f \gg E_m$)

Σε πολλά FRP, στην εγκάρσια διεύθυνση ισχύει:

$$E_f^\perp \gg E_m$$

οπότε:

$$M_\varepsilon \approx AV_f \frac{E_f}{E_m}$$

Άρα η μεγέθυνση παραμόρφωσης είναι **αναλογική** με:

- τον λόγο δυσκαμψίας (E_f/E_m),
- το κλάσμα όγκου ινών V_f ,
- τη γεωμετρία των διακένων (μέσω του A).

4. Τοπική κατανομή παραμόρφωσης (περιγραφή)

Αν λύσουμε το μικρομηχανικό κυψελοειδές μοντέλο (unit cell):

Για τετραγωνική διάταξη ινών ακτίνας R και απόσταση μεταξύ κέντρων $2a$:

$$\varepsilon_m(r, \theta) = \varepsilon_{22} \left[1 + \left(\frac{E_f - E_m}{E_m} \right) \left(\frac{R^2}{a^2 - R^2} \right) \cos(2\theta) \right]$$

Η μέγιστη παραμόρφωση εμφανίζεται στη διεύθυνση φόρτισης ($\theta = 0$):

$$\varepsilon_{m,\max} = \varepsilon_{22} \left[1 + \left(\frac{E_f - E_m}{E_m} \right) \left(\frac{R^2}{a^2 - R^2} \right) \right]$$

Από αυτό προκύπτει:

$$M_\varepsilon = 1 + \left(\frac{E_f - E_m}{E_m} \right) \left(\frac{R^2}{a^2 - R^2} \right)$$

Η ποσότητα $\frac{R^2}{a^2 - R^2}$ συνδέεται άμεσα με το V_f .

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

Το strain magnification στο εγκάρσιο εφελκυόμενο UD-FRP περιγράφεται ποσοτικά με έναν **συντελεστή M** που εκφράζει πόσες φορές η τοπική παραμόρφωση στη μήτρα υπερβαίνει τη μακροσκοπική.

Η γενική μαθηματική μορφή είναι:

$$M_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{m,\max}}{\varepsilon_{22}} = 1 + \left(\frac{E_f - E_m}{E_m}\right)f(\text{διάταξη}, V_f)$$

με f να παίρνει κλειστή μορφή για τετραγωνική διάταξη όπως δόθηκε παραπάνω.

Η ποσότητα $\frac{R^2}{a^2 - R^2}$ συνδέεται άμεσα με το V_f .

Στην τετραγωνική διάταξη ινών, η σχέση μεταξύ της γεωμετρικής ποσότητας

$$\frac{R^2}{a^2 - R^2}$$

και του κλάσματος όγκου των ινών V_f προκύπτει απευθείας από τη γεωμετρία της μοναδιαίας κυψελίδας (unit cell).

Τελική σχέση στην τετραγωνική διάταξη

$$\frac{R^2}{a^2 - R^2} = \frac{\frac{4}{\pi} V_f}{1 - \frac{4}{\pi} V_f}$$

Αυτή είναι η ακριβής σύνδεση της γεωμετρικής ποσότητας με το κλάσμα όγκου σε **τετραγωνική διάταξη ινών**.

Ποια η Φυσική Σημασία?

- Όσο μεγαλύτερο είναι το V_f , τόσο μικρότερο το διάκενο μήτρας γύρω από τις ίνες.
- Η ποσότητα $\frac{R^2}{a^2 - R^2}$ **αυξάνει πολύ γρήγορα** καθώς το V_f πλησιάζει το μέγιστο πακετάρισμα (≈ 0.785 για τετραγωνική διάταξη).
- Αυτό εξηγεί γιατί το **strain magnification** αυξάνει απότομα για υψηλά V_f .

Τελική σχέση για εξαγωνική διάταξη

$$\frac{R^2}{a^2 - R^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_f}{1 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_f}$$

Σημαντικές παρατηρήσεις

Μέγιστο V_f στην εξαγωνική διάταξη

Η πυκνότερη συσκευασία κυκλικών εγκλωβισμών δίνει:

$$V_{f,\max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.907$$

Αντικαθιστώντας:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_{f,\max} = 1$$

→ Η ποσότητα $R^2/(a^2 - R^2)$ τείνει στο **άπειρο** καθώς το V_f πλησιάζει το 0.907.

Σύγκριση με τετραγωνική διάταξη

Σύγκριση με τετραγωνική διάταξη

- Τετραγωνική:

$$\frac{R^2}{a^2 - R^2} = \frac{(4/\pi)V_f}{1 - (4/\pi)V_f} (V_{f,\max} = 0.785)$$

- Εξαγωνική:

$$\frac{R^2}{a^2 - R^2} = \frac{(2\sqrt{3}/\pi)V_f}{1 - (2\sqrt{3}/\pi)V_f} (V_{f,\max} = 0.907)$$

Η εξαγωνική διάταξη έχει:

- μεγαλύτερο μέγιστο V_f ,
- μικρότερη γεωμετρική «ποινή» στη συγκέντρωση παραμόρφωσης,
- άρα μικρότερο strain magnification.

Προσδιορισμός του Διαμήκους Μέτρου Ελαστικότητας E_1



Υποθέσεις

1. Η μήτρα και οι ίνες είναι ομογενή και ισότροπα υλικά
2. Οι ίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους
3. Η μήτρα και οι ίνες συμπεριφέρονται γραμμικά ελαστικά
4. Η πρόσφυση ίνας-μήτρας είναι τέλεια σε όλο το μήκος της ίνας
5. Οι ίνες και η μήτρα έχουν τον ίδιο λόγο του Poisson
6. Οι ίνες, η μήτρα και το σύνθετο έχουν την ίδια διαμήκη παραμόρφωση

Προσδιορισμός του Διαμήκους Μέτρου Ελαστικότητας E_1



Το φορτίο αναλαμβάνεται από την μήτρα και τις ίνες. Άρα:

$$P_c = P_f + P_m \Rightarrow$$

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

Κάνοντας χρήση της υπόθεσης της γραμμικής ελαστικής συμπεριφοράς, προκύπτει:

$$E_c \varepsilon_c A_c = E_f \varepsilon_f A_f + E_m \varepsilon_m A_m \Rightarrow E_c = E_f \left(\frac{\varepsilon_f A_f}{\varepsilon_c A_c} \right) + E_m \left(\frac{\varepsilon_m A_m}{\varepsilon_c A_c} \right) \Rightarrow$$

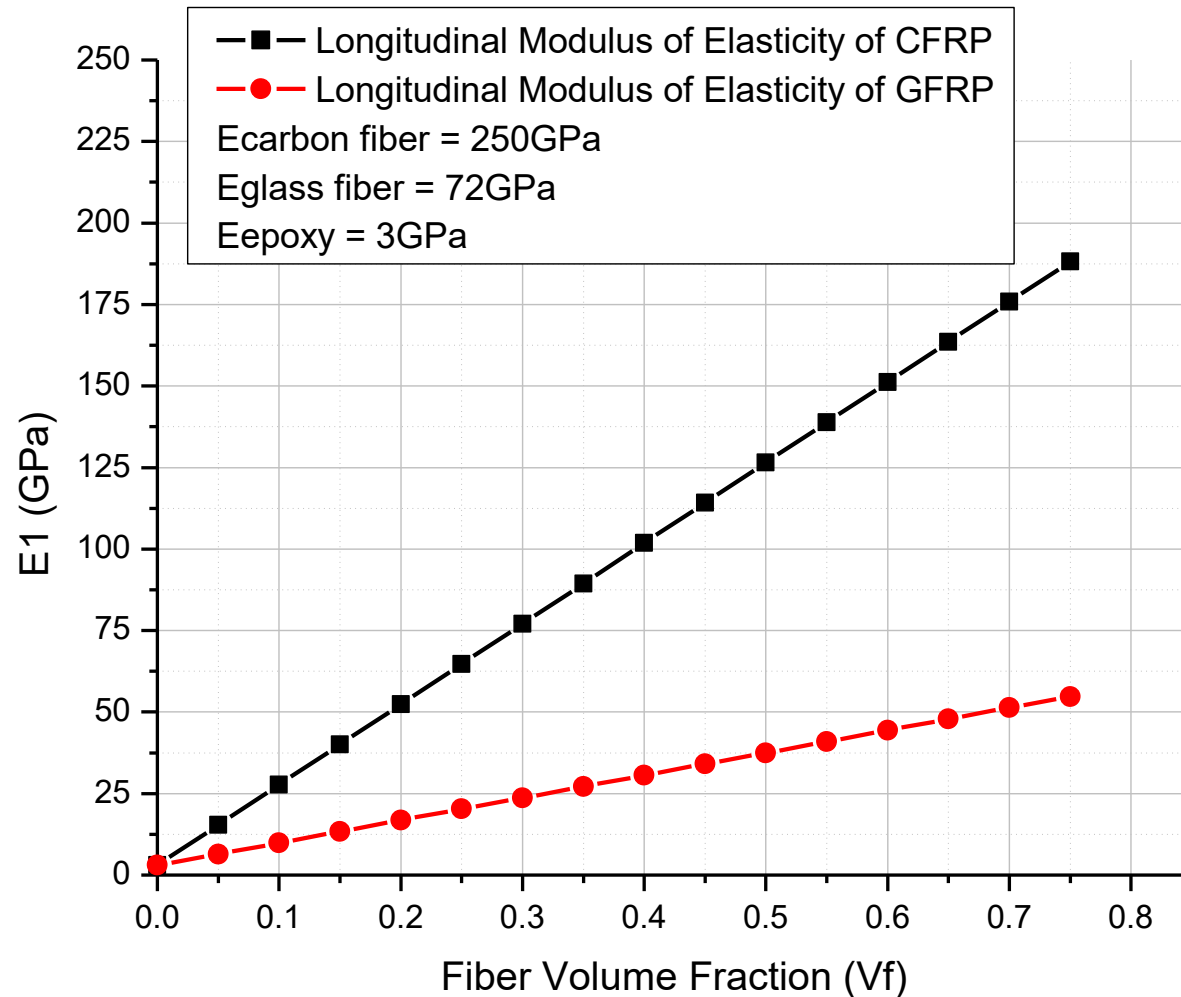
Αλλά από την υπόθεση της ίσης παραμόρφωσης (isostrain): $\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m \Rightarrow$

$$E_l \equiv E_c = E_f V_f + E_m V_m \Rightarrow \boxed{E_l \equiv E_c = E_f V_f + E_m (1 - V_f)} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_c = \sum_{i=1}^N E_i V_i}$$

$$\boxed{E_l \equiv E_c = (E_f - E_m) V_f + E_m}$$

Μεταβολή του E_1 συναρτήσει του V_f για το CFRP και GFRP



(V_f)	E_1 CFRP (GPa)	E_1 GFRP (GPa)
0	3	3
0.05	15.35	6.45
0.1	27.7	9.9
0.15	40.05	13.35
0.2	52.4	16.8
0.25	64.75	20.25
0.3	77.1	23.7
0.35	89.45	27.15
0.4	101.8	30.6
0.45	114.15	34.05
0.5	126.5	37.5
0.55	138.85	40.95
0.6	151.2	44.4
0.65	163.55	47.85
0.7	175.9	51.3
0.75	188.25	54.75

Προσδιορισμός της Αντοχής κατά την Διαμήκη Διεύθυνση



$$P_c = P_f + P_m \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_c = \sigma_f \frac{A_f}{A_c} + \sigma_m \frac{A_m}{A_c} \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)$$

Φέρουσα Ικανότητα των Ινών

Οι ίνες, η μήτρα και το σύνθετο έχουν την ίδια διαμήκη παραμόρφωση



$$\varepsilon_c = \varepsilon_m = \varepsilon_f \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_f}{E_f} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_m} = \frac{E_f}{E_m} \quad \text{και} \quad \frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \frac{E_f}{E_c}$$

$$\frac{P_f}{P_m} = \frac{\sigma_f A_f}{\sigma_m A_m} = \frac{(E_f \varepsilon_f) \cdot A_f / A_c}{(E_m \varepsilon_m) \cdot A_m / A_c} \Rightarrow$$

$$\frac{P_f}{P_m} = \frac{E_f V_f}{E_m V_m}$$

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{\sigma_f A_f}{\sigma_c A_c} = \frac{\sigma_f V_f}{\sigma_f V_f + \sigma_m V_m} = \frac{E_f \varepsilon \cdot V_f}{E_f \varepsilon \cdot V_f + E_m \varepsilon \cdot V_m} \Rightarrow$$

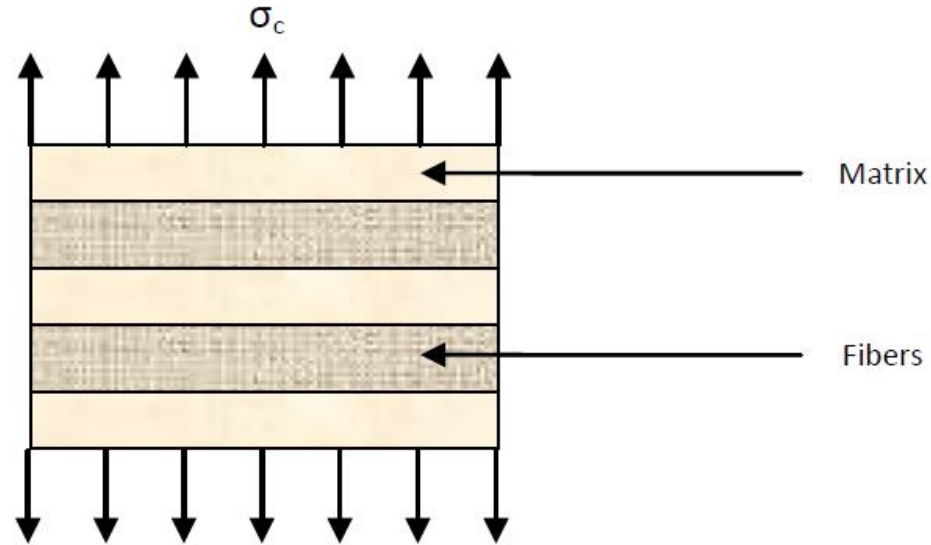
$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{E_f V_f}{E_f V_f + E_m V_m} \Rightarrow$$

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{\frac{E_f}{E_m}}{\frac{E_f}{E_m} + \frac{V_m}{V_f}}$$

Άρα, η φέρουσα ικανότητα των ινών εξαρτάται από τα μέτρα ελαστικότητας και την περιεκτικότητα σε ίνες και μήτρα.

Προσδιορισμός του Εγκάρσιου μέτρου Ελαστικότητας

Υποθέσεις:



1. Οι ίνες έχουν την ίδια διάμετρο και είναι ομογενείς και ισότροπες
2. Οι ίνες είναι συνεχείς και παράλληλες μεταξύ τους
3. Υπάρχει τέλεια πρόσφυση ίνας-μήτρας
4. Οι ίνες και η μήτρα συνιστούν παράλληλες στρώσεις που η κάθε μία φέρει το ίδιο φορτίο.
5. Οι ίνες και η μήτρα συμπεριφέρονται γραμμικά ελαστικά.

Άρα:

$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_c$$

Το πάχος του συνθέτου ισούται με το άθροισμα των παχών των ινών και της μήτρας. $t_c = t_f + t_m$

Η επιμήκυνση του συνθέτου ισούται με το άθροισμα των επιμηκύνσεων των ινών και της μήτρας.

$$\delta_c = \delta_f + \delta_m \Rightarrow \varepsilon_c t_c = \varepsilon_f t_f + \varepsilon_m t_m \Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_f \frac{t_f}{t_c} + \varepsilon_m \frac{t_m}{t_c} \Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m V_m \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_f}{E_f} V_f + \frac{\sigma_m}{E_m} V_m \quad \text{αλλά}$$

$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{E_{CT}} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \Rightarrow$$

$$E_{CT} = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}$$

$\Rightarrow$

$$E_{CT} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{V_i}{E_i}}$$

Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

- Όπως είδαμε, τα μακρόινα σύνθετα με παράλληλες ίνες, παρουσιάζουν υψηλή δυσκαμψία κατά την διαμήκη διεύθυνση και μικρή κατά την εγκάρσια προς τις ίνες διεύθυνση. Η μικρή δυσκαμψία κατά την εγκάρσια διεύθυνση οφείλεται σε δύο λόγους:
 1. Κατά την διεύθυνση αυτή, η μηχανική συμπεριφορά του συνθέτου κυριαρχείται από τις ιδιότητες της μήτρας, και
 2. Στην διεπιφάνεια ίνας-μήτρας αναπτύσσονται συγκεντρώσεις τάσεων.
- Με βάση τα παραπάνω, η χρήση των μακρόινων συνθέτων υλικών με παράλληλες ίνες είναι κατάλληλη σε εφαρμογές όπου είναι γνωστό το πεδίο των φορτίων που εφαρμόζονται πάνω σε αυτά. Εξάλλου, σε αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατό με κατάλληλη διαστρωμάτωση των στρώσεων του πολύστρωτου, το σύνθετο να μπορεί να φέρει με επιτυχία τα εξωτερικά εφαρμοζόμενα φορτία.
- Σε περιπτώσεις όμως όπου τα εξωτερικά φορτία είναι είτε διαφόρων διευθύνσεων ή μεταβάλλονται με τον χρόνο τότε τα πολύστρωτα με στρώσεις UD μπορεί να μην είναι τα κατάλληλα για την συγκεκριμένη εφαρμογή.

Κοντόινα Σύνθετα Υλικά (2)

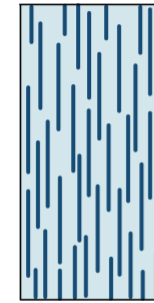
- Ακόμα και στις περιπτώσεις όπου είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε πολύστρωτα με ίση αντοχή σε όλες τις διευθύνσεις, και πάλι, η πρώτη αλλά και η τελευταία στρώση (δηλ. οι εξωτερικές στρώσεις), είναι δυνατόν να αστοχήσουν κατά την εγκάρσια διεύθυνση, οπότε αυτό θα σημάνει και την έναρξη της αστοχίας του πολύστρωτου από αυτές τις στρώσεις.
- Έτσι, σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε στρώσεις με επίπεδη ισοτροπία (in-plane isotropy).
- Μία μέθοδος να κατασκευάσουμε μία τέτοια στρώση είναι η ενίσχυση με ίνες μικρού μήκους τυχαίας διεύθυνσης. Αυτά τα σύνθετα έχουν μικρότερο κόστος παραγωγής σε σύγκριση με τα UD μακρόινα. Το μήκος των ινών κυμαίνεται μεταξύ 1 και 8cm.
- Τα κοντόινα σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές στην κατασκευή αντικειμένων καθημερινής χρήσεως, στην αυτοκινητοβιομηχανία, στην ναυπηγική και σε άλλα. Συνήθως, για την ενίσχυση της μήτρας, χρησιμοποιούνται ίνες γυαλιού.

Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

- Στα σύνθετα υλικά, οι ίνες περιβάλλονται από την μήτρα. Τα φορτία μεταφέρονται από την μήτρα στην ίνα μέσω της διεπιφάνειας.
- Ένα μέρος του φορτίου παραλαμβάνεται από τα άκρα της ίνας ενώ ένα άλλο από την παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια της ίνας.
- Στα μακρόινα σύνθετα υλικά, το μέρος του φορτίου που παραλαμβάνεται από τα άκρα της ίνας είναι πολύ μικρό σε σχέση με αυτό που παραλαμβάνεται από την παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια.
- Αυτό συμβαίνει διότι η παράπλευρη επιφάνεια επαφής ίνας-μήτρας είναι απείρως μεγαλύτερη από αυτήν των άκρων. Έτσι, στα μακρόινα σύνθετα, τα φορτία των άκρων της ίνας δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στον μηχανισμό μεταφοράς του φορτίου.

Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

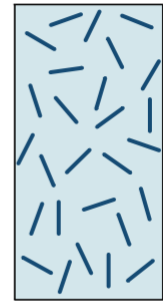
- Στα κοντόινα σύνθετα υλικά, σε αντίθεση με τα μακρόινα, το φορτίο που φέρουν τα άκρα των ινών δεν είναι αμελητέο.
- Έτσι τα άκρα των ινών μικρού μήκους, παίζουν σημαντικό ρόλο στον μηχανισμό μεταφοράς του φορτίου από την μήτρα στην ίνα.
- Επομένως, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τον μηχανισμό μεταφοράς του φορτίου στα κοντόινα σύνθετα, λαμβάνοντας υπόψιν τα άκρα, αν θέλουμε να μην οδηγηθούμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα.



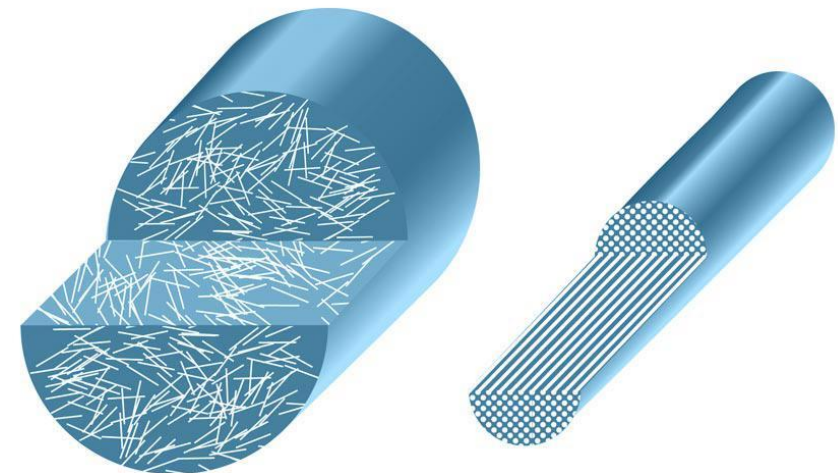
(a)



(b)



(c)



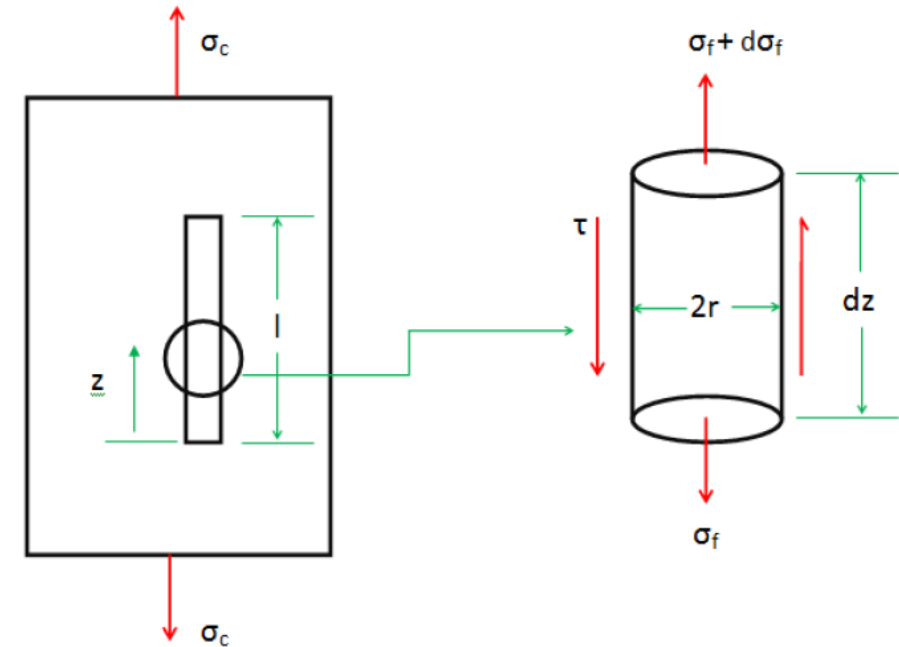
Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

Ας υποθέσουμε μία ίνα μικρού μήκους, ενσωματωμένη μέσα σε μία συνεχή μήτρα. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι στο όλο σύστημα εφαρμόζεται ένα εξωτερικό διάμηκες φορτίο το οποίο παράγει μία τάση σ_c .

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθής τάσης σ_f στην ίνα.

Θεωρούμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος της ίνας, μήκους dz .

Η μεταβολή της ορθής τάσης κατά μήκος της ίνας, προκύπτει από την μεταφορά του φορτίου από την μήτρα στην ίνα μέσω της διεπιφάνειας, λόγω της ανάπτυξης διεπιφανειακών διατμητικών τάσεων τ .



Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

Στατική Ισορροπία του στοιχειώδους κυλίνδρου:

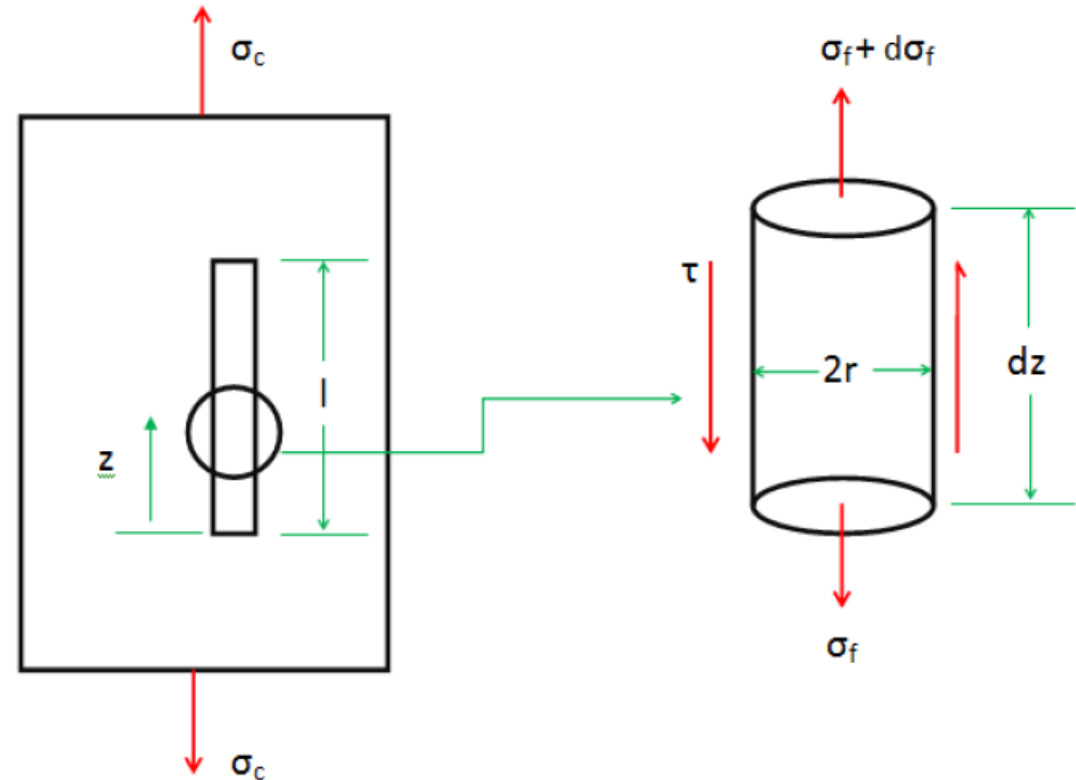
$$\pi r^2 \sigma_f + 2\pi r \tau dz = \pi r^2 \cdot (\sigma_f + d\sigma_f) \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = \frac{2\tau}{r} \Rightarrow \sigma_f = \sigma_{f0} + \frac{2}{r} \int_0^z \tau(z) \cdot dz$$

Συνήθως, λόγω της συγκέντρωσης των τάσεων στα άκρα, συμβαίνει αποκόλληση της ίνας από την μήτρα στα σημεία αυτά, ή διαρροή της μήτρας. Και στις δύο περιπτώσεις, $\sigma_{f0} = 0$

Επομένως,

$$\sigma_f = \frac{2}{r} \int_0^z \tau(z) \cdot dz$$



Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

$$\sigma_f = \frac{2}{r} \int_0^z \tau(z) \cdot dz$$

Το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης μπορεί να υπολογιστεί μόνο εάν είναι γνωστή η συνάρτηση $\tau(z)$. Δηλαδή, μόνο αν είναι γνωστός ο νόμος μεταβολής της διατμητικής τάσης στην διεπιφάνεια κατά μήκος της ίνας.

Στο σημείο αυτό, θα κάνουμε την **υπόθεση** ότι η **διεπιφανειακή διατμητική τάση κατά μήκος της ίνας παραμένει σταθερή και ίση με την τάση διαρροής της μήτρας τ_y** . Αυτή η υπόθεση είναι δυνατόν να γίνει, μόνο αν υποθέσουμε ότι η μήτρα μεταφέρει στην ίνα την μέγιστη δυνατή τάση, η οποία είναι η τ_y . Κάτω από αυτές τις συνθήκες η τελευταία εξίσωση γράφεται:

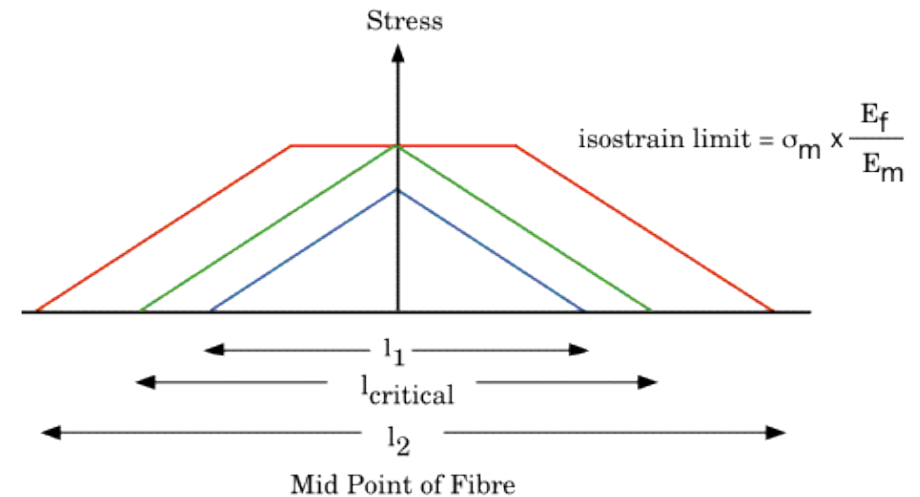
$$\tau(z) = \tau_y = \text{σταθερό}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_f = 2\tau_y \frac{z}{r}$$

Στις ίνες μικρού μήκους, λόγω συμμετρίας, η μέγιστη ορθή τάση αναπτύσσεται στο μέσο της ίνας, δηλαδή για $z=l/2$. $\Rightarrow$

$$\sigma_{f \max} = \tau_y \frac{l}{r}$$



Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

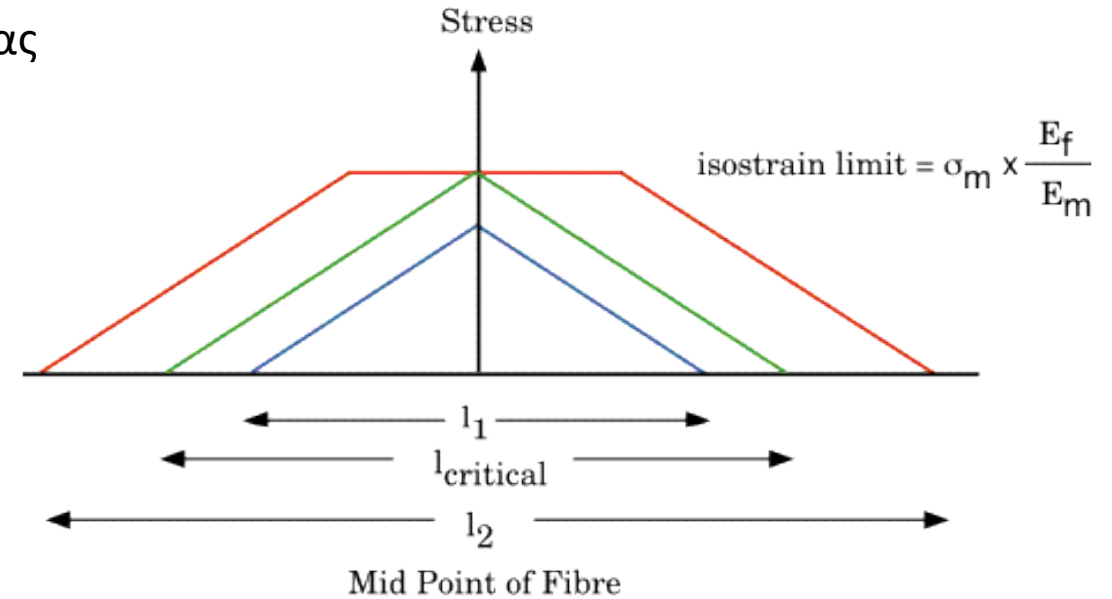
Συμπερασματικά, η μέγιστη ορθή τάση στην ίνα εμφανίζεται στο μέσον της ίνας, ενώ στα άκρα είναι μηδέν. Επίσης, το διάγραμμα μεταβολής της ορθής τάσης κατά μήκος της ίνας είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα y .

$$\text{Για } z = l/2 \Rightarrow \sigma_{f \max} = \tau_y \frac{l}{r}$$

$$\text{Για } z = 0 \text{ και } z = l \Rightarrow \sigma_f = 0$$

Επίσης, η εξίσωση

$$\sigma_f = 2\tau_y \frac{z}{r}$$



δεν θέτει κανένα άνω όριο και μπορεί να είναι τόσο πιο υψηλό όσο το μήκος της ίνας αυξάνει. Όμως, για ίνες μικρού μήκους, ένα άνω όριο υπάρχει και είναι αυτό που αντιστοιχεί στην τιμή της τάσης για την οποία $\varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon_f$:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f \Rightarrow \frac{\sigma_{f \max}}{E_f} = \frac{\sigma_c}{E_c} \Rightarrow$$

$$\sigma_{f \max} = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c = \frac{E_f}{E_m} \sigma_m$$

Μηχανισμός Μεταφοράς Φορτίου στα Κοντόινα Σύνθετα Υλικά

Ορίζουμε **ελάχιστο μήκος ίνας** (*minimum fiber length*), ως το **ενεργό μήκος της ίνας** (*load transfer length*) κατά μήκος του οποίου μεταφέρεται φορτίο και στο οποίο, όταν η τάση που αναπτύσσεται στο σύνθετο είναι σ_c , η μέγιστη ορθή τάση που αναπτύσσεται σε αυτό, είναι $\sigma_{f \max}$.

Έτσι, από την σχέση:

$$\boxed{\sigma_{f \max} = \tau_y \frac{l}{r}} \Rightarrow \text{Minimum fiber length, } l_t = \frac{\sigma_{f \max}}{\tau} \frac{d}{2} = \frac{\frac{E_f}{E_c} \sigma_c}{2\tau} d \Rightarrow \boxed{l_t = \frac{\sigma_{f \max}}{\tau} \frac{d}{2}} \quad \text{ή}$$

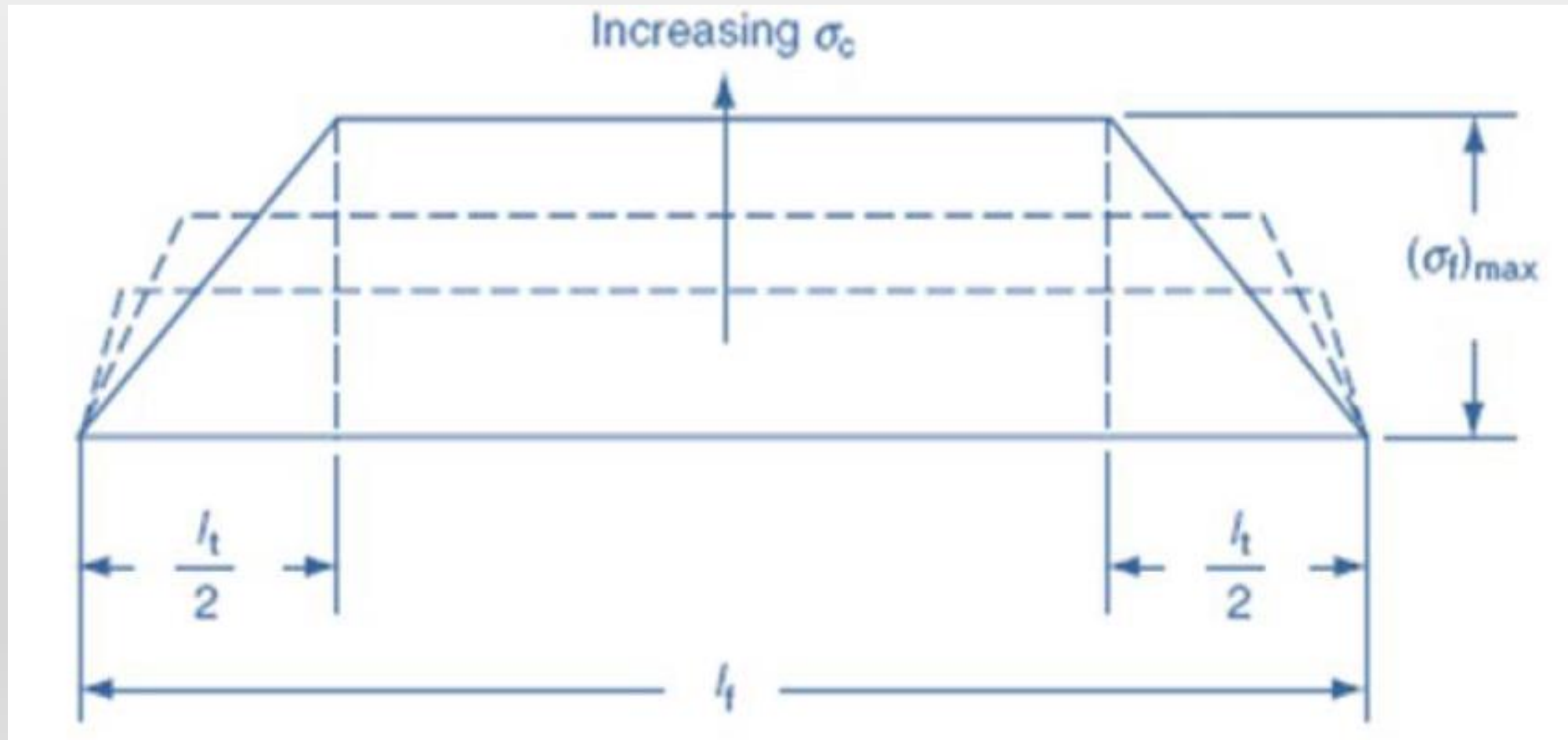
$$\text{Minimum fiber length, } \boxed{l_t = \left(\frac{E_f}{E_c} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_c}{2\tau} \right) d} \quad \text{Όπου } d = \text{διάμετρος της ίνας}$$

Ορίζουμε **κρίσιμο μήκος ίνας** (*critical fiber length*), ως το **ελάχιστο μήκος της ίνας** (*minimum fiber length*) κατά μήκος του οποίου μεταφέρεται φορτίο και στο οποίο, όταν η τάση που αναπτύσσεται στο σύνθετο είναι σ_c , η μέγιστη ορθή τάση που αναπτύσσεται σε αυτό, είναι ίση με την τάση αστοχίας της ίνας σ_{fu} .
Έτσι, από την σχέση:

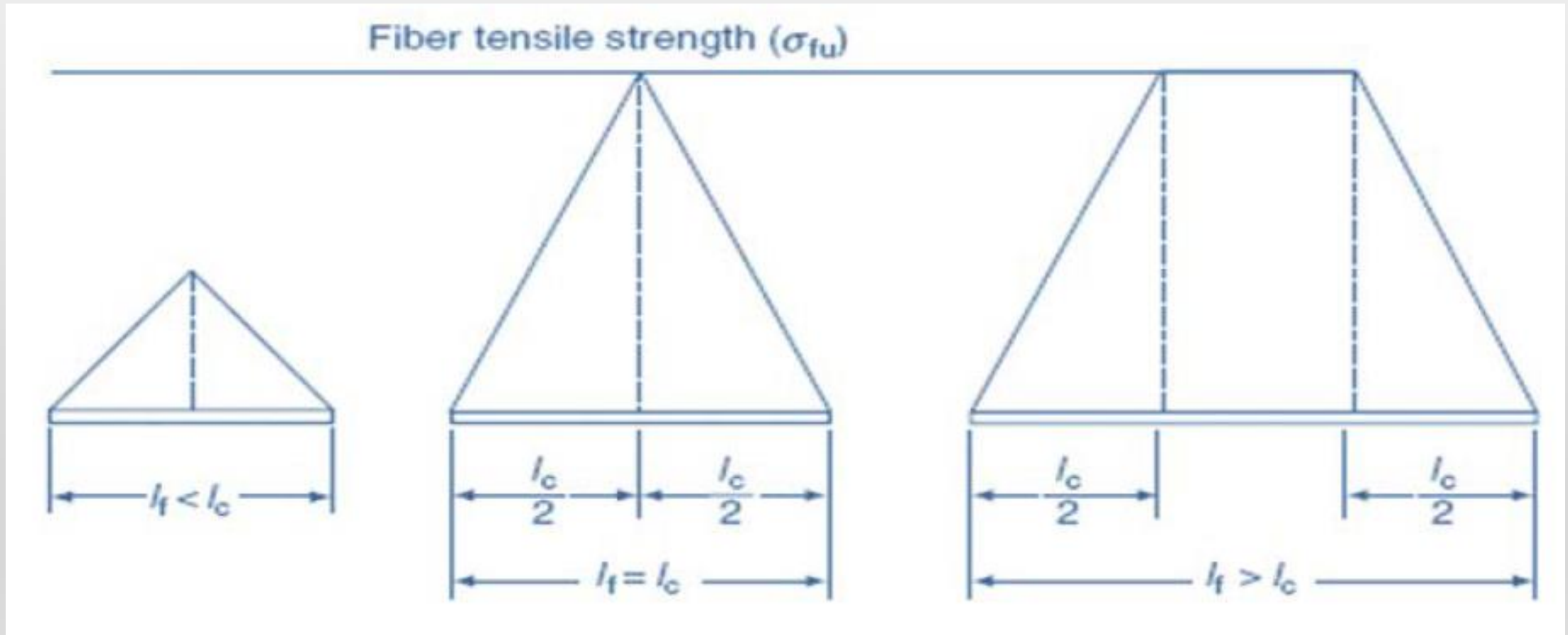
$$\boxed{l_c = \frac{\sigma_{fu}}{\tau} \frac{d}{2}}$$

Παρατήρηση: Το ελάχιστο μήκος εξαρτάται από την τάση σ_c ενώ το κρίσιμο μήκος δεν εξαρτάται από το σ_c

Κατανομή των ορθών τάσεων κατά μήκος της ίνας για αυξανόμενο επιβαλλόμενο φορτίο στο σύνθετο



Κατανομή των ορθών τάσεων κατά μήκος της ίνας για αυξανόμενο μήκος ίνας



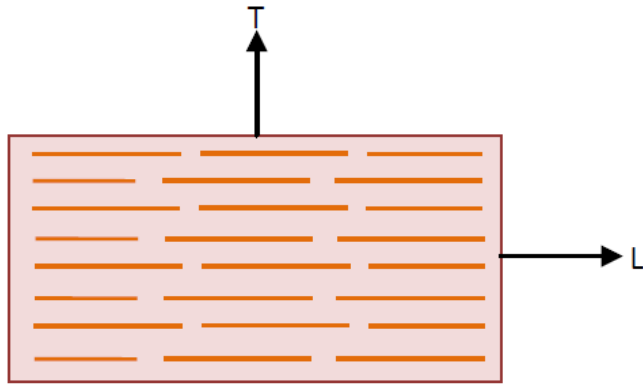
Κατανομή των ορθών τάσεων κατά μήκος της ίνας για αυξανόμενο μήκος ίνας

Από τις γραφικές παραστάσεις της κατανομής των ορθών τάσεων κατά μήκος της ίνας, παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Για $l_f < l_c$, η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην ίνα θα είναι πάντα μικρότερη της τάσης αστοχίας της ίνας. Αυτό σημαίνει ότι η αστοχία του συνθέτου θα συμβεί είτε στην διεπιφάνεια ίνας – μήτρας, ή θα προηγηθεί η αστοχία της μήτρας.
2. Για $l_f > l_c$, η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην ίνα θα είναι ίση με την τάση αστοχίας της ίνας σε ένα τμήμα του μήκους της, αλλά στα δύο άκρα και μέχρι την απόσταση $l_c/2$ η τάση στην ίνα είναι μικρότερη της τάσης αστοχίας της ίνας.
3. Για την ενεργή χρήση των ινών απαιτούνται μήκη ινών $l_f \gg l_c$
4. Για δεδομένα διάμετρο και αντοχή της ίνας, το κρίσιμο μήκος της μπορεί να ρυθμιστεί μεταβάλλοντας την διατμητική τάση τ . Για παράδειγμα, μία επικάλυψη της ίνας, που να είναι όμως συμβατή με την μήτρα, μπορεί να αυξήσει την διατμητική τάση τ , και επομένως να μειώσει το κρίσιμο l_c .
5. Επομένως, αν μειώσουμε το κρίσιμο μήκος της ίνας διατηρώντας το πραγματικό μήκος της, κάνοντας χρήση ειδικής επικάλυψης των ινών, τότε μπορούμε να επιτύχουμε δραστική αύξηση του ενεργού μήκους της ίνας.

Πρόβλεψη του μέτρου Ελαστικότητας κοντόινων συνθέτων υλικών με παράλληλες ίνες

Οι εξισώσεις Halpin-Tsai είναι εμπειρικές και προβλέπουν το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο Ελαστικότητας κοντόινων σύνθετων υλικών με παράλληλες ίνες



$$E_L = \frac{1 + 2 \left(\frac{l_f}{d_f} \right) \eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} E_m$$

$$E_T = \frac{1 + 2 \eta_T V_f}{1 - \eta_T V_f} E_m$$

$$G_{LT} = \frac{1 + \eta_G V_f}{1 - \eta_G V_f} G_m$$

$$\nu_{LT} = V_f \nu_f + V_m \nu_m$$

Όπου:

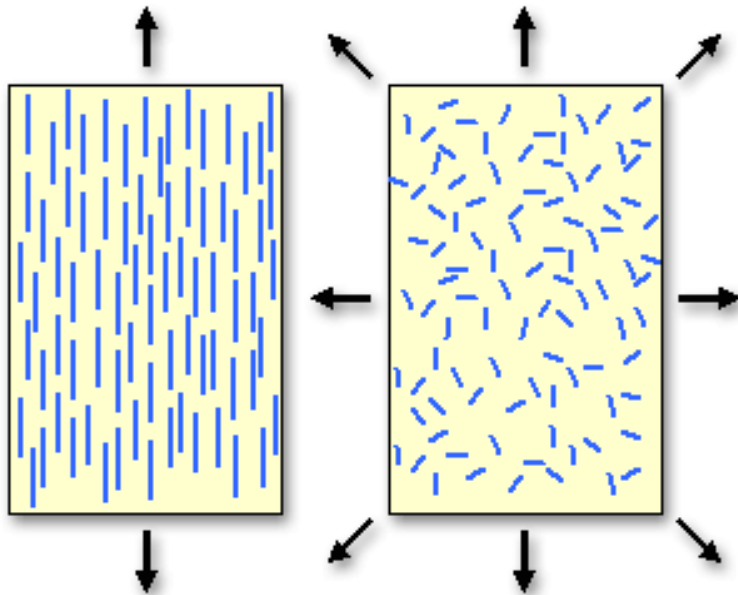
$$\eta_L = \frac{E_f / E_m - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2 \left(\frac{l_f}{d_f} \right)}$$

$$\eta_T = \frac{E_f / E_m - 1}{E_f / E_m + 2}$$

$$\eta_G = \frac{G_f / G_m - 1}{G_f / G_m + 1}$$

Πρόβλεψη του μέτρου Ελαστικότητας κοντόινων συνθέτων υλικών με ίνες τυχαίου προσανατολισμού

Τα σύνθετα υλικά με κοντές ίνες τυχαίου προσανατολισμού, παρουσιάζουν ισοτροπία στο επίπεδο. Το Μέτρο Ελαστικότητας, το Μέτρο Διάτμησης και ο Λόγος του Poisson αυτών των υλικών, προβλέπονται από τις ακόλουθες εμπειρικές σχέσεις:



$$E_{random} = \frac{3}{8}E_L + \frac{5}{8}E_T$$

$$G_{random} = \frac{1}{8}E_L + \frac{1}{4}E_T$$

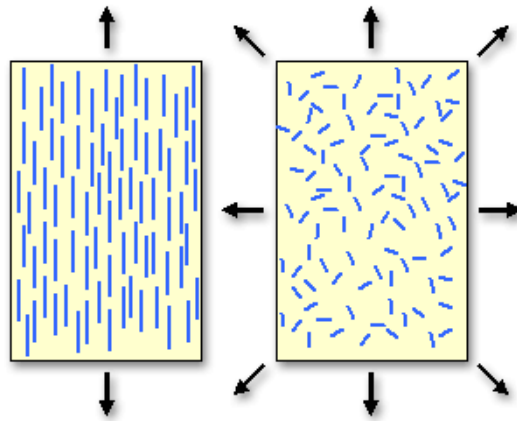
$$\nu_{random} = \frac{E_{random}}{2G_{random}} - 1$$

2. Ίνες Τυχαίου Προσανατολισμού:

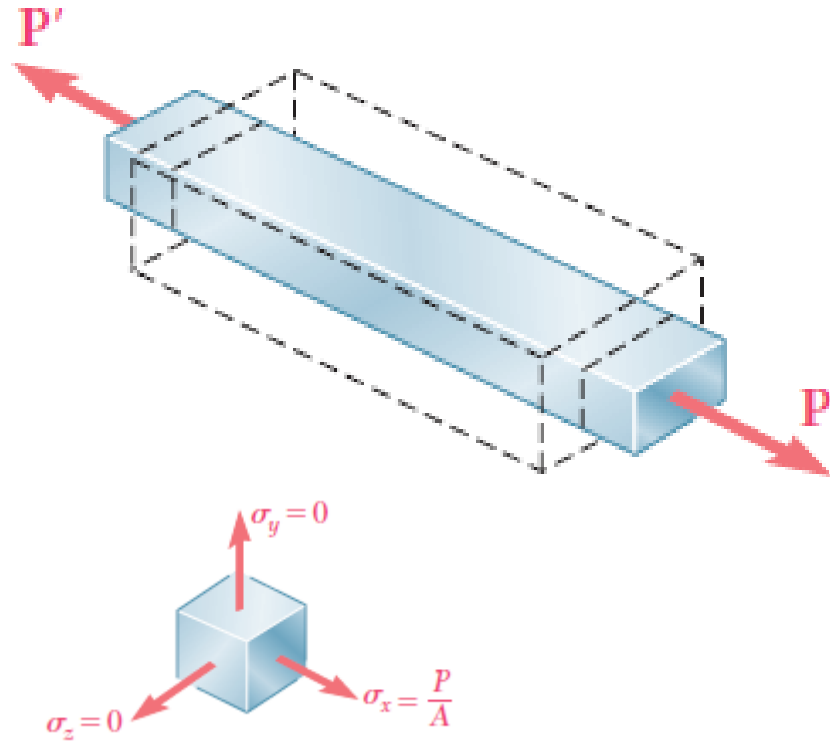
$$E_{random} = \frac{3}{8}E_{11} + \frac{5}{8}E_{22} \quad \Rightarrow \quad E_{random} = \frac{3}{8} * 21.82 + \frac{5}{8} * 9.48 = 14.11 \text{ GPa}$$

$$G_{random} = \frac{1}{8}E_{11} + \frac{1}{4}E_{22} \quad \Rightarrow \quad G_{random} = \frac{1}{8} * 21.82 + \frac{1}{4} * 9.48 = 5.10 \text{ GPa}$$

$$\nu_{random} = \frac{E_{random}}{2G_{random}} - 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_{random} = \frac{14.11}{2 * 5.10} - 1 = 0.383$$



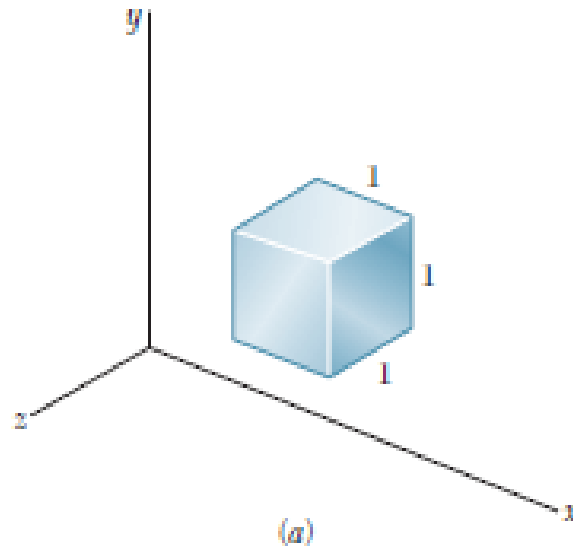
Παραμορφώσεις στον μονοαξονικό εφελκυσμό-Ομογενή και Ισότροπα Υλικά



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

Πολυαξονική φόρτιση - Ομογενή και Ισότροπα Υλικά

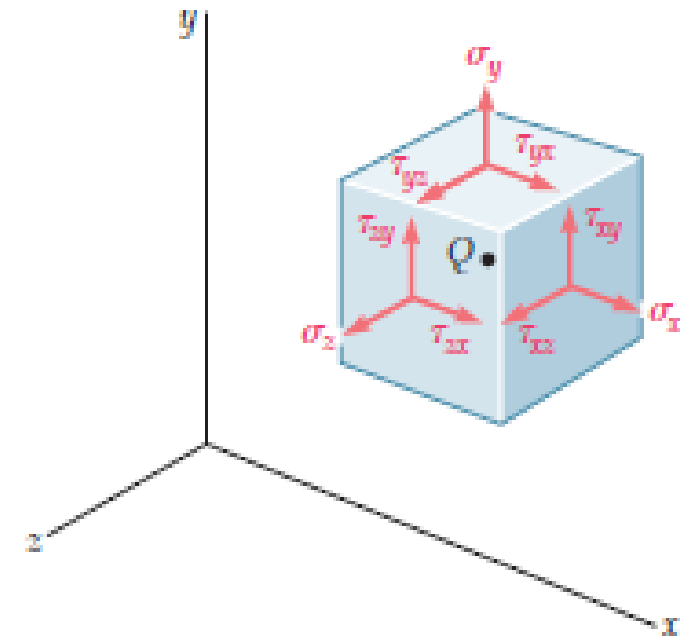
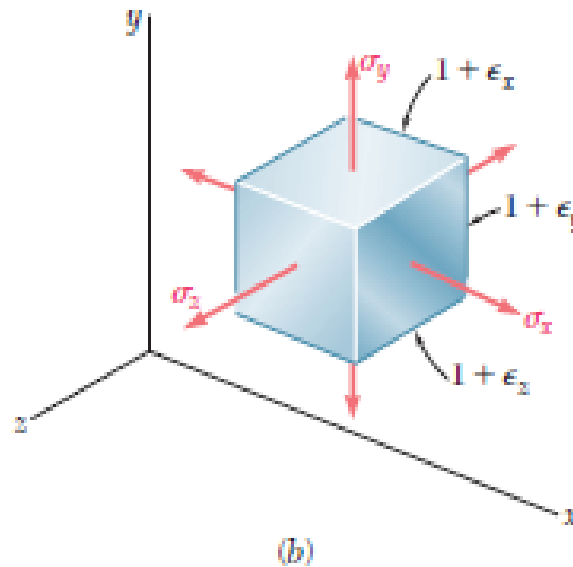


$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

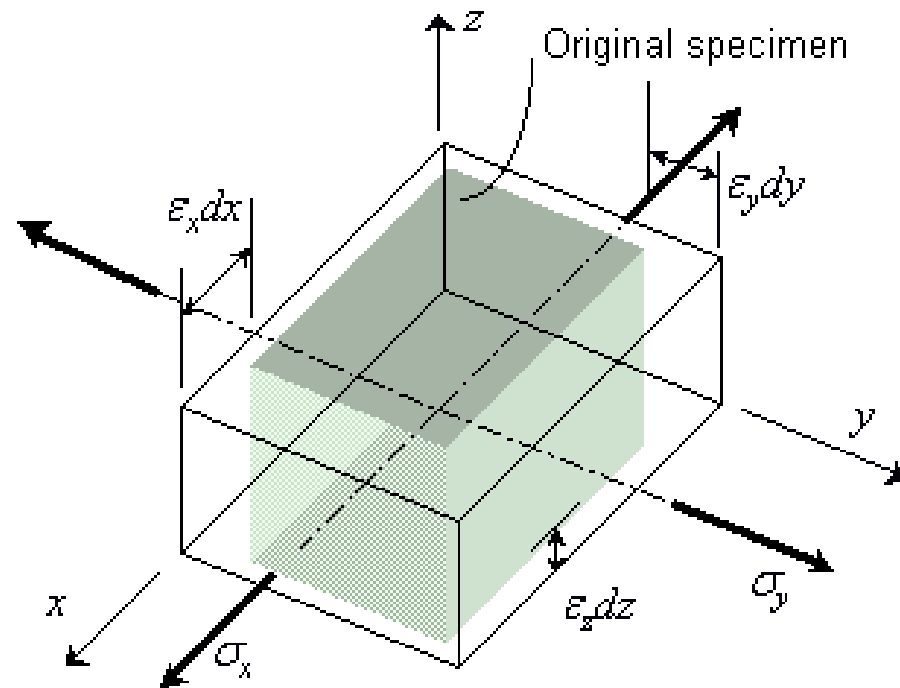
$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$



Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke - Ομογενή και Ισότροπα Υλικά



$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Generalised Hooke's Law

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Shear stress-strain relations

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke για Ομογενή και Ισότροπα Υλικά σε Μητρωϊκή Μορφή

Generalised Hooke's Law

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

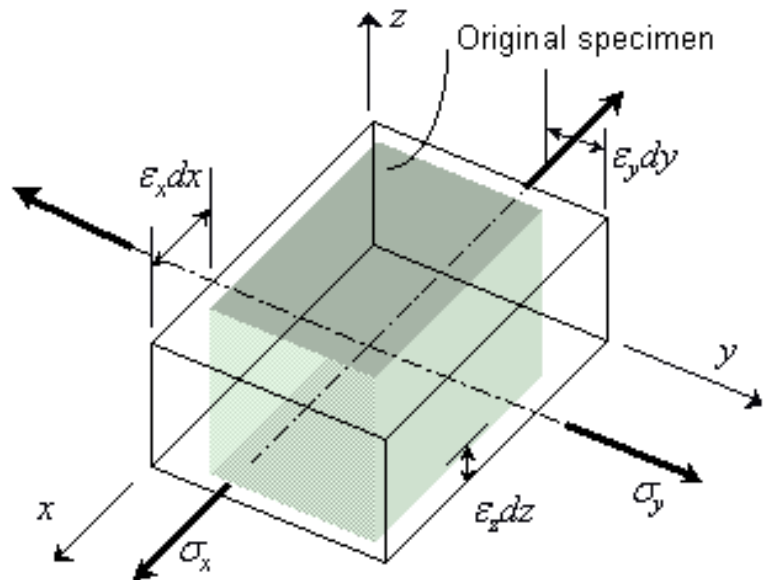
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Shear stress-strain relations

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

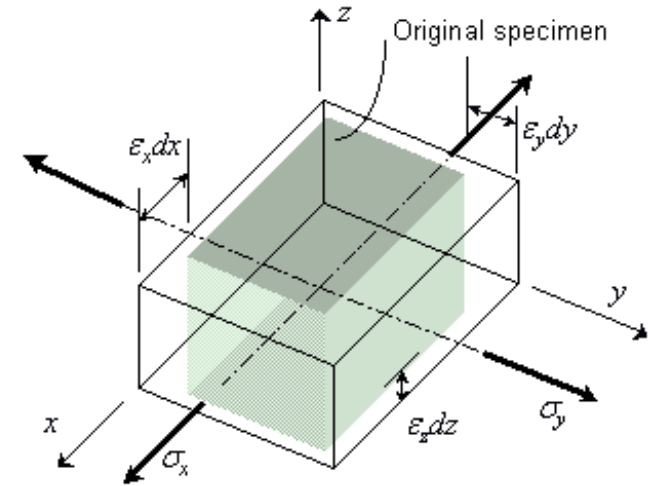
The Compliance Matrix S_{ij}

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke για Ομογενή και Ισότροπα Υλικά σε Μητρωϊκή Μορφή

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$



The Stiffness Matrix C_{ij}

Shear Modulus $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

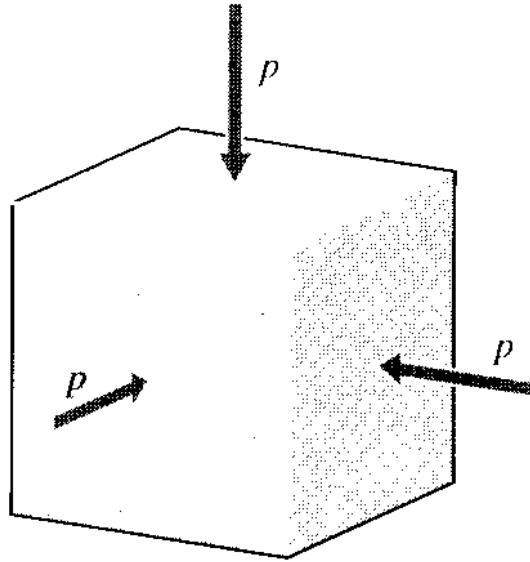
Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke για Ομογενή και Ισότροπα Υλικά σε Μητρωϊκή Μορφή και σε συνθήκες Επίπεδης Εντατικής Κατάστασης

Στην επίπεδη εντατική κατάσταση, θεωρούμε: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad \mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \quad \text{stiffness matrix.}$$

Υδροστατικές και Αποκλίνουσες Συνιστώσες



Υδροστατική Πίεση

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = -p$$

Μέση ορθή τάση

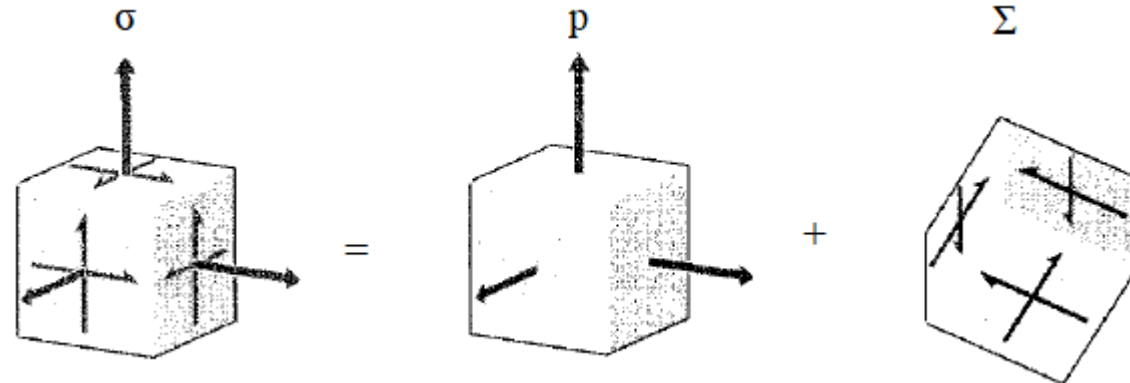
Ανάλυση του Τανυστή των Τάσεων

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \Sigma_{ij}$$

Τανυστής
των Τάσεων

Υδροστατική
συνιστώσα

Αποκλίνουσα
συνιστώσα



Ανηγμένη Διόγκωση και Μέτρο Διόγκωσης

Η υδροστατική συνιστώσα συνδέεται με την ανηγμένη διόγκωση, μέσω της σχέσης:

Όπου: $K = E/3(1 - 2\nu)$

Ο τανυστής των παραμορφώσεων μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες:

Ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων συνδέεται με τον αποκλίνοντα τανυστή των παραμορφώσεων μέσω της σχέσης:

Όπου: $G = E/2(1 + \nu)$

$$\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = -p$$

$$-p = K \Delta V/V$$

Μέση υδροστατική
πίεση

Μέτρο Διόγκωσης

Ανηγμένη Διόγκωση

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}$$

Τανυστής των
παραμορφώσεων

Σφαιρικός
Τανυστής των
παραμορφώσεων

Αποκλίνων
Τανυστής των
παραμορφώσεων

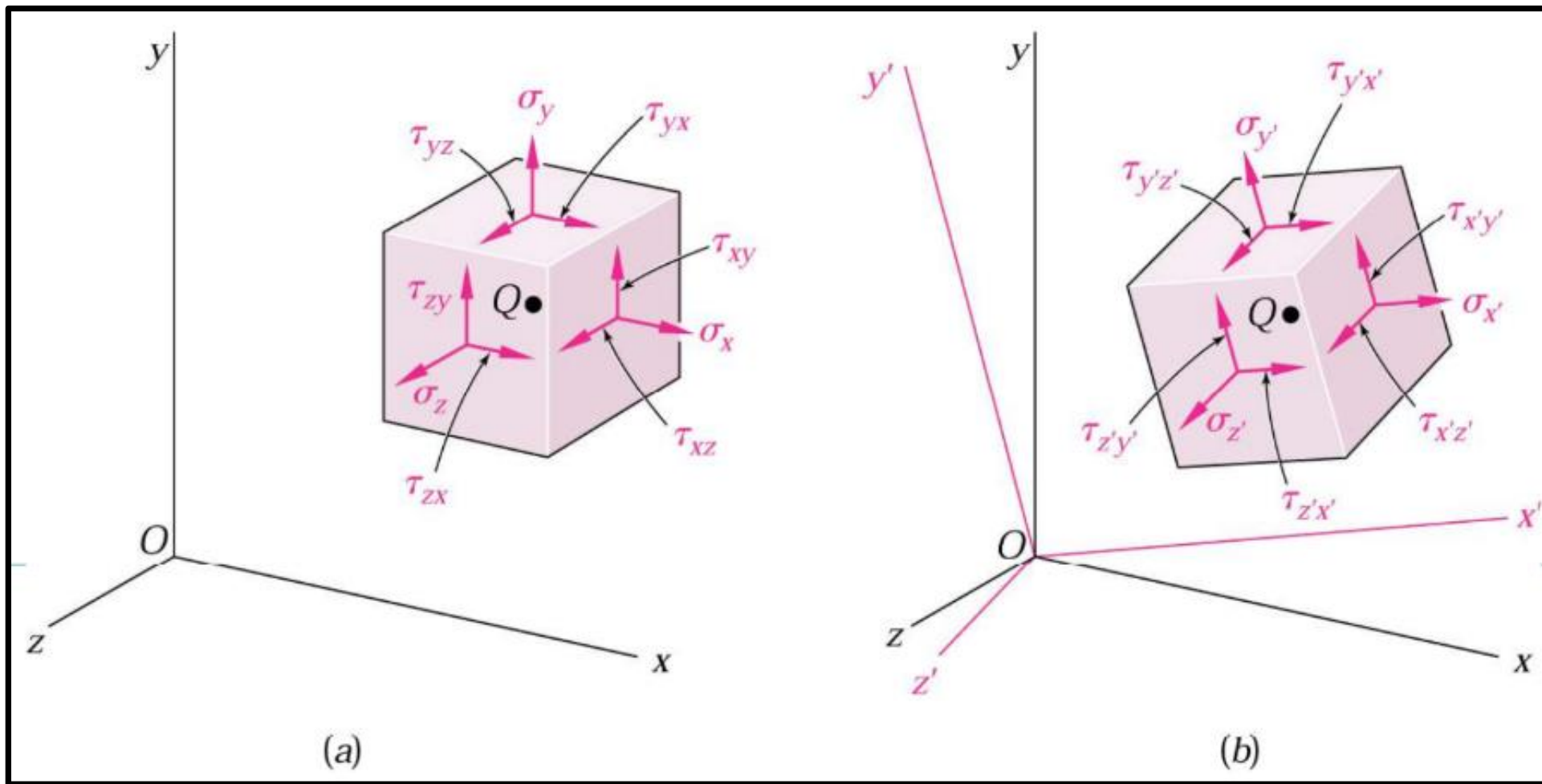
$$\Sigma_{ij} = 2G e_{ij}$$

Αποκλίνων
Τανυστής των
τάσεων

Μέτρο
Διάτμησης

Αποκλίνων
Τανυστής των
παραμορφώσεων

Στροφή του Τανυστή των Τάσεων



Στροφή του Τανυστή των Τάσεων στον χώρο E2 – Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

$$[\Sigma'] = [R] \cdot [\Sigma] \cdot [R]^T \quad \text{ή} \quad \sigma'_{ij} = r_{ik} r_{jm} \sigma_{km}$$

Νόμος Μετασχηματισμού

Πίνακας
Στροφής

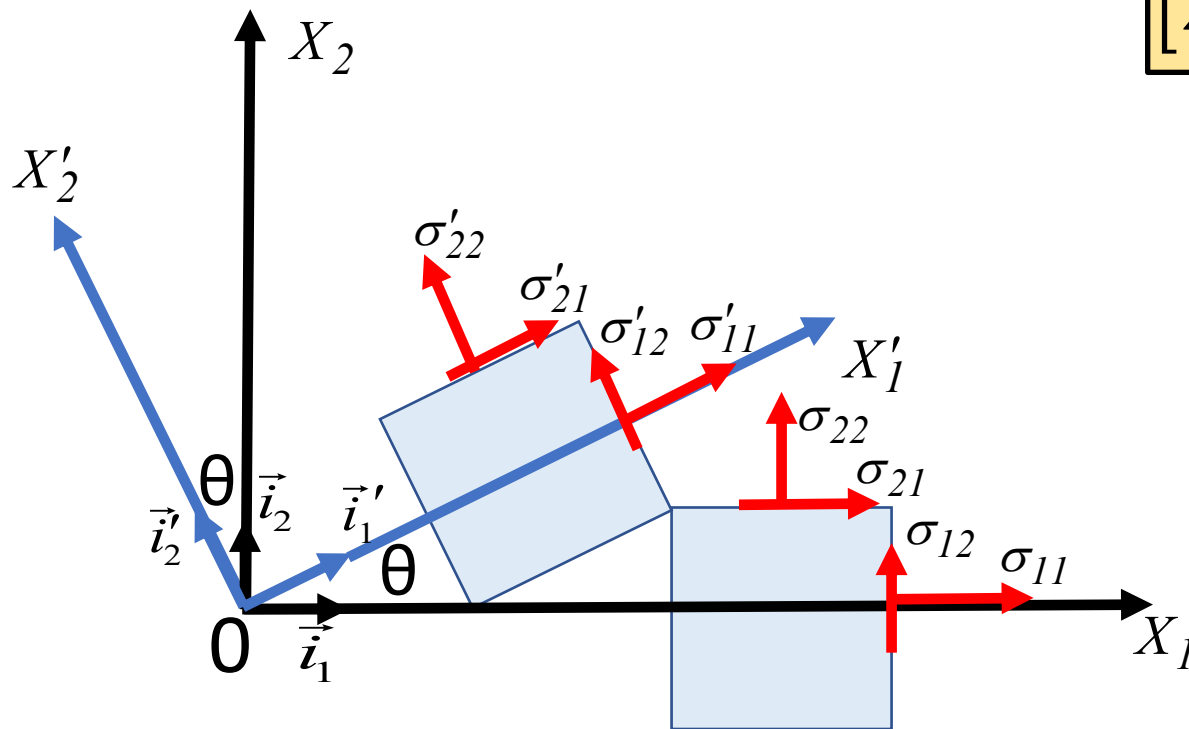
$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ο τανυστής στο
αρχικό Σύστημα
Αναφοράς

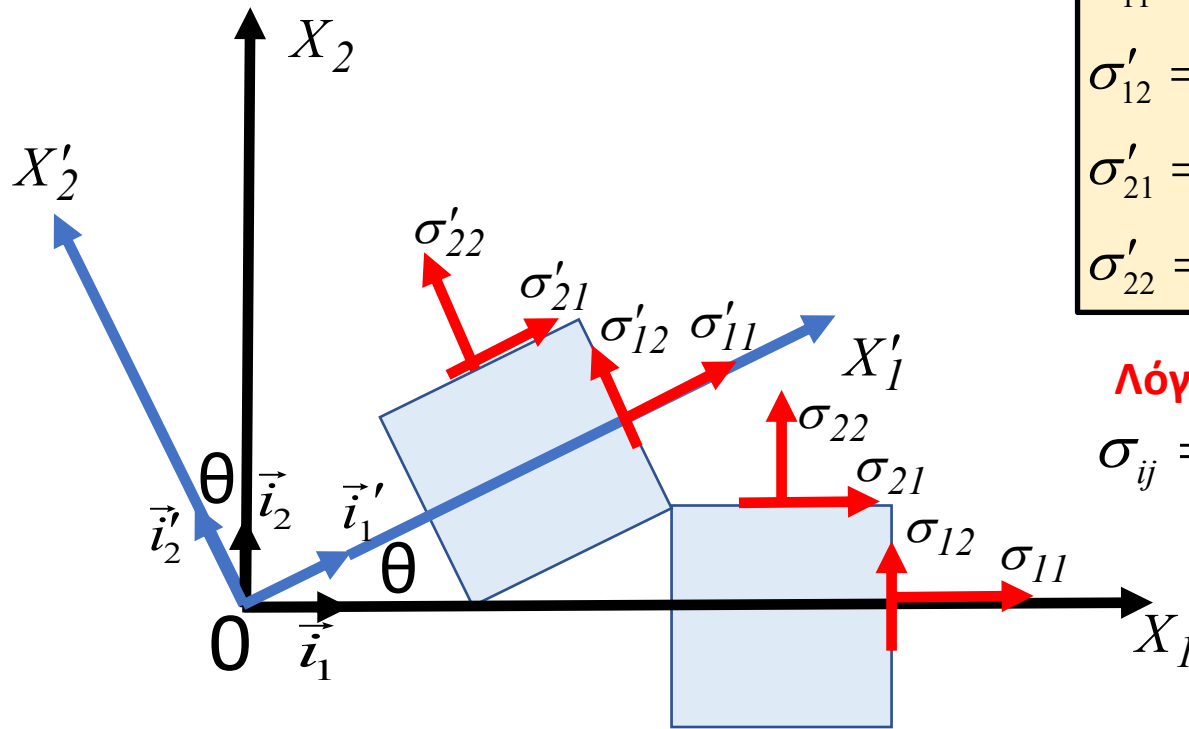
$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Ο τανυστής στο τελικό
Σύστημα Αναφοράς

$$[\Sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{bmatrix}$$



Στροφή του Τανυστή των Τάσεων στον χώρο Ε2 – Επίπεδη Εντατική Κατάσταση



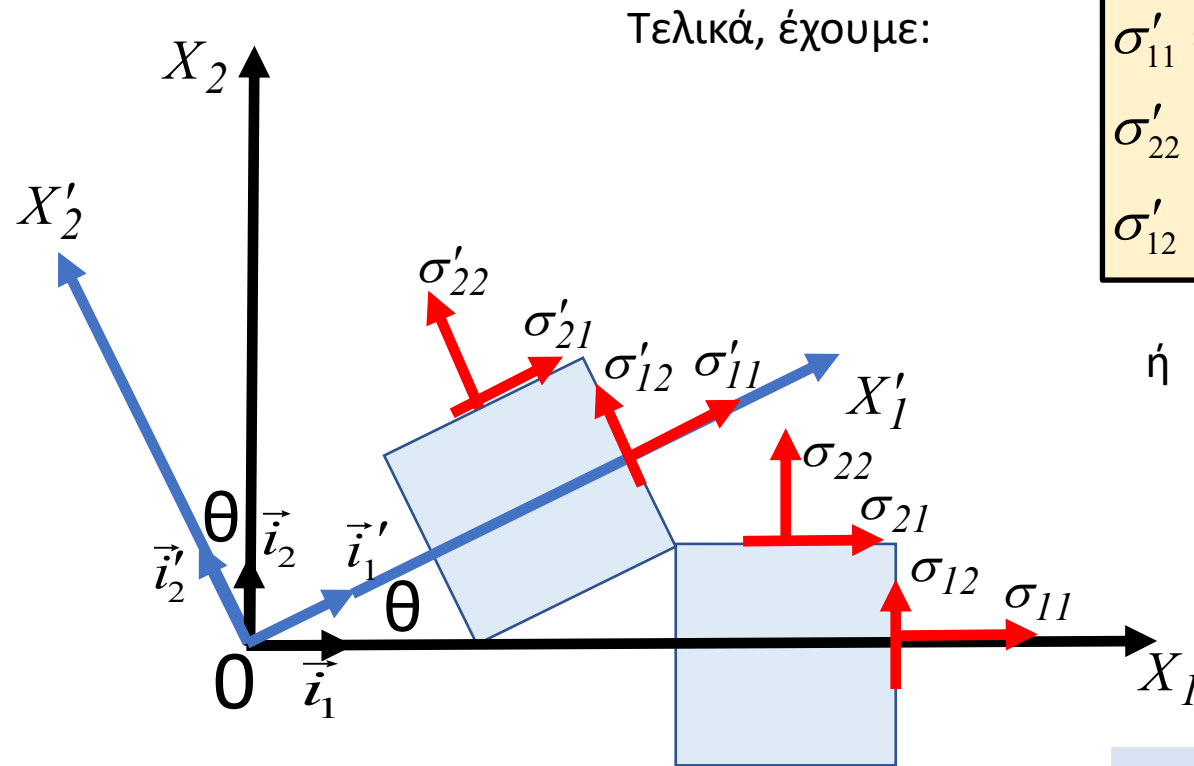
$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} \cos^2 \theta - \sigma_{21} \sin^2 \theta \\ \sigma'_{21} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta - \sigma_{12} \sin^2 \theta + \sigma_{21} \cos^2 \theta \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta\end{aligned}$$

Λόγω της συμμετρίας του τανυστή των τάσεων,

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \\ \sigma'_{22} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta\end{aligned}$$

Στροφή του Τανυστή των Τάσεων στον χώρο E2 – Επίπεδη Εντατική Κατάσταση



$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Όπου: $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$

ή

$$[\Sigma'] = [A] \cdot [\Sigma]$$

όπου

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

**Μητρώο
Μετασχηματισμού**

Στροφή του Τανυστή των Παραμορφώσεων

Ομοίως,

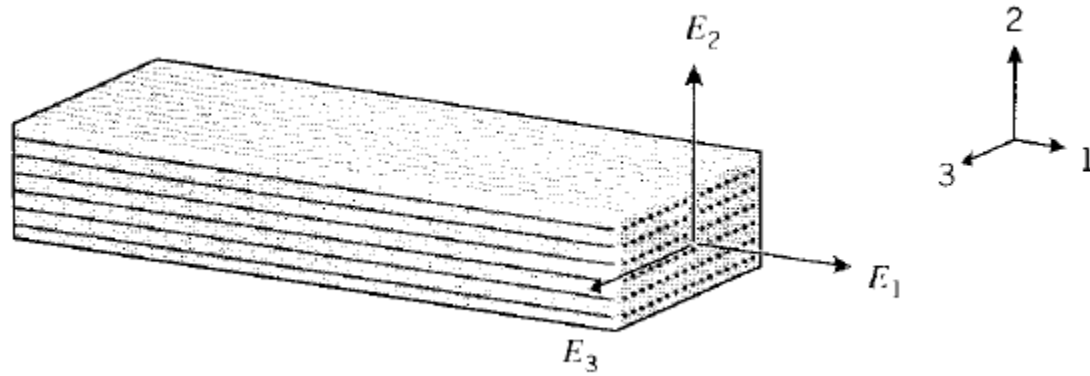
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Reuter's matrix $[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}$$

$\epsilon_{x'}$	$=$	$\epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$
$\epsilon_{y'}$	$=$	$\epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$
$\gamma_{x'y'}$	$=$	$2(\epsilon_y - \epsilon_x) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

Ορθότροπα Υλικά και Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά



Αν ένα υλικό, όπως το ξύλο ή ένα UD-FRP έχει διάμηκες μέτρο E_1 (κατά μήκος των ινών), τότε τα μέτρα E_2 και E_3 είναι πολύ μικρότερα του E_1 . Αν επιπλέον, $E_1 \neq E_2 \neq E_3$, το υλικό ονομάζεται **ορθότροπο**.

Αν όμως, $E_2 = E_3$, τότε το υλικό ονομάζεται **εγκαρσίως ισότροπο**

($E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ and G_{12}).

Λόγω συμμετρίας, $S_{12} = S_{21}$. Άρα,

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

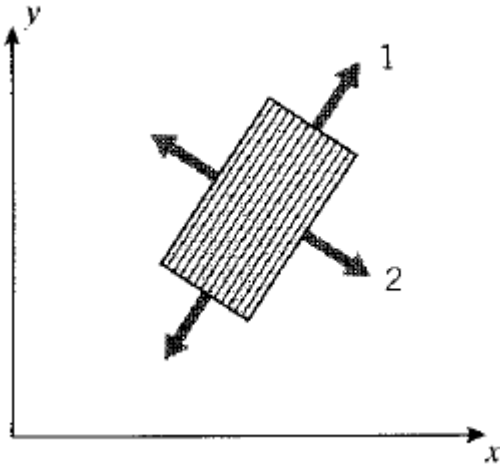
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

ν_{12} = Κύριος λόγος του Poisson (η παραμόρφωση εφαρμόζεται στην διεύθυνση 1) $\gg \nu_{21}$

ν_{21} = Δευτερεύων λόγος του Poisson (η παραμόρφωση εφαρμόζεται στην διεύθυνση 2)

Άρα, 4 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές

Στροφή του τανυστή των παραμορφώσεων



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \bar{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{S}}$ transformed compliance matrix relative to x - y axes.

$\mathbf{A}$ transformation matrix

$\mathbf{R}$ Reuter's matrix

$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}$ stiffness matrix.

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}}$$

	S-glass/ epoxy	Kevlar/ epoxy	HM Graphite/ epoxy	Pine	Rohacell 51 rigid foam
Elastic Properties:					
E_1 , GPa	55	80	230	13.4	0.07
E_2 , GPa	16	5.5	6.6	0.55	0.07
G_{12} , GPa	7.6	2.1	4.8	0.83	0.021
ν_{12}	0.26	0.31	0.25	0.30	
Tensile Strengths:					
σ_1 , MPa	1800	2000	1100	78	1.9
σ_2 , Mpa	40	20	21	2.1	1.9
σ_{12} , MPa	80	40	65	6.2	0.8
Compressive Strengths:					
σ_1 , MPa	690	280	620	33	0.9
σ_2 , MPa	140	140	170	3.0	0.9
Physical Properties:					
α_1 , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	2.1	-4.0	-0.7		33
α_2 , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	6.3	60	28		33
Volume fraction	0.7	0.54	0.7		
Thickness, mm	0.15	0.13	0.13		
Density, Mg/m ³	2.0	1.38	1.63	0.55	0.05

Material	Properties	Value
Glass fiber	Fiber longitudinal modulus in ℓ direction $E_{f\ell}$ (GPa)	74
	Fiber transverse modulus in t direction E_{ft} (GPa)	74
	Fiber shear modulus $G_{f\ell t}$ (GPa)	30
	Density ρ_f (kg/m ³)	2600
	Fiber Poisson ratio $\nu_{f\ell t}$	0.25
Epoxy resin	Elastic modulus E (GPa)	4.5
	Shear modulus G (GPa)	1.6
	Density ρ_m (kg/m ³)	1200
	Poisson ratio ν	0.4
orthotropic Laminae	Lamina longitudinal modulus E_1 (GPa)	46.2
	Lamina transverse modulus E_2 (GPa)	14.70
	Lamina transverse modulus E_3 (GPa)	14.70
	Density of composite ρ_c (kg/m ³)	2040
	Lamina shear modulus in plane 1-2 G_{12} (GPa)	5.35
	Lamina shear modulus in plane 1-3 G_{13} (GPa)	5.35
	Lamina shear modulus in plane 2-3 G_{23} (GPa)	5.22
	Major Poisson ratio in plane 1-2 ν_{12}	0.31
	Major Poisson ratio in plane 1-3 ν_{13}	0.31
	Major Poisson ratio in plane 2-3 ν_{23}	0.41
	Fiber volume fraction ν_f	60%

Elastic Properties			Piezoelectric Properties		
Properties	Grphite-Epoxy	PZT-5A	Properties	Grphit-Epoxy	PZT-5A
E_{11} (GPa)	181	61.0	d_{31} (10 ⁻¹² m/V)	0	-171
E_{22} (GPa)	10.3	61.0	d_{32} (10 ⁻¹² m/V)	0	-171
E_{33} (GPa)	10.3	53.2	d_{33} (10 ⁻¹² m/V)	0	374
G_{12} (GPa)	7.17	22.6	d_{15} (10 ⁻¹² m/V)	0	584
G_{23} (GPa)	2.87	21.1	d_{24} (10 ⁻¹² m/V)	0	584
G_{32} (GPa)	7.17	21.1	g_{11} (10 ⁻³ F/m)	0.0031	1.53
ν_{12}	0.28	0.35	g_{22} (10 ⁻³ F/m)	0.0027	1.53
ν_{23}	0.28	0.38	g_{33} (10 ⁻³ F/m)	0.0027	1.5
ν_{32}	0.33	0.38			

		Square unit cell (SQR)			Hexagonal unit cell (HEX)		
Elastic constants		Empirical formulas (EMP)	FE result	Difference between SQR and EMP (%)	FE result	Difference between HEX and EMP (%)	Difference between SQR and HEX (%)
Glass/epoxy	E_1 (GPa)	45.4	45.4	0.13	45.5	0.13	0.26
	E_2, E_3 (GPa)	19.4	19.7	2.02	16.3	18.5	17.3
	G_{12}, G_{13} (GPa)	6.00	6.10	1.60	5.59	7.31	8.30
	G_{23} (GPa)	7.71	4.62	66.8	5.83	32.2	26.1
	ν_{12}, ν_{13}	0.260	0.253	2.83	0.260	0.08	2.91
	ν_{23}	0.255	0.275	7.35	0.391	33.1	38.5
	α_{11} ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	5.41	5.45	0.75	5.46	0.91	0.16
	α_{22}, α_{33} ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	9.92	9.04	9.75	9.27	7.03	2.54
Graphite/epoxy	E_{11} (GPa)	160	159	0.43	160	0.10	0.33
	E_{22}, E_{33} (GPa)	11.1	11.5	3.75	10.8	2.31	5.92
	G_{12}, G_{13} (GPa)	5.90	5.98	1.41	5.50	7.17	8.01
	G_{23} (GPa)	4.05	3.40	19.0	3.72	8.99	9.20
	ν_{12}, ν_{13}	0.260	0.257	1.29	0.254	2.29	0.98
	ν_{23}	0.367	0.417	12.1	0.448	18.1	7.37
	α_{11} ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	-0.712	-0.698	2.00	-0.685	3.94	1.86
	α_{22}, α_{33} ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	12.1	11.6	4.91	11.6	4.17	0.71

Property	Graphite-epoxy	Glass-epoxy
Longitudinal modulus, E_1	140.68 GPa	44.2 GPa
Transverse modulus, E_2	9.13 GPa	9.07 GPa
In-plane shear modulus G_{12}	7.24 GPa	4.64 GPa
Poisson ratio ν_{12}	0.3	0.27
Density	1605.434 kg/m ³	1992.95 kg/m ³
Thickness, t	0.000127 m	0.000127 m
Cost factor, C	8	1
Longitudinal tensile strength σ_{LU}^T	1.447 GPa	1.28 GPa
Longitudinal compressive strength σ_{LU}^C	1.447 GPa	0.69 GPa
Transverse tensile strength σ_{TU}^T	0.0517 GPa	0.049 GPa
Transverse compressive strength σ_{TU}^C	0.206 GPa	0.158 GPa
In-plane shear strength, σ_{TLU}	0.093 GPa	0.069 GPa

TABLE 2.1

Typical Mechanical Properties of a Unidirectional Lamina (SI System of Units)

Property	Symbol	Units	Glass/ epoxy	Boron/ epoxy	Graphite/ epoxy
Fiber volume fraction	V_f		0.45	0.50	0.70
Longitudinal elastic modulus	E_1	GPa	38.6	204	181
Transverse elastic modulus	E_2	GPa	8.27	18.50	10.30
Major Poisson's ratio	ν_{12}		0.26	0.23	0.28
Shear modulus	G_{12}	GPa	4.14	5.59	7.17
Ultimate longitudinal tensile strength	$(\sigma_1^T)_{ult}$	MPa	1062	1260	1500
Ultimate longitudinal compressive strength	$(\sigma_1^C)_{ult}$	MPa	610	2500	1500
Ultimate transverse tensile strength	$(\sigma_2^T)_{ult}$	MPa	31	61	40
Ultimate transverse compressive strength	$(\sigma_2^C)_{ult}$	MPa	118	202	246
Ultimate in-plane shear strength	$(\tau_{12})_{ult}$	MPa	72	67	68
Longitudinal coefficient of thermal expansion	α_1	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	8.6	6.1	0.02
Transverse coefficient of thermal expansion	α_2	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	22.1	30.3	22.5
Longitudinal coefficient of moisture expansion	β_1	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.00	0.00	0.00
Transverse coefficient of moisture expansion	β_2	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.60	0.60	0.60

Source: Tsai, S.W. and Hahn, H.T., *Introduction to Composite Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL, Table 1.7, p. 19; Table 7.1, p. 292; Table 8.3, p. 344. Reprinted with permission.