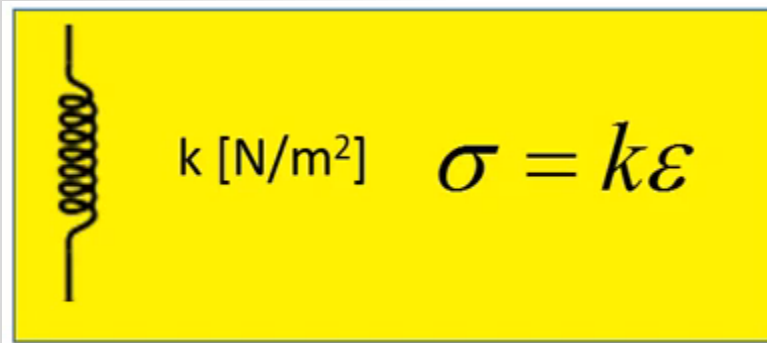


Μοντελοποίηση της Βισκοελαστικής Συμπεριφοράς

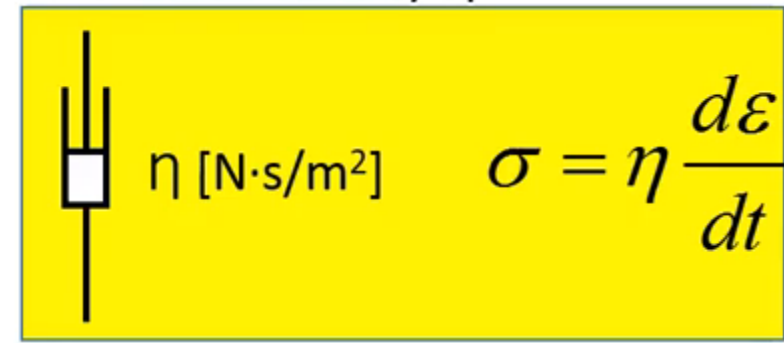
Γ. Παπανικολάου

Μοντελοποίηση της Βισκοελαστικής Συμπεριφοράς

Ελατήριο δυσκαμψίας k

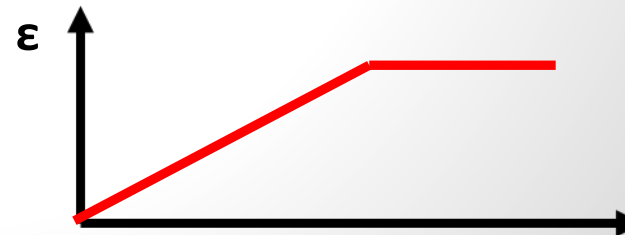
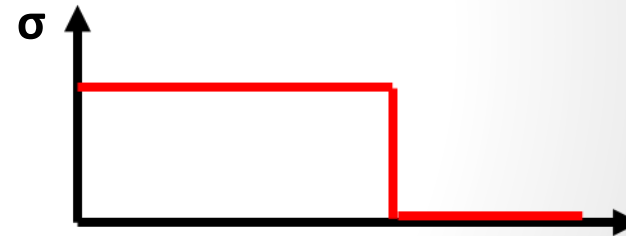
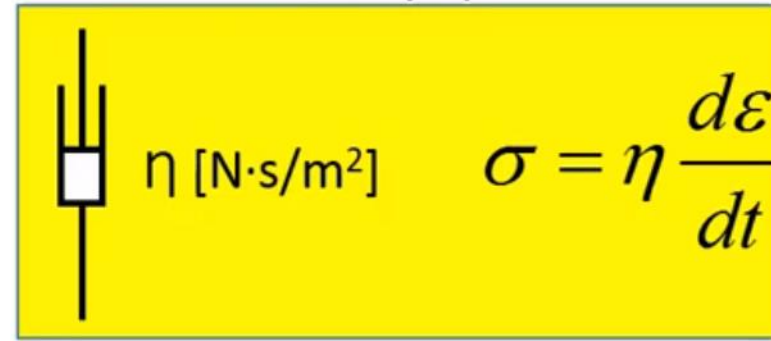
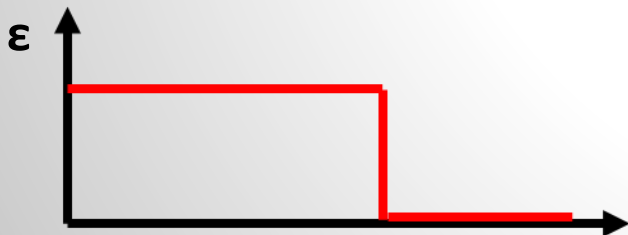
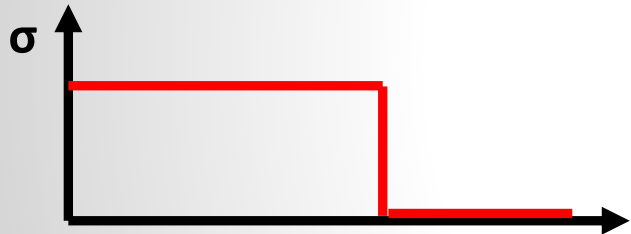
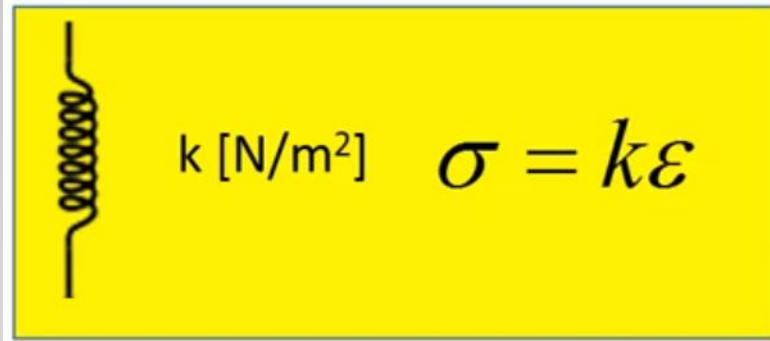


Αποσβεστήρας με ρευστό
ιξώδους η

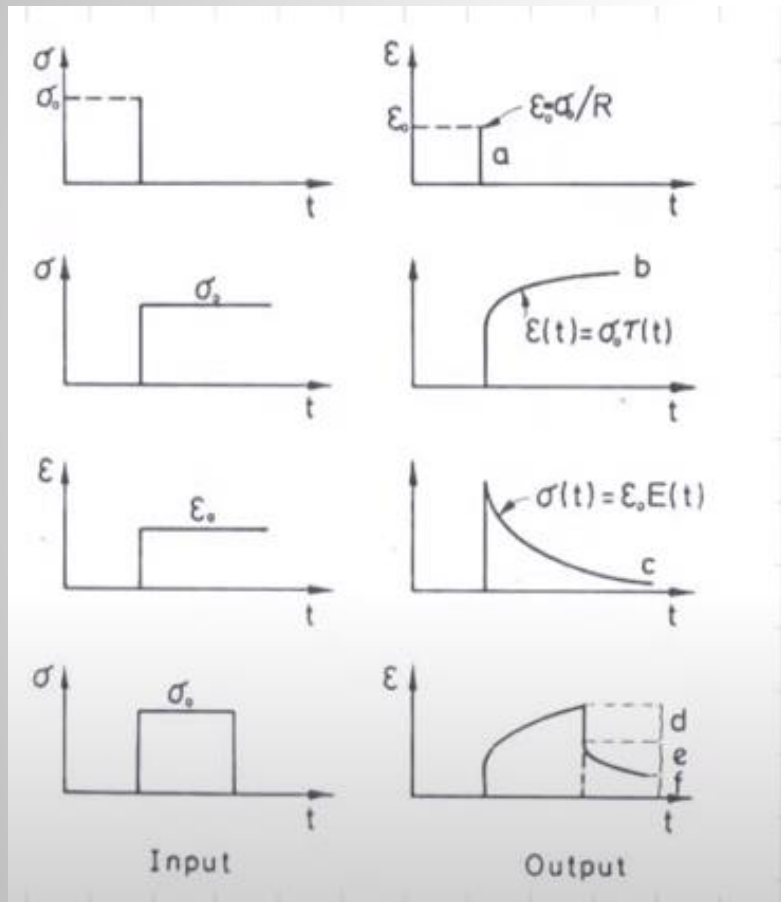


- Τα βισκοελαστικά μοντέλα αποτελούν συνδυασμό των δύο παραπάνω στοιχείων.
- Μπορούν να περιγράψουν την συμπεριφορά των υλικών σε χαλάρωση τάσης
- Τα ελατήρια περιγράφουν την ελαστική απόκριση του υλικού
- Οι αποσβεστήρες περιγράφουν την ιξώδη απόκριση του υλικού

Συμπεριφορά των Στοιχείων



Διέγερση και Απόκριση των Πολυμερών



Στιγμιαία Ελαστική Απόκριση



Ερπυσμός υπό σταθερή τάση



Χαλάρωση τάσης υπό σταθερή παραμόρφωση



d: Στιγμιαία Ελαστική Επανάταξη



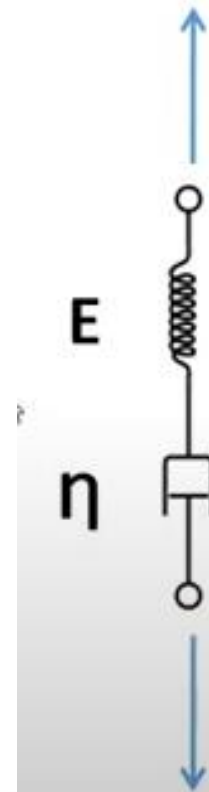
e: Καθυστερημένη Επανάταξη



f: Παραμένουσα Παραμόρφωση

Το Μοντέλο Maxwell

- Ένα ελατήριο και ένας αποσβεστήρας σε σειρά.
- Τα δύο στοιχεία έχουν την ίδια τάση και διαφορετική παραμόρφωση.
- Η συνολική παραμόρφωση ισούται με το άθροισμα των παραμορφώσεων των δύο στοιχείων.



$$\sigma_{tot} = \sigma_s = \sigma_d$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

Καταστατική Εξίσωση του Μοντέλου Maxwell

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_d$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

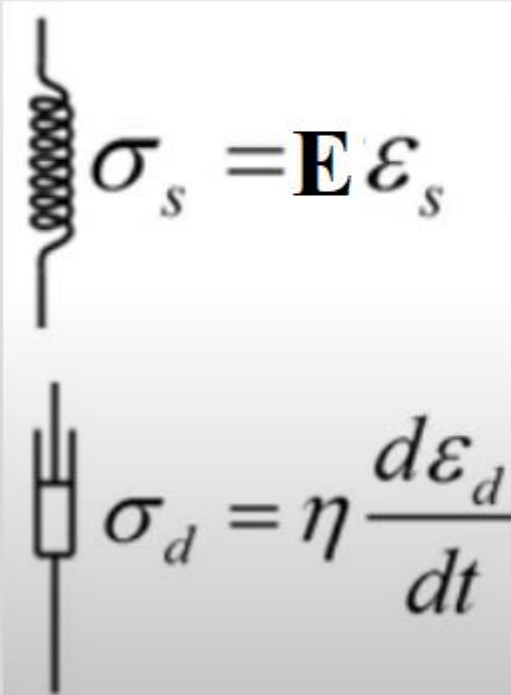
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d$$

$$\dot{\sigma}_s = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}_s$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d = \frac{\dot{\sigma}}{\mathbf{E}} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Define: $\tau = \frac{\eta}{\mathbf{E}}$

Χρόνος Χαλάρωσης
(Relaxation Time)



$$\mathbf{E} \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma \rightarrow \mathbf{E} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma$$

Δεν υπάρχει πλέον αναλογία τάσης-παραμόρφωσης.
Αντ' αυτού, υπάρχει μία διαφορική καταστατική εξίσωση.

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell στον Ερπυσμό

Η καταστατική εξίσωση του μοντέλου είναι:

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma \quad \text{όπου} \quad \tau = \frac{\eta}{E}$$

Στον ερπυσμό ισχύει: $\sigma = \sigma_0 = \text{σταθ.} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\tau} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta}$

Γενική λύση: $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C_1$

Αρχικές Συνθήκες: Για $t = 0^+$, $\sigma = \sigma_0 \Rightarrow C_1 = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

Επομένως, το Μοντέλο Maxwell προβλέπει για τον ερπυσμό, ότι:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \left(t + \frac{\eta}{E} \right)$$

Δηλαδή, το Μοντέλο Maxwell προβλέπει ότι στον ερπυσμό η παραμόρφωση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Επομένως:

Το Μοντέλο Maxwell αποτυγχάνει να προβλέψει σωστά τον ερπυσμό.

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell στον Ερπυσμό

Η ποσότητα η/E έχει μονάδες χρόνου και στην περίπτωση του ερπυσμού ονομάζεται “**χρόνος καθυστέρησης**” (*retardation time*).

$$\tau_{\text{retardation}} \equiv \tau_{\text{relaxation}} = \frac{\eta}{E}$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \left(t + \frac{\eta}{E} \right)$$

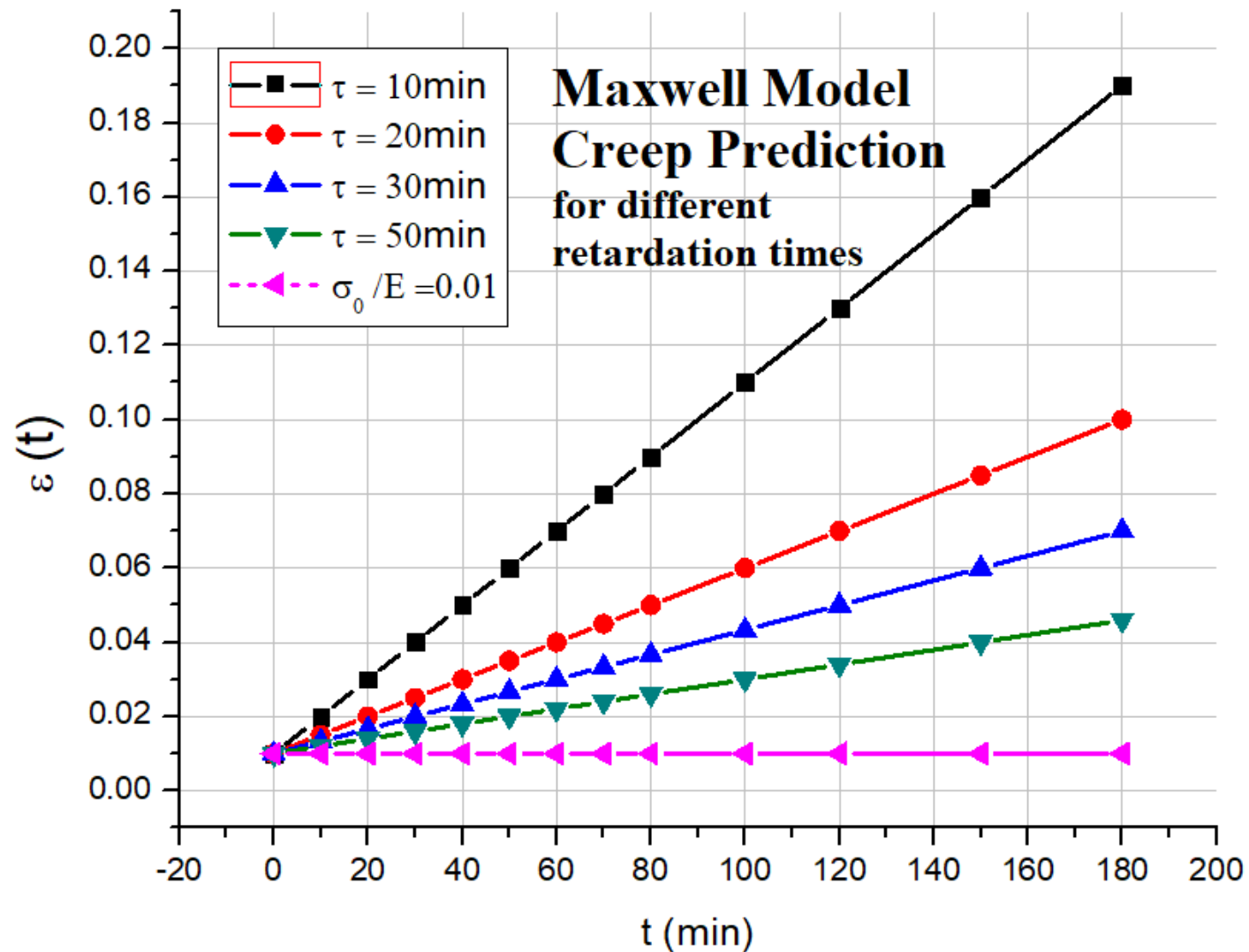
ή

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)$$

περιγράφει την ελαστική απόκριση του ελατηρίου, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει την βισκοελαστική απόκριση του αποσβεστήρα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση $\epsilon(t)$ που προβλέπει το μοντέλο του Maxwell για τον ερπυσμό είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, πράγμα που στην πράξη δεν ισχύει.

Επομένως το μοντέλο του Maxwell αποτυγχάνει να περιγράψει τον ερπυσμό.

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell στον Ερπυσμό



Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο **χρόνος καθυστέρησης** (*retardation time*), τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός αύξησης της παραμόρφωσης.

Το Μέτρο Ένδοσης σε Ερπυσμό (Creep Compliance)

Ο λόγος $\varepsilon(t)/\sigma_0$ ονομάζεται “**Μέτρο Ένδοσης σε Ερπυσμό**” (Creep Compliance), $C(t)$,

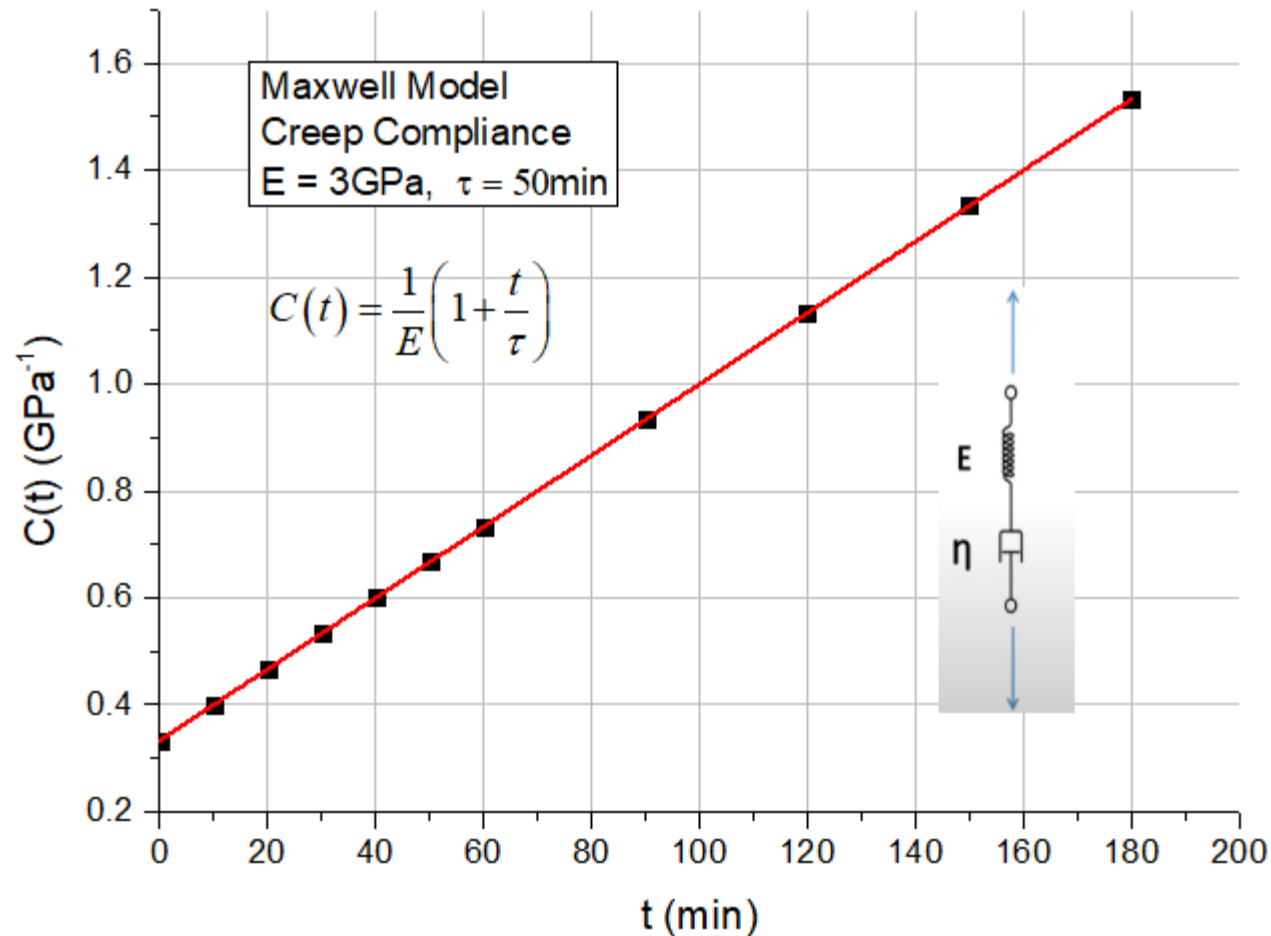
Creep Compliance (Μέτρο Ένδοσης σε Ερπυσμό) = $C(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$

Για το Μοντέλο Maxwell είναι:

$$C(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \quad \text{ή} \quad C(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)$$

- Το Μέτρο Ένδοσης σε Ερπυσμό, έχει μονάδες GPa^{-1} και εκφράζει την παραμόρφωση που αναπτύσσεται στο υλικό ανά μονάδα τάσης, συναρτήσει του χρόνου.
- Το Μέτρο Ένδοσης σε Ερπυσμό είναι ανεξάρτητο του επιβαλλόμενου φορτίου.

Μεταβολή του Μέτρου Ένδοσης με τον χρόνο σύμφωνα με το μοντέλο Maxwell



Παρατηρούμε ότι για

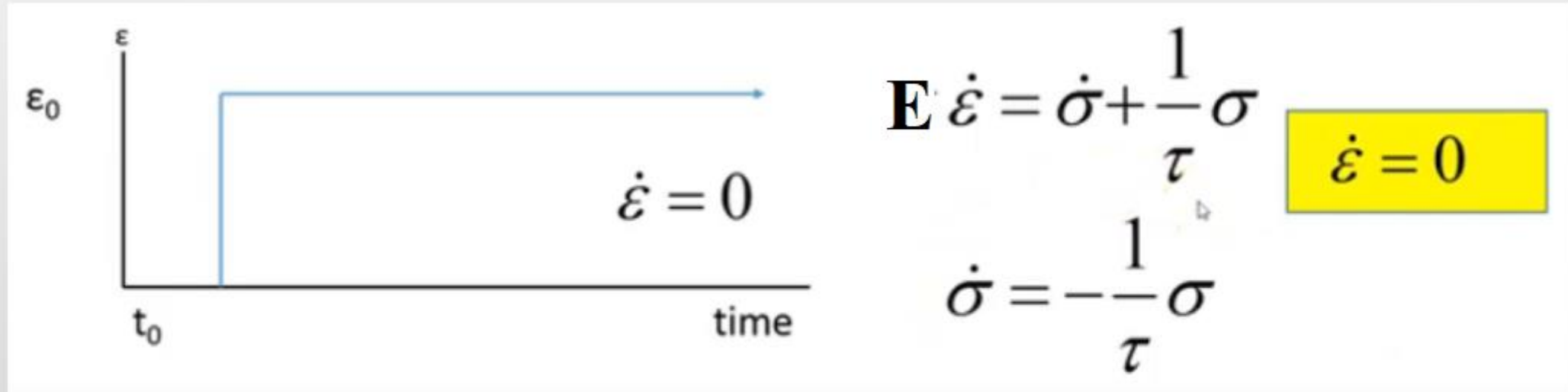
$t = 0$, $C(0) = 1/E$

ενώ για

$t > 0$, $C(t) > 1/E$

- Επίσης παρατηρούμε ότι το μέτρο ένδοσης δεν εξαρτάται από το φορτίο που επιβάλλουμε στο δοκίμιο, αλλά μόνο από το μέτρο E και τον χρόνο καθυστέρησης $\tau = \eta/E$.
- Αυτό σημαίνει ότι αν εκτελέσουμε n πειράματα ερπυσμού ενός υλικού σε n διαφορετικά επίπεδα τάσης, υπό τις ίδιες περιβαλλοντικές συνθήκες, **θα εξάγουμε n καμπύλες ερπυσμού, αλλά μόνο μία καμπύλη $C(t)=f(t)$.**

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell στη Χαλάρωση



$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau} \sigma(t)$$

Πρόβλεψη του Μοντέλου Maxwell για τη Χαλάρωση

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\tau}\sigma$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{\tau}$$

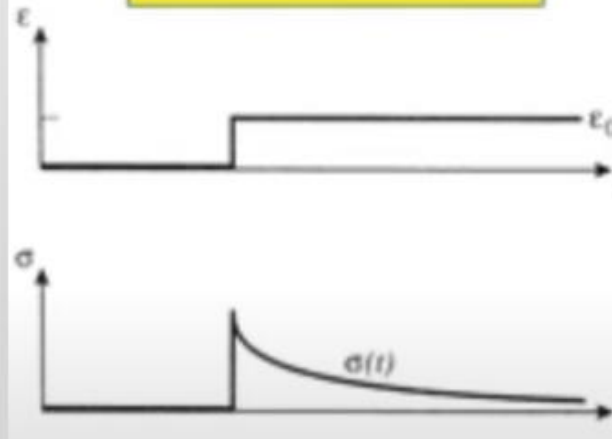
$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$\ln \sigma - \ln \sigma_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Για $t=0$?
μόνο το ελατήριο αντιδρά

$$\sigma_0 = E \varepsilon_0$$



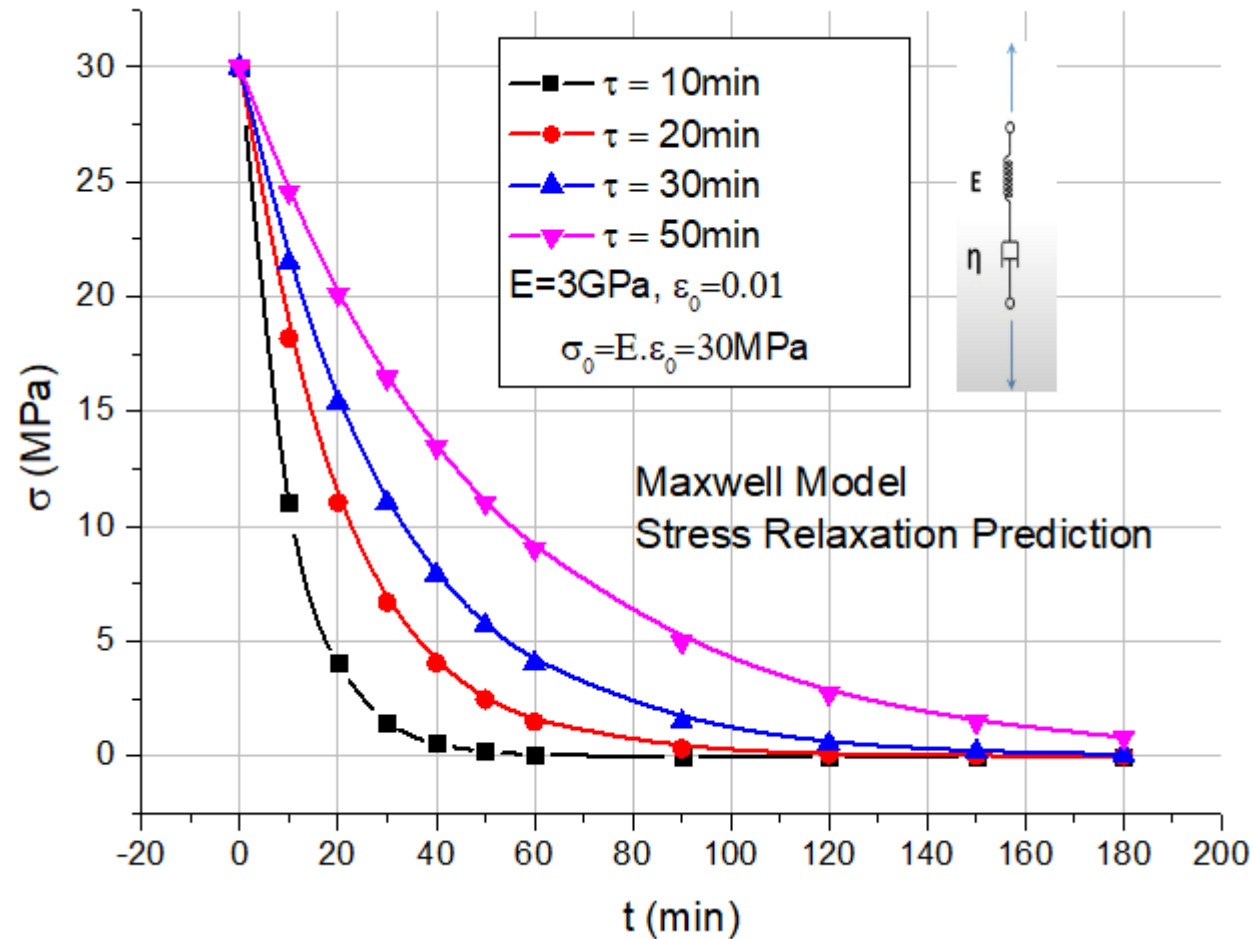
Note:

As t goes to infinity, stress goes to 0.

When $t=\tau$, stress has relaxed to $1/e$ (36.7%) of its initial value

This is not realistic for solids: stress will never be 0 if there is an applied strain

Εφαρμογή του Μοντέλου του Maxwell στη Χαλάρωση Τάσης



Παρατηρούμε ότι:

Όσο μεγαλύτερος είναι ο **χρόνος χαλάρωσης** (relaxation time), τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός μείωσης της τάσης.

Το Μέτρο Χαλάρωσης (Relaxation Modulus)

Ορισμός: Σε ένα πείραμα χαλάρωσης, ορίζουμε ως **Μέτρο Χαλάρωσης** (*Relaxation Modulus*) τον λόγο της μεταβλητής με τον χρόνο τάσης, προς την σταθερή παραμόρφωση που επιβάλλουμε στο υλικό.

$$\text{Relaxation Modulus } R(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$$

Το Μέτρο Χαλάρωσης εκφράζει την τάση ανά μονάδα παραμόρφωσης, συναρτήσει του χρόνου και έχει μονάδες GPa.

Στην περίπτωση του Μοντέλου του Maxwell, όπου: $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$

$$R(t) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}$$

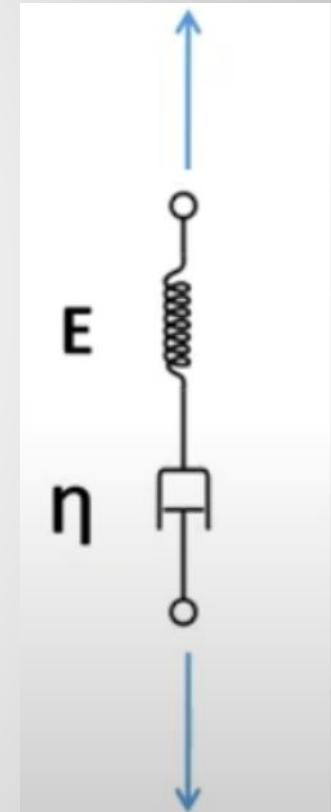
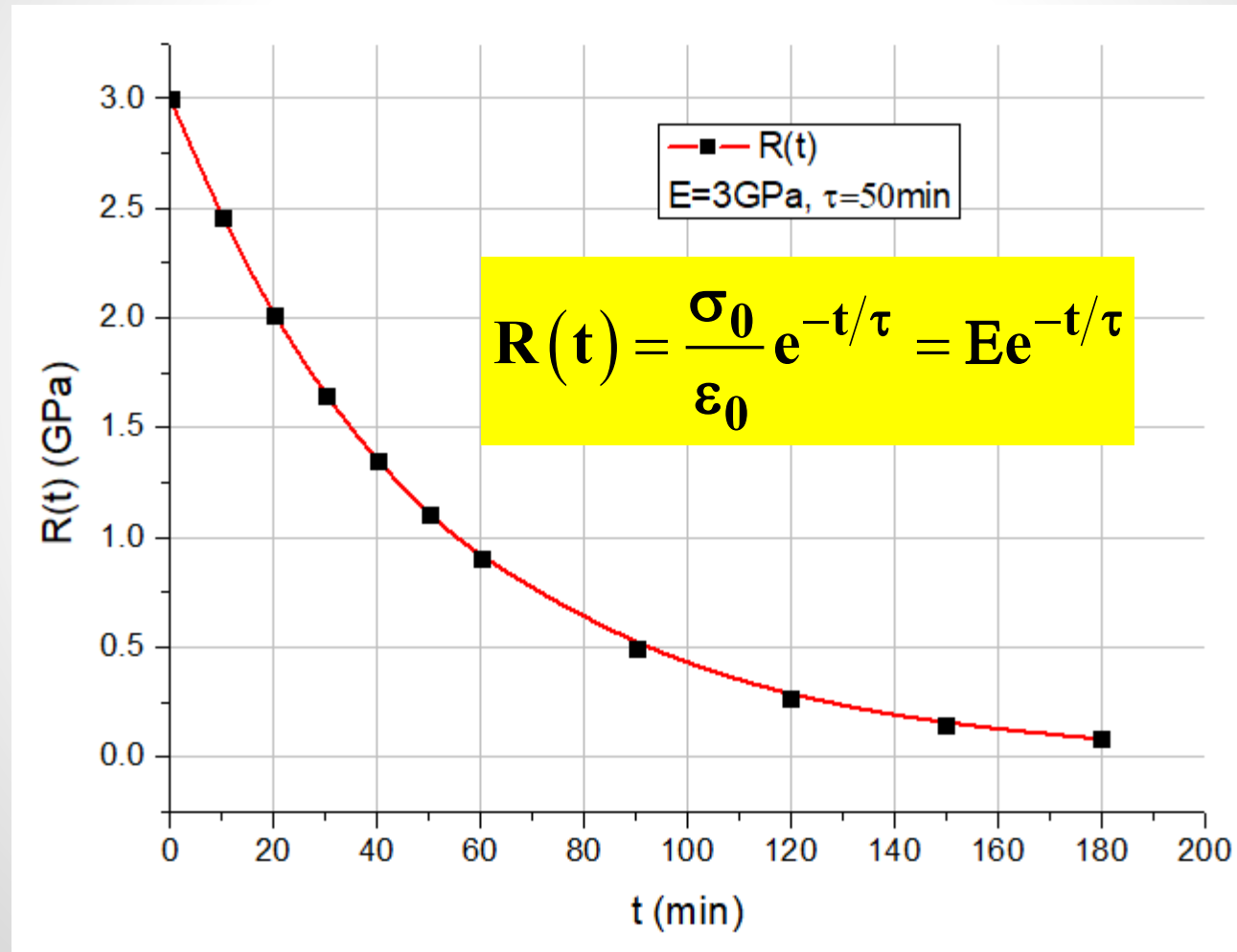
Το Μέτρο Χαλάρωσης είναι ανεξάρτητο του μέτρου της επιβαλλόμενης σταθερής παραμόρφωσης.

Στο μοντέλο του Maxwell ισχύει:

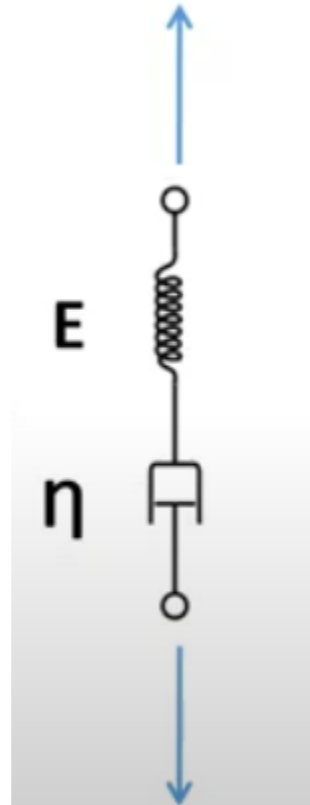
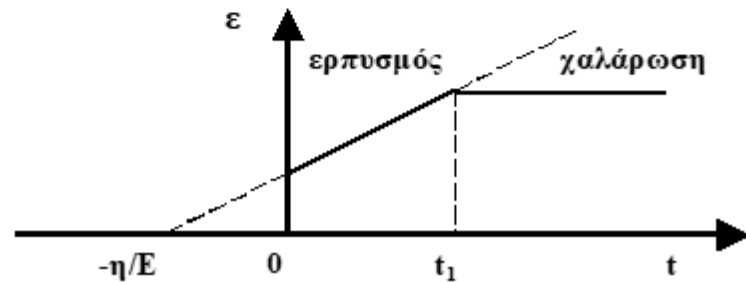
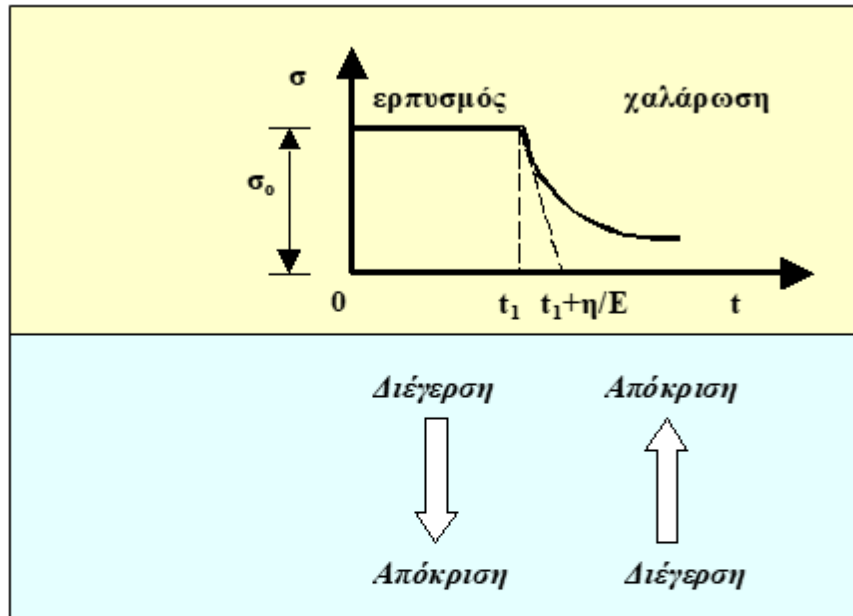
$$\tau_{\text{retardation}} = \tau_{\text{relaxation}} = \frac{\eta}{E} = \tau$$

Όπως όμως θα δούμε στη συνέχεια, σε πολυπλοκότερα μοντέλα, οι δύο αυτοί χρόνοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, ενώ τα γενικευμένα μοντέλα που θα εξετασθούν αργότερα, δεν χαρακτηρίζονται από έναν και μοναδικό χρόνο καθυστέρησης ή χρόνο χαλάρωσης αλλά από ένα **φάσμα χρόνων καθυστέρησης** και ένα **φάσμα χρόνων χαλάρωσης**.

Μέτρο Χαλάρωσης $R(t)$ σύμφωνα με το Μοντέλο Maxwell



Ερπυσμός και Χαλάρωση κατά το Μοντέλο Maxwell



- Ο μηχανισμός λειτουργίας του μοντέλου του Maxwell μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:
- Κατά την φάση του ερπυσμού, και για $t=0$, λόγω της ταχείας αύξησης της παραμόρφωσης, δρα μόνο το ελατήριο ενώ ο αποσβεστήρας παραμένει αδρανής. Στη συνέχεια, η παραμόρφωση αυξάνει σταδιακά και η μεταβολή με τον χρόνο οφείλεται στον αποσβεστήρα.
- Κατά την φάση της χαλάρωσης, όταν η παραμόρφωση διατηρείται σταθερή, τότε λόγω του αποσβεστήρα, η τάση μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και σε μεγάλους χρόνους τείνει στο μηδέν.

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell για σταθερό ρυθμό φόρτισης

Η επιβολή φορτίου με σταθερό ρυθμό μεταβολής, λ , προκαλεί την ιξώδη απόκριση του αποσβεστήρα. Έτσι, έχουμε:

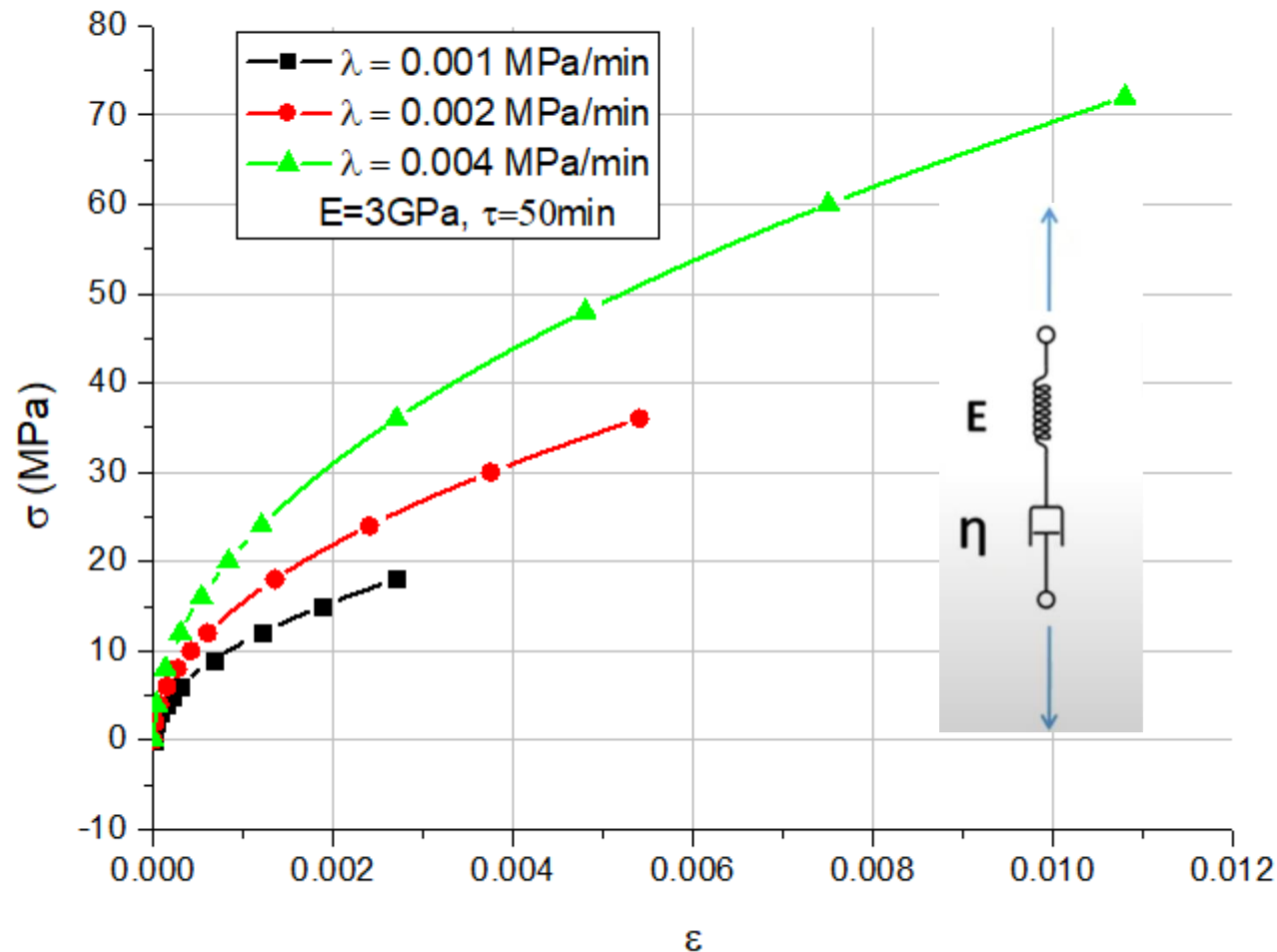
$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \lambda = \text{σταθ.} \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = \lambda.t$$

Από την χαρακτηριστική $\rightarrow \quad \sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

$$\rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \rightarrow \quad \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\lambda}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \frac{\lambda}{E} \left(t + \frac{t^2}{2\tau} \right)$$

Η τελευταία εξίσωση προβλέπει ότι αν εφαρμόσουμε σταθερό ρυθμό φόρτισης τότε ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Βέβαια αυτή η πρόβλεψη αφορά μόνο το μοντέλο Maxwell.

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell για σταθερό ρυθμό φόρτισης



Παρατηρούμε ότι:

Όσο μεγαλύτερος είναι ο
ρυθμός φόρτισης, τόσο
μεγαλύτερη είναι η τάση που
αναπτύσσεται στο υλικό για
την ίδια τιμή της
παραμόρφωσης

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης

Έστω ότι εφαρμόζουμε στο μοντέλο Maxwell σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης: $\frac{d\varepsilon}{dt} = \mu = \text{σταθ.}$

τότε από την καταστατική εξίσωση του Μοντέλου Maxwell $\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

προκύπτει ότι: $\frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \mu$

η οποία με την υπόθεση ότι για $t = 0$, $\sigma = 0$, έχει λύση:

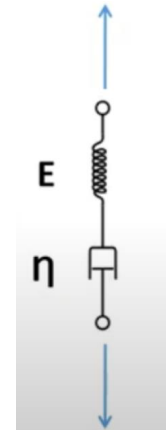
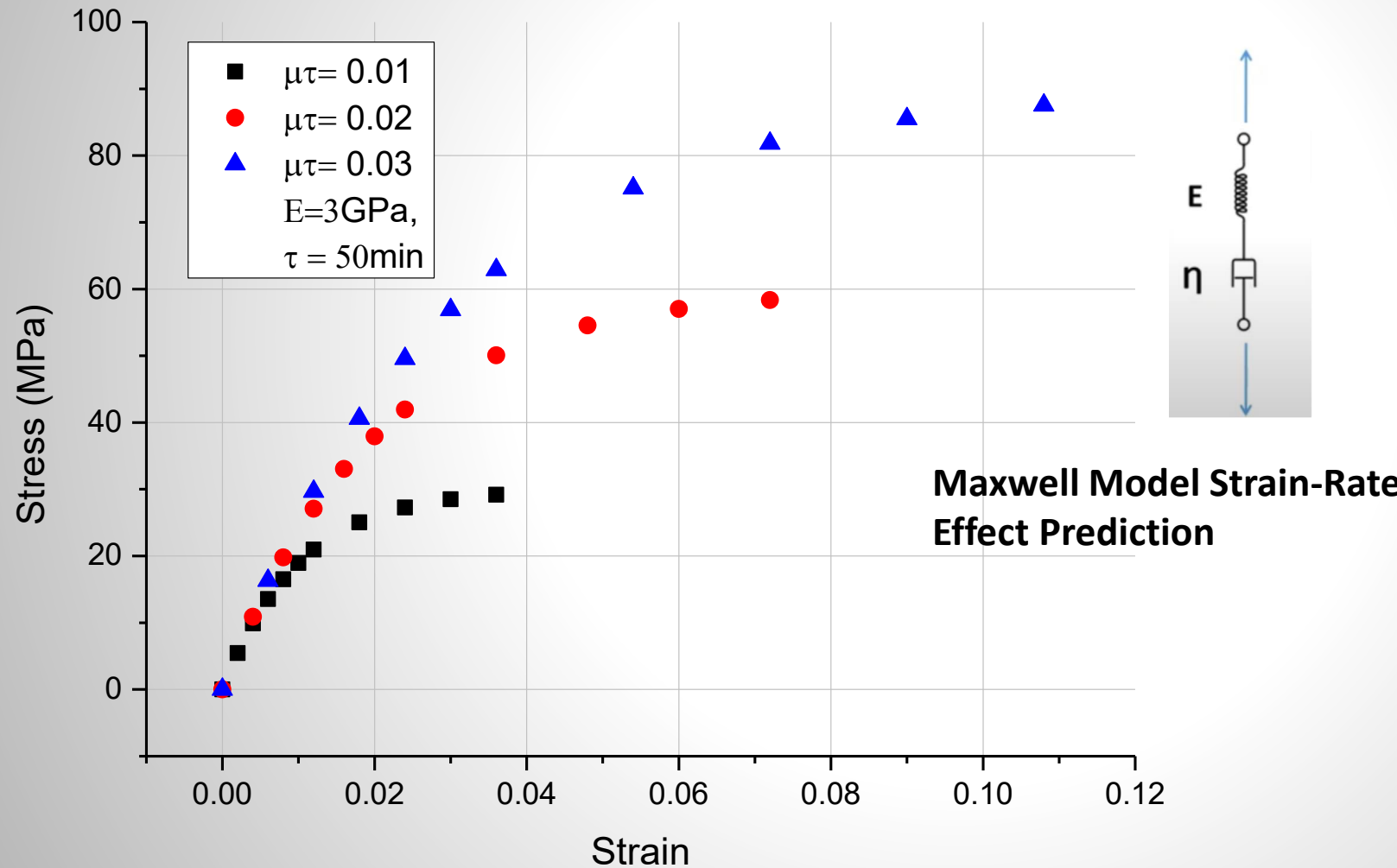
$$\sigma(t) = \eta \cdot \mu \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

ή

$$\sigma(t) = E \cdot (\mu \cdot \tau) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

Όπου $\tau = \eta/E$

Εφαρμογή του Μοντέλου Maxwell για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης



Παρατηρούμε ότι:

Όσο αυξάνει ο ρυθμός της παραμόρφωσης, μ , τόσο αυξάνει η τιμή της τάσης για σταθερή τιμή παραμόρφωσης.

Το Μοντέλο Kelvin - Voigt

Αν συνδυάσουμε παράλληλα ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα, τότε προκύπτει το πρότυπο του Voigt.

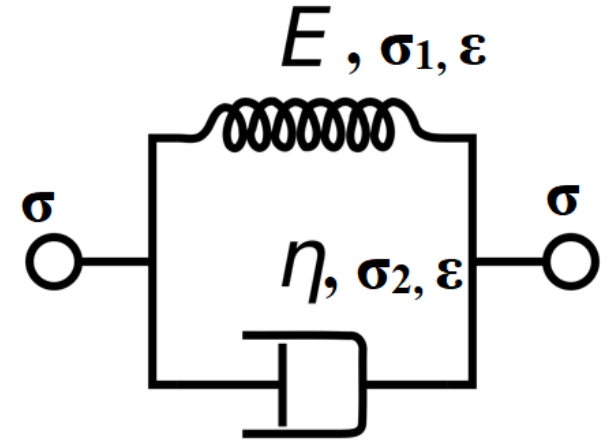
Σε αυτήν την περίπτωση, η ολική τάση σ αναλύεται στην τάση σ_1 στο ελατήριο και την τάση σ_2 στον αποσβεστήρα, ενώ η παραμόρφωση ε είναι η ίδια και στα δύο στοιχεία. Έτσι, έχουμε:

Για το ελατήριο: $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon$

Για τον αποσβεστήρα: $\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$

Για την ολική τάση:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$



**Καταστατική Εξίσωση
του Μοντέλου Voigt**

Εφαρμογή του Μοντέλου Kelvin – Voigt στον Ερπυσμό

Ας υποθέσουμε ότι υποβάλλουμε το πρότυπο Voigt σε πείραμα ερπυσμού. Αυτό σημαίνει ότι

Για $t = 0^-$, $\sigma = 0$ και για $t = 0^+$, $\sigma = \sigma_0$

Η καταστατική εξίσωση του Μοντέλου είναι :

ή

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}$$

Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση (πρώτης τάξεως) με αρχική συνθήκη,
Και βρίσκουμε:

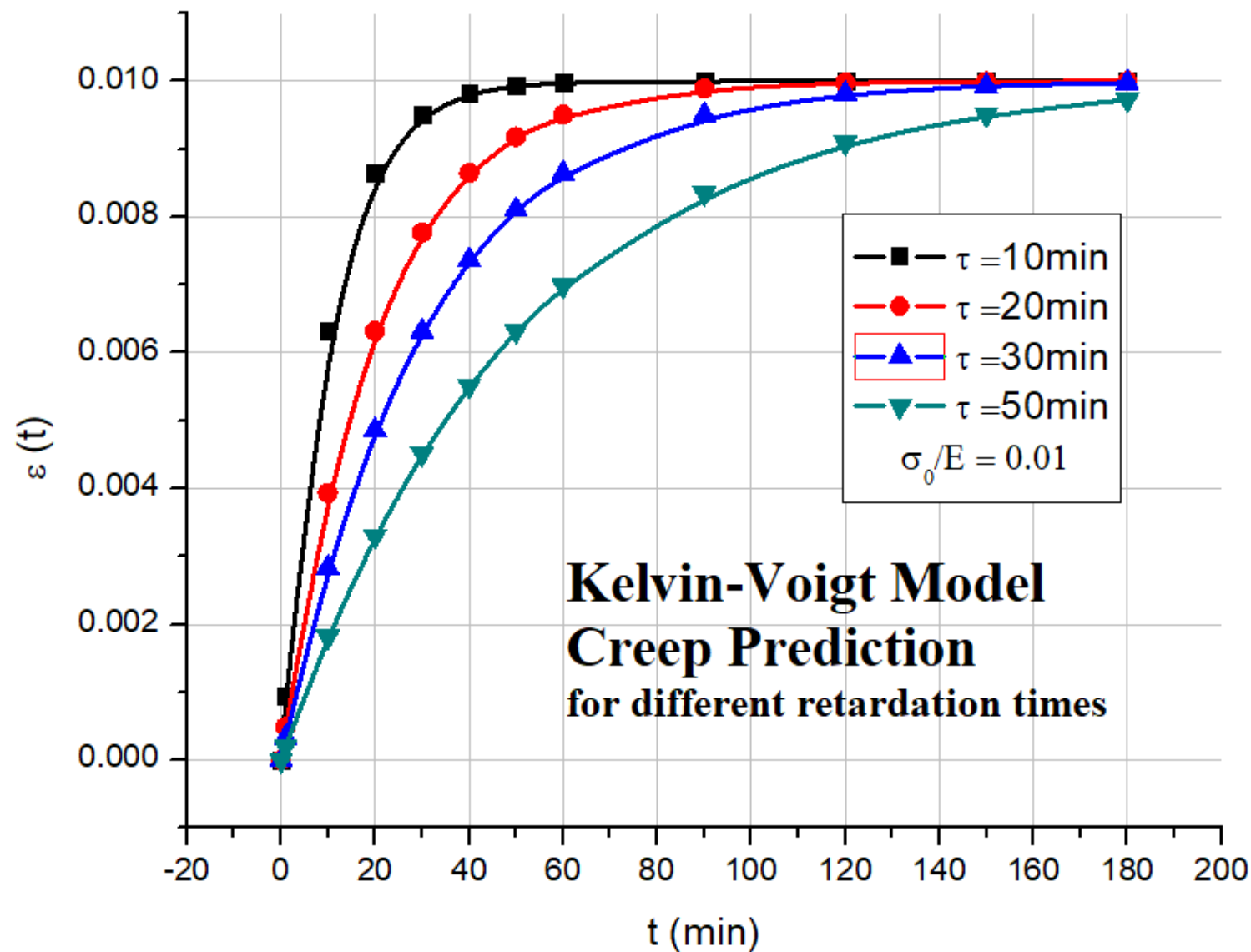
$$\varepsilon(0^+) = 0$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t} \right]$$

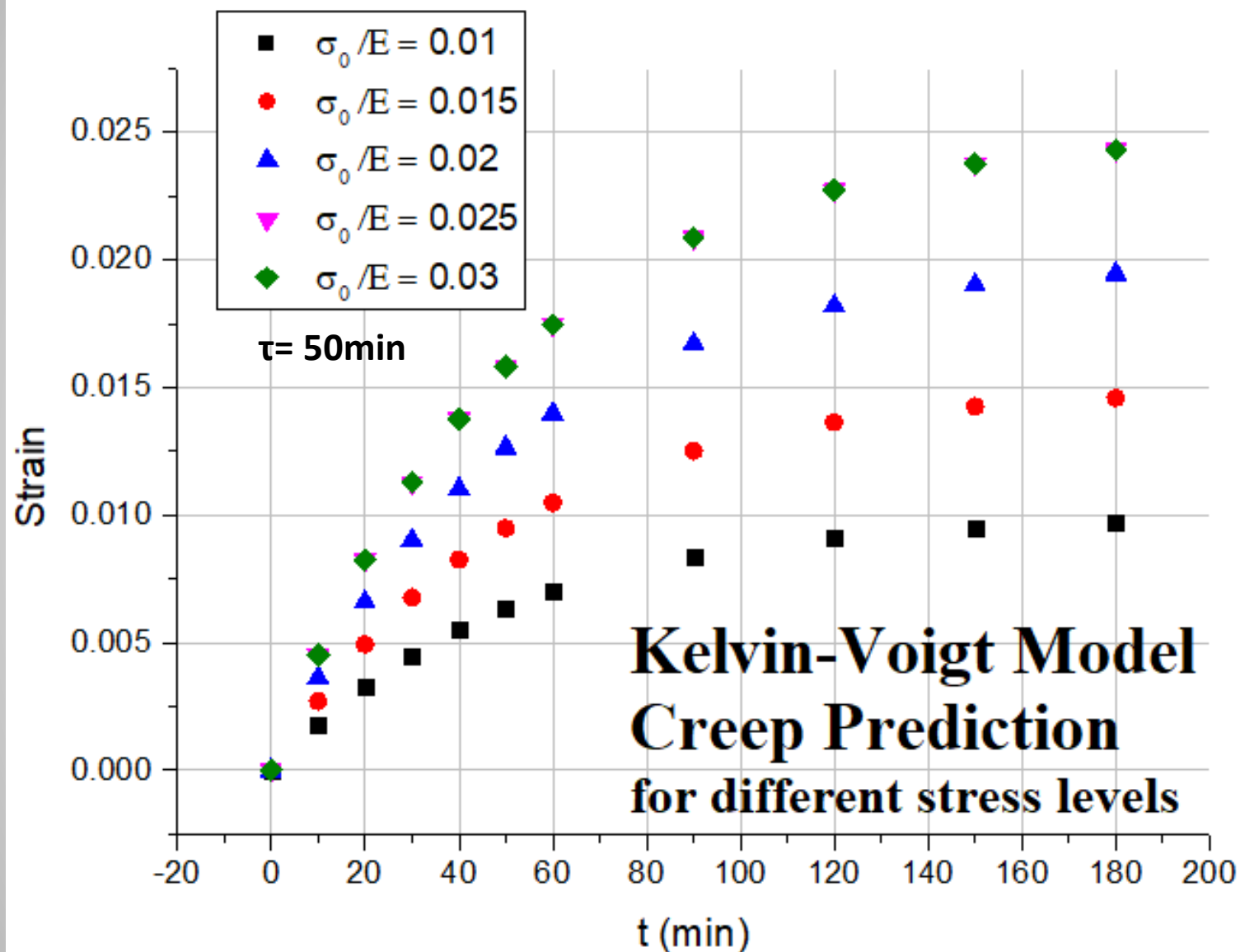
ή

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

$$\frac{\eta}{E} = \tau_{\text{ret}} = \text{χρόνος καθυστέρησης (retardation time)}$$



- Όσο μεγαλύτερος ο χρόνος καθυστέρησης, τόσο πιο αργά φθάνει η καμπύλη ερπυσμού στην οριακή τιμή της παραμόρφωσης σ_0/E
- Για τον ίδιο χρόνο, η καμπύλη ερπυσμού με τον μικρότερο χρόνο καθυστέρησης παρουσιάζει την μεγαλύτερη παραμόρφωση.



Παρατηρούμε ότι:

Σε υψηλότερα επίπεδα
τάσης, αναπτύσσονται
μεγαλύτερες
παραμορφώσεις στον ίδιο
χρόνο φόρτισης.

Μέτρο Ένδοσης για το Μοντέλο Kelvin - Voigt

Αναφερόμενοι στο πρότυπο του Voigt, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά του είναι η αναμενόμενη, γιατί στην αρχή το ελατήριο περιορίζεται από τον αποσβεστήρα ενώ στη συνέχεια, καθώς ο αποσβεστήρας εκτείνεται, παραμορφώνεται καθυστερημένα. Τελικά, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, η παραμόρφωση στον αποσβεστήρα παίρνει την τιμή

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E_\infty}$$

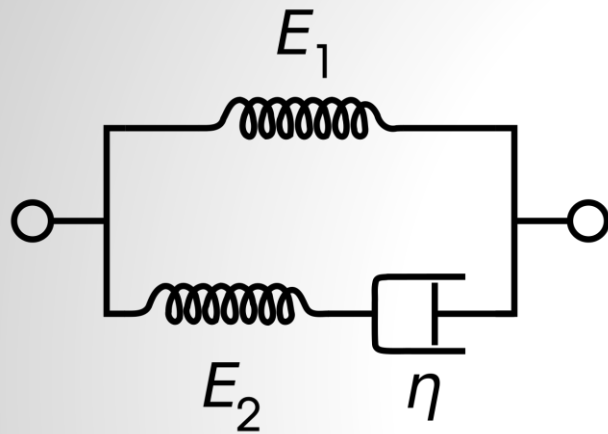
$$C(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$



$$C(t) = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ret}}\right) \right]$$

Παρατηρούμε ότι **το Μέτρο Ένδοσης (Creep Compliance), είναι ανεξάρτητο του επιπέδου τάσης**. Αυτό σημαίνει ότι αν στο ίδιο υλικό εκτελέσουμε έναν αριθμό πειραμάτων ερπυσμού σε διάφορα επίπεδα τάσης, τότε για όλα τα επίπεδα τάσης θα υπάρξει μία και μοναδική καμπύλη Μέτρου Ένδοσης συναρτήσει του χρόνου.

To Μοντέλο Standard Linear Solid (Maxwell Presentation)



For parallel components: $\sigma_{tot} = \sigma_1 + \sigma_2$, and $\epsilon_{tot} = \epsilon_1 = \epsilon_2$.

For series components: $\sigma_{tot} = \sigma_1 = \sigma_2$, and $\epsilon_{tot} = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

$$\sigma_{tot} = \sigma_m + \sigma_{S_1}$$

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_m = \epsilon_{S_1}$$

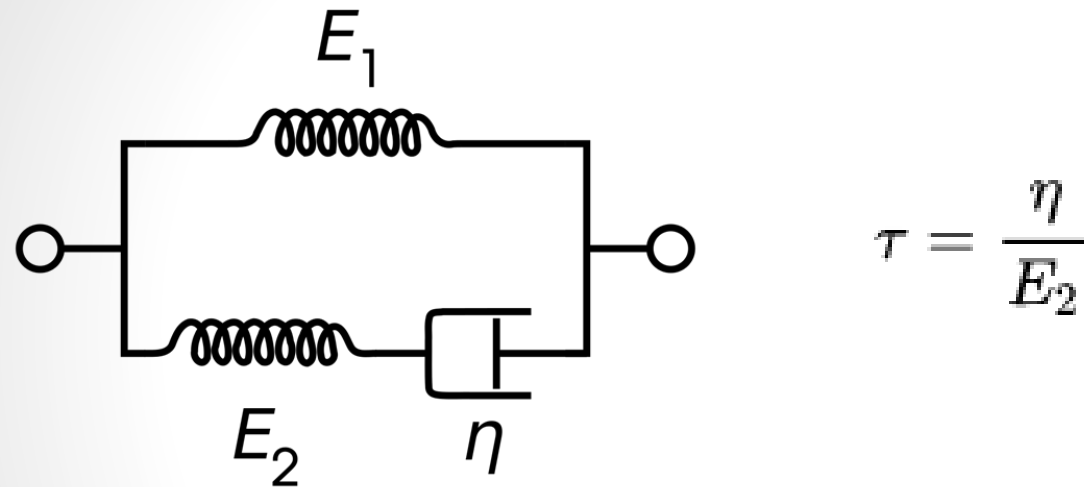
$$\sigma_m = \sigma_D = \sigma_{S_2}$$

$$\epsilon_m = \epsilon_D + \epsilon_{S_2}$$

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma(t)}{dt} = E_1 \epsilon(t) + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

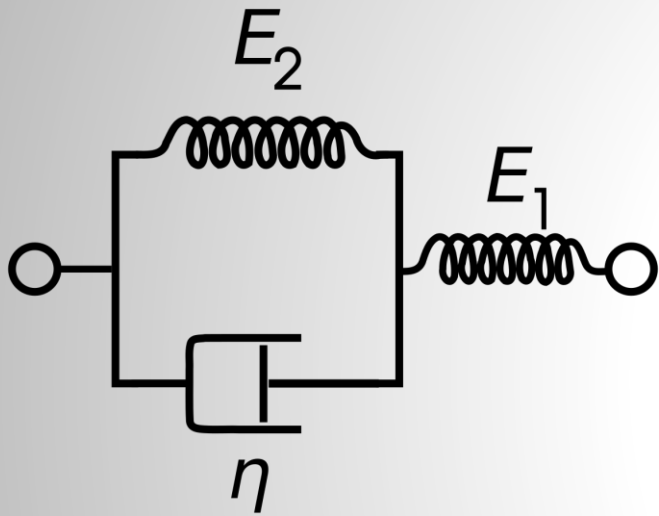
$$\tau = \frac{\eta}{E_2}$$

Η πρόβλεψη του Μοντέλου Standard Linear Solid
(Maxwell Presentation) για την χαλάρωση



$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left(E_1 + E_2 \exp(-t/\tau) \right)$$

To Μοντέλο Standard Linear Solid (Kelvin Presentation)



$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon(t) + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_k = \sigma_{S_1}$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_k + \varepsilon_{S_1}$$

$$\sigma_k = \sigma_D + \sigma_{S_2}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_D = \varepsilon_{S_2}$$

$$\bar{\tau} = \frac{\eta}{E_2}$$

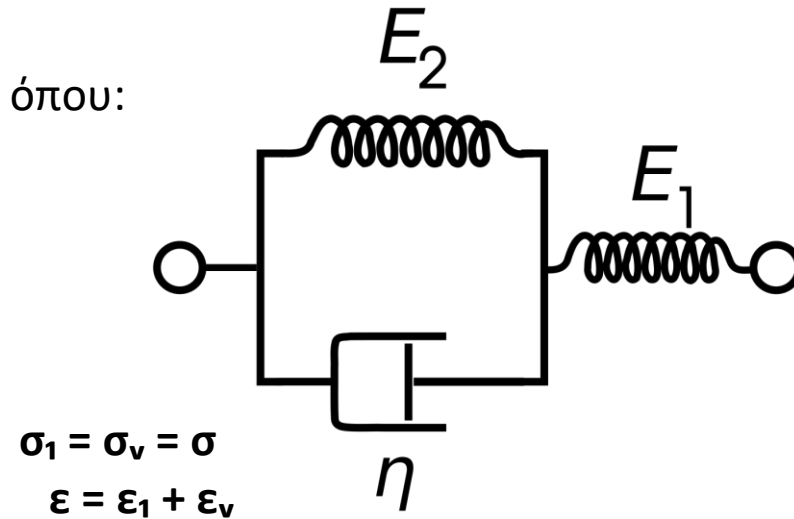
Αναλυτική λύση του μοντέλου (SLS)

Το ζητούμενο είναι η **καταστατική εξίσωση** ενός συστήματος όπου:

- Το ελατήριο E_1 είναι σε σειρά με
- Ένα μοντέλο Voigt (παράλληλα ελατήριο E_2 και ιξώδες η).

Στη σύνδεση σε σειρά:

- Το φορτίο (τάση) είναι κοινό:
- Η ολική παραμόρφωση είναι άθροισμα:



1. Σχέσεις των επιμέρους στοιχείων

Ελατήριο E_1 (Hooke):

$$\sigma = E_1 \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}$$

Voigt ($E_2 \parallel \eta$):

$$\sigma = E_2 \epsilon_v + \eta \dot{\epsilon}_v$$

Αναλυτική λύση του μοντέλου (SLS)

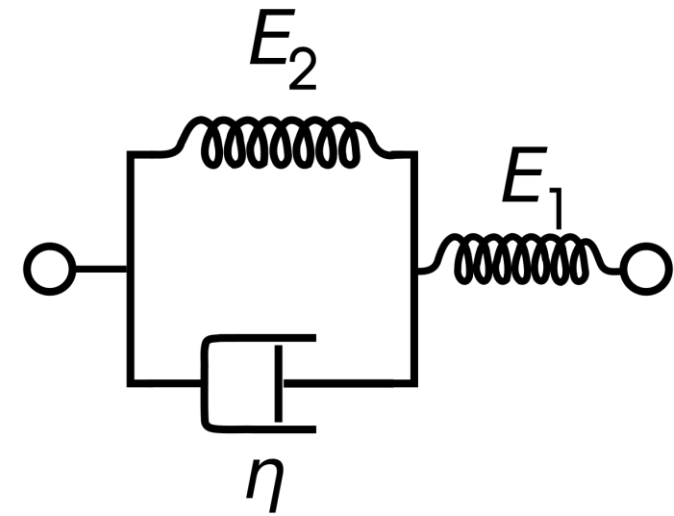
2. Σύνδεση σε σειρά

Ολική παραμόρφωση:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_v = \frac{\sigma}{E_1} + \varepsilon_v \Rightarrow \varepsilon_v = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1}$$

Αντικαθιστούμε στο Voigt:

$$\sigma = E_2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \eta \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right)$$



Αναλυτική λύση του μοντέλου (SLS)

3. Αναμόρφωση

Αναπτύσσουμε:

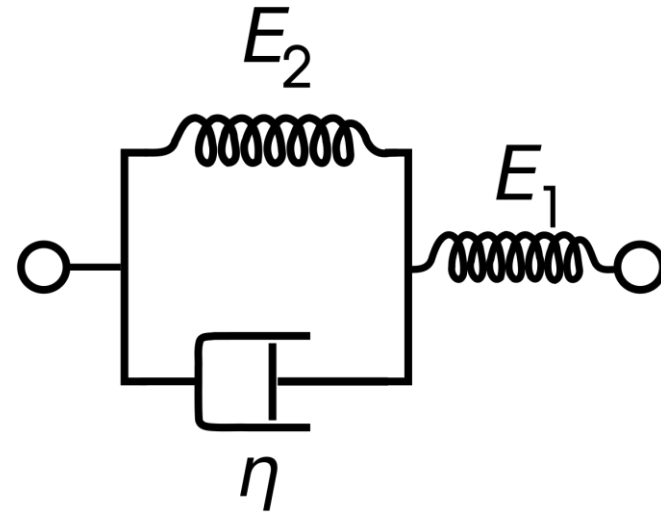
$$\sigma = E_2 \varepsilon - \frac{E_2}{E_1} \sigma + \eta \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}$$

Ομαδοποιούμε τους όρους σε σ και $\dot{\sigma}$:

$$\sigma \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = E_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

Πολλαπλασιάζουμε με E_1 :

$$(E_1 + E_2) \sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon}$$



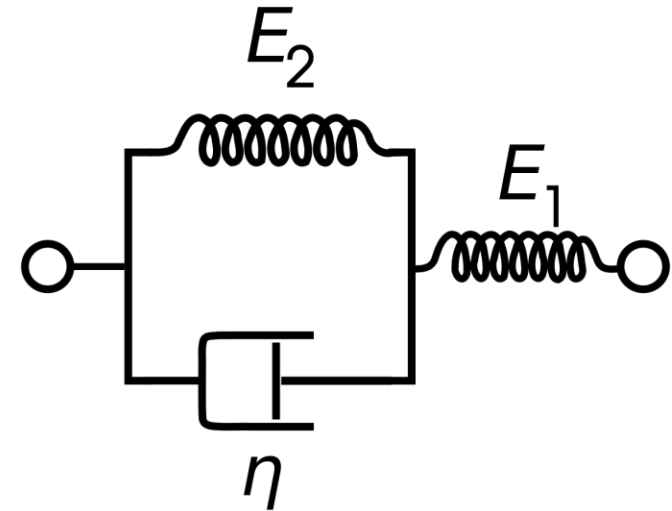
Αναλυτική λύση του μοντέλου (SLS)

Τελική καταστατική εξίσωση του μοντέλου

$$\boxed{\eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon}}$$

Αυτή είναι η ζητούμενη διαφορική καταστατική σχέση του συστήματος **ελατήριο E_1 σε σειρά με μοντέλο Voigt (E_2, η)**.

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}$$



Εύρεση της Creep Compliance του μοντέλου

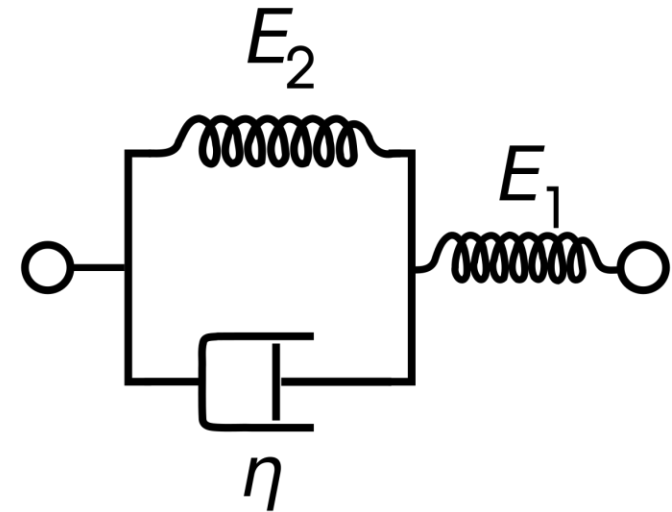
1. CREEP COMPLIANCE $J(t)$

Εφαρμόζουμε **βηματική τάση** $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$.

Συνολική παραμόρφωση:

• Το ελατήριο E_1 παραμορφώνεται **στιγμιαία**:

$$\varepsilon_1(0^+) = \frac{\sigma_0}{E_1}$$



Εύρεση της Creep Compliance του μοντέλου

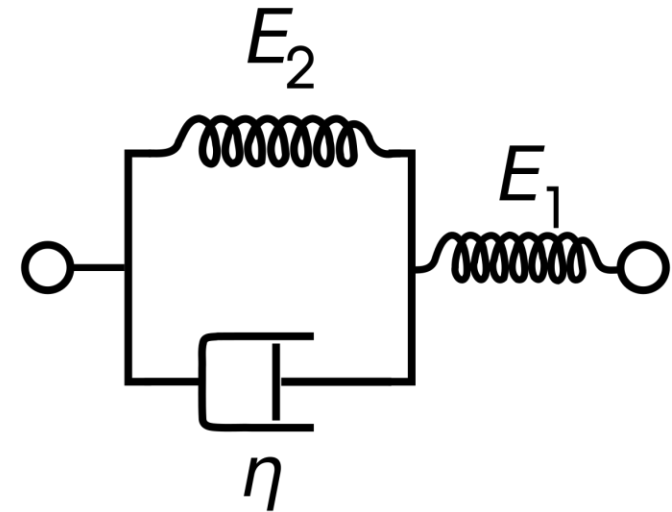
- Το Voigt **δεν παραμορφώνεται στιγμιαία**

(το dashpot εμποδίζει την άμεση παραμόρφωση):

$$\varepsilon_v(0^+) = 0$$

Η μακροχρόνια παραμόρφωση του Voigt είναι:

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{\sigma_0}{E_2}$$



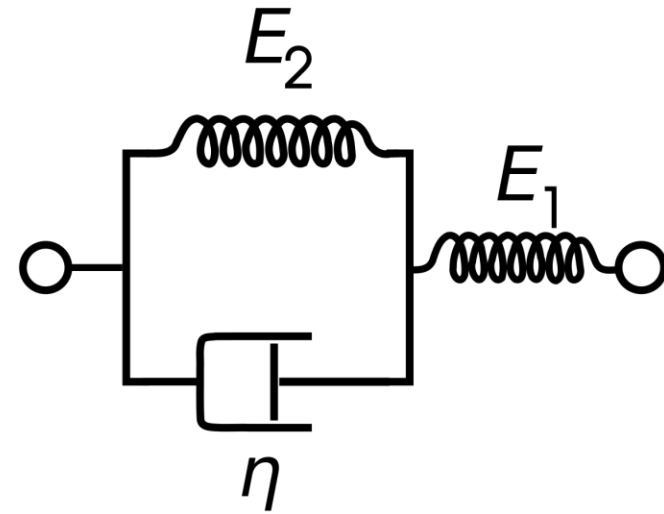
Εύρεση της Creep Compliance του μοντέλου

Η ολική παραμόρφωση:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-t/\tau}), \tau = \frac{\eta}{E_2}$$

Άρα η Creep Compliance:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/\tau})$$



Εύρεση του Relaxation Modulus

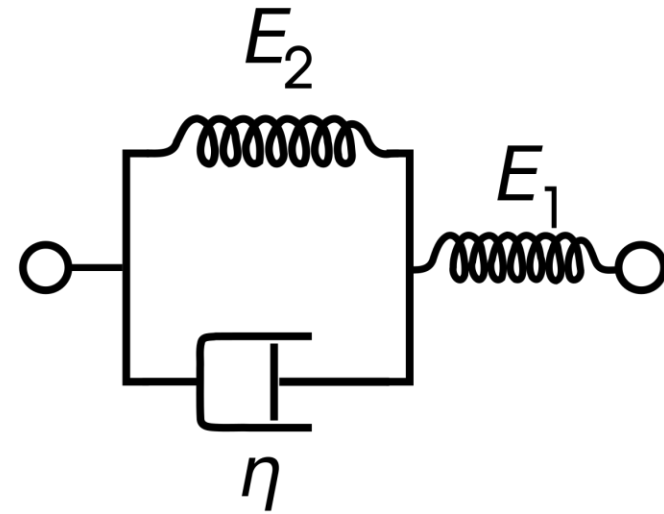
2. RELAXATION MODULUS $G(t)$

Εφαρμόζουμε βηματική παραμόρφωση $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$.

Στο $t = 0^+$:

Το Voigt δεν μπορεί να παραμορφωθεί στιγμιαία $\Rightarrow$ όλη η παραμόρφωση επιβάλλεται στο ελατήριο E_1 :

$$\sigma(0^+) = E_1 \varepsilon_0$$



Εύρεση του Relaxation Modulus

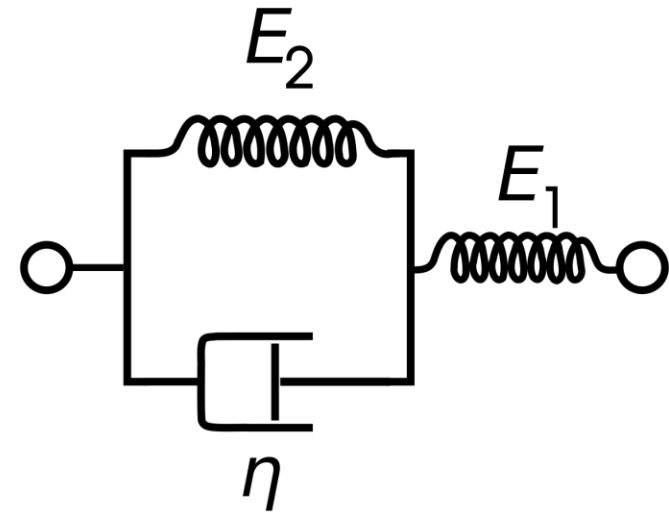
Μακροχρόνια κατάσταση:

Η τάση τείνει στην τάση του **ισοδύναμου ελατηρίου** των E_1 και E_2 σε παράλληλη μορφή του SLS:

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

Μορφή αποδιέγερσης

$$\sigma(t) = E_{\text{eff}} \varepsilon_0 + (E_1 - E_{\text{eff}}) \varepsilon_0 e^{-t/\tau_r}, \quad \tau_r = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$



Εύρεση του Relaxation Modulus

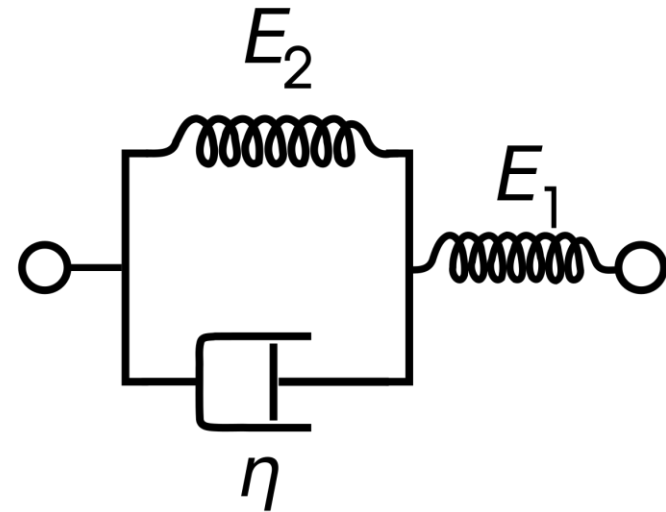
Άρα το Relaxation Modulus:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_{\text{eff}} + (E_1 - E_{\text{eff}})e^{-t/\tau_r} \quad \left(E_{\text{eff}} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad \tau_r = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \right)$$

✓Τελικές Απαντήσεις

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-tE_2/\eta})$$

$$G(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \left(E_1 - \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right) e^{-t(E_1 + E_2)/\eta}$$



Σταθερός ρυθμός φόρτισης

Σταθερός ρυθμός φόρτισης $\dot{\sigma} = \lambda = \text{σταθ.}$

Η καταστατική εξίσωση του μοντέλου (που βρέθηκε προηγουμένως) είναι:

$$\eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\sigma'(t) = \lambda \Rightarrow \sigma(t) = \lambda t$$

Αντικαθιστούμε την $\sigma(t)$ και $\dot{\sigma} = \lambda$ στην (1):

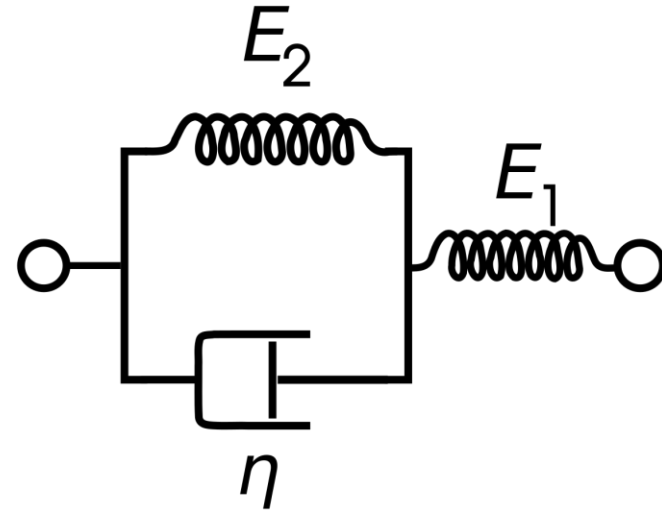
$$\eta \lambda + (E_1 + E_2) \lambda t = E_1 E_2 \varepsilon(t) + E_1 \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

Διαιρούμε με $E_1 \eta$:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon = \frac{\lambda}{E_1} + \frac{(E_1 + E_2) \lambda}{E_1 \eta} t$$

Αυτή είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης.

Χρησιμοποιούμε παράγοντα ολοκλήρωσης $e^{(E_2/\eta)t}$.



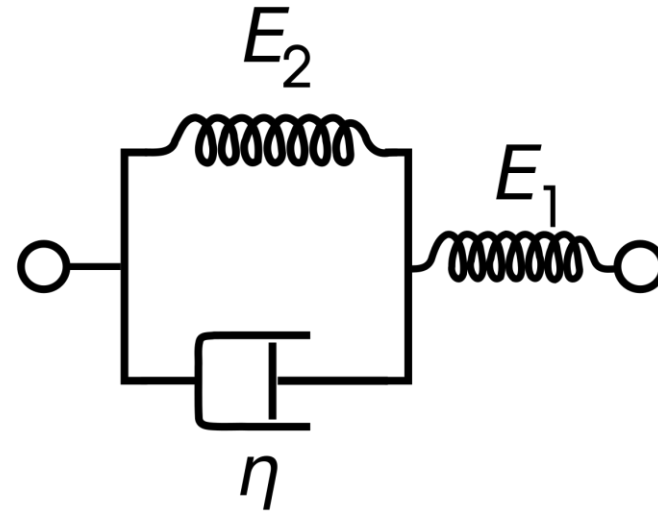
Σταθερός ρυθμός φόρτισης

Τελική μορφή της λύσης

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \quad (\tau = \eta/E_2)$$

όπου:

- ο πρώτος όρος $\frac{\lambda}{E_1} t$ είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου E_1
- ο δεύτερος όρος είναι η συμβολή του Voigt, το οποίο συμπεριφέρεται ιξωδοελαστικά



Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό φόρτισης

$$\sigma' = \lambda, \sigma(t) = \lambda t$$

Η παραμόρφωση που βρέθηκε είναι:

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} (t - \tau + \tau e^{-t/\tau})$$
$$\tau = \frac{\eta}{E_2}$$

Όριο $t \rightarrow 0$

Αναπτύσσουμε τον εκθετικό:

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + O(t^2)$$

Ο δεύτερος όρος:

$$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \approx t - \tau + \tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = 0 + O(t^2)$$

Άρα:

$$\varepsilon(t) \approx \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} O(t^2)$$

✓Τελικό όριο:

$$\varepsilon(t \rightarrow 0) = \frac{\lambda}{E_1} t$$

δηλαδή **στιγμιαία αποκρίνεται μόνο το ελατήριο E_1** , όπως πρέπει, αφού το Voigt δεν παραμορφώνεται στιγμιαία (λόγω του dashpot).

Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό φόρτισης

$$\sigma' = \lambda, \sigma(t) = \lambda t$$

Η παραμόρφωση που βρέθηκε είναι:

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} (t - \tau + \tau e^{-t/\tau})$$
$$\tau = \frac{\eta}{E_2}$$

Όριο $t \rightarrow \infty$

Ο εκθετικός όρος $\rightarrow 0$:

$$\varepsilon(t) \rightarrow \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} (t - \tau)$$

Άρα:

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \lambda t \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \frac{\lambda \tau}{E_2}$$

Η παραμόρφωση αυξάνεται **γραμμικά** με κλίση:

$$\dot{\varepsilon}(\infty) = \lambda \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

δηλαδή το υλικό αστοχεί με *ιξωδοελαστικό ερπυσμό*.

Σταθερός Ρυθμός Παραμόρφωσης

Η καταστατική εξίσωση του μοντέλου (που βρέθηκε προηγουμένως) είναι:

$$\eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mu \Rightarrow \varepsilon(t) = \mu t$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

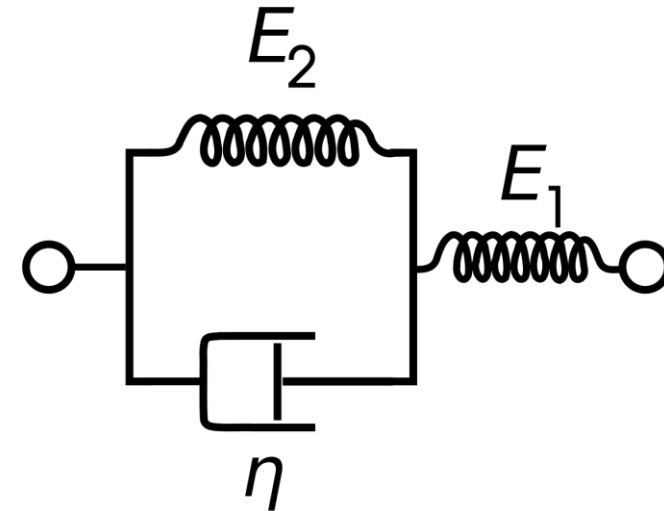
$$\eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 (\mu t) + E_1 \eta \mu$$

Μεταφέρουμε:

$$\eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \mu t + E_1 \eta \mu$$

Διαιρούμε με η :

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = \frac{E_1 E_2}{\eta} \mu t + E_1 \mu$$



Σταθερός Ρυθμός Παραμόρφωσης

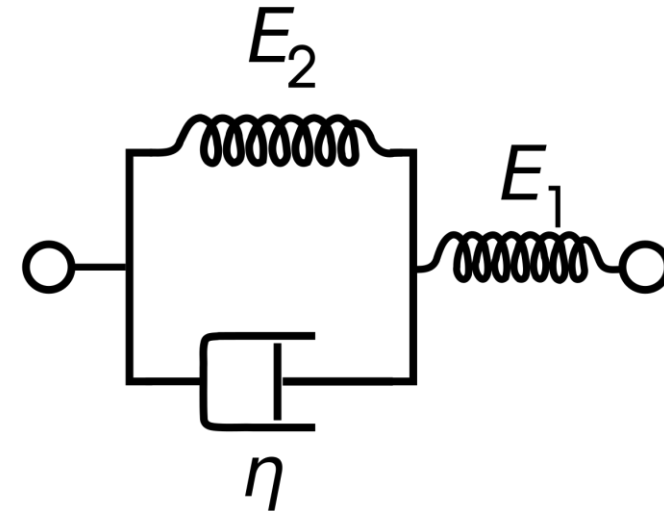
Τελική λύση:

$$\sigma(t) = \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau + \mu E_2 \tau e^{-t/\tau}$$

$$(\tau = \eta / (E_1 + E_2))$$

όπου:

- ο όρος $\mu(E_1 + E_2)t$ αντιστοιχεί στην ασυμπτωτική «πλαστική» ιξώδη συμπεριφορά,
- ο εκθετικός όρος δείχνει την αποδιέγερση του Voigt.



Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης

$$\varepsilon = \mu, \quad \varepsilon(t) = \mu t$$

Η τάση που βρέθηκε είναι:

$$\sigma(t) = \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau + \mu E_2 \tau e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

Όριο $t \rightarrow 0$

Αναπτύσσουμε πάλι:

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + O(t^2)$$

Ο εκθετικός όρος γίνεται:

$$\mu E_2 \tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = \mu E_2 \tau - \mu E_2 t$$

Άρα:

$$\sigma(t) \approx \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau + \mu E_2 \tau - \mu E_2 t$$

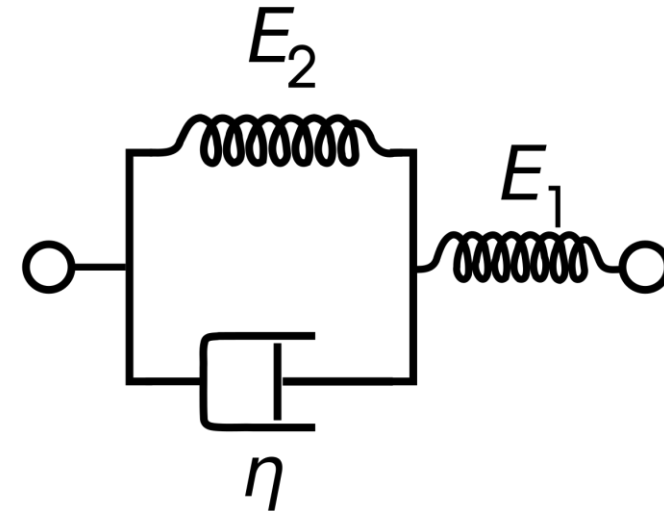
$$\sigma(t) \approx \mu E_1 t$$

Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης

Τελικό όριο:

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \mu E_1 t$$

Δηλαδή **αρχικά αντιδρά μόνο το ελατήριο E_1** , γιατί το Voigt δεν προλαβαίνει να παραμορφωθεί στιγμιαία.



Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης

$$\dot{\varepsilon} = \mu, \quad \varepsilon(t) = \mu t$$

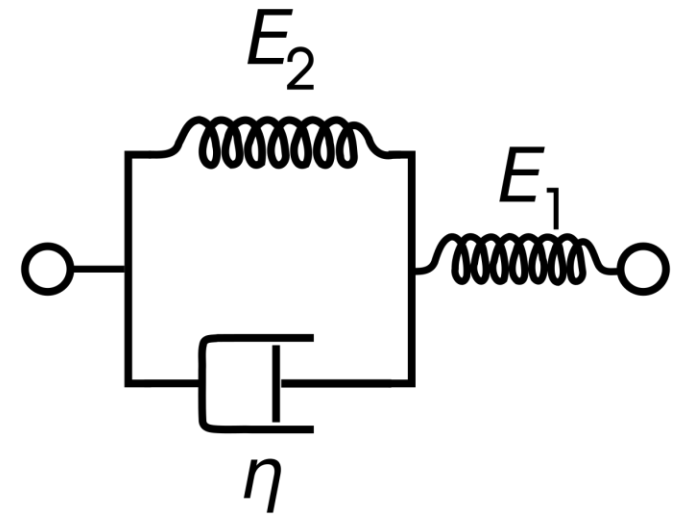
Η τάση που βρέθηκε είναι:

$$\sigma(t) = \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau + \mu E_2 \tau e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

Όριο $t \rightarrow \infty$

Ο εκθετικός όρος $\rightarrow 0$: $\sigma(t) \rightarrow \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau$



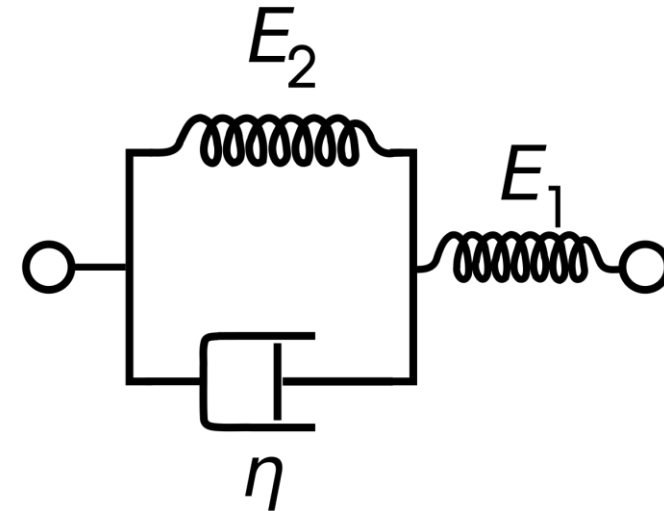
Οριακές τιμές για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης

Τελικό όριο:

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau$$

Η τάση αυξάνει **γραμμικά**, δηλαδή το υλικό εμφανίζει ιξωδοελαστική σκλήρυνση, με ασυμπτωτική κλίση:

$$\dot{\sigma}(\infty) = \mu(E_1 + E_2)$$



Τελική Σύνοψη ορίων

Για σταθερό ρυθμό φόρτισης $\dot{\sigma} = \lambda$:

•Μικροί χρόνοι:

$$\varepsilon(t) \approx \frac{\lambda}{E_1} t$$

•Μεγάλοι χρόνοι:

$$\varepsilon(t) \sim \lambda t \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

Για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon} = \mu$:

•Μικροί χρόνοι:

$$\sigma(t) \approx \mu E_1 t$$

•Μεγάλοι χρόνοι:

$$\sigma(t) \sim \mu (E_1 + E_2) t$$

Τελικές απαντήσεις

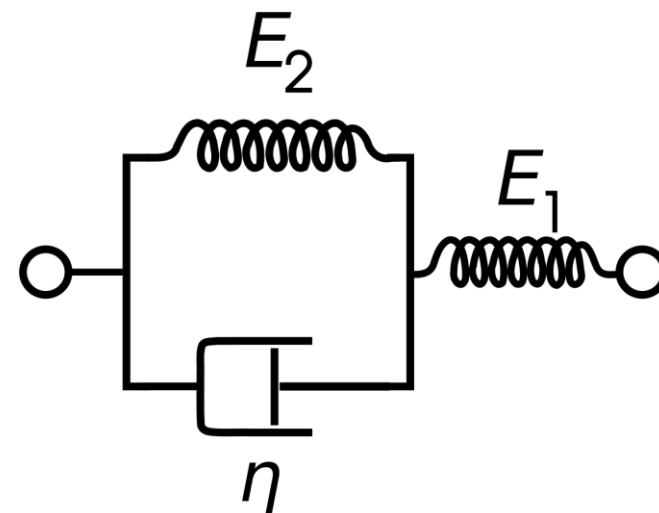
Τελικές απαντήσεις συνοπτικά

Για σταθερό ρυθμό φόρτισης $\dot{\sigma} = \lambda$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{E_1} t + \frac{\lambda}{E_2} (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}), \tau = \frac{\eta}{E_2}$$

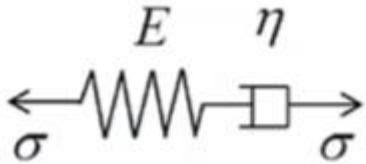
Για σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon} = \mu$:

$$\sigma(t) = \mu(E_1 + E_2)t - \mu E_2 \tau + \mu E_2 \tau e^{-t/\tau}, \tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

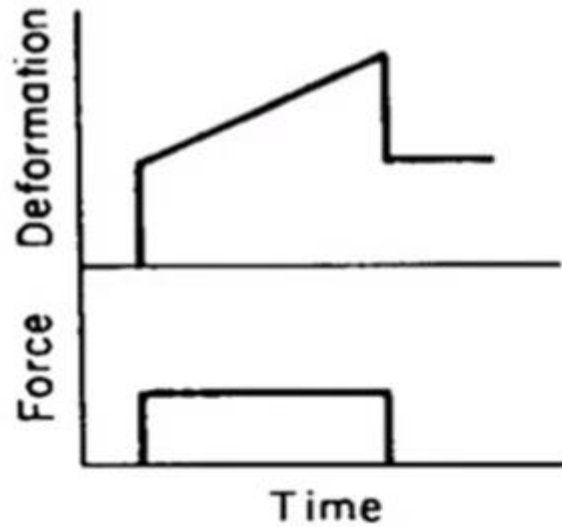


Βισκοελαστικά Μοντέλα

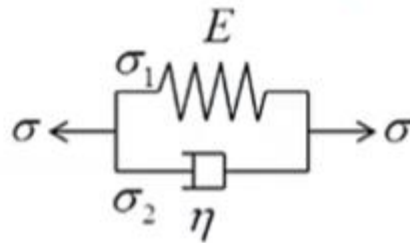
Maxwell



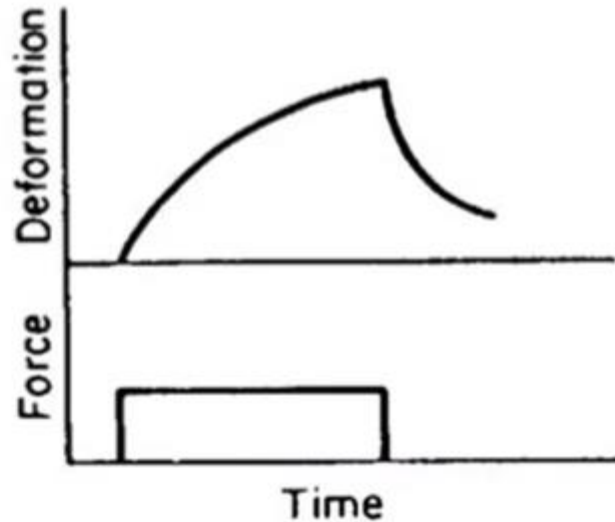
$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon}$$



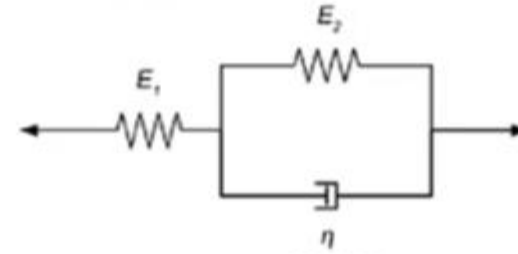
Kelvin - Voigt



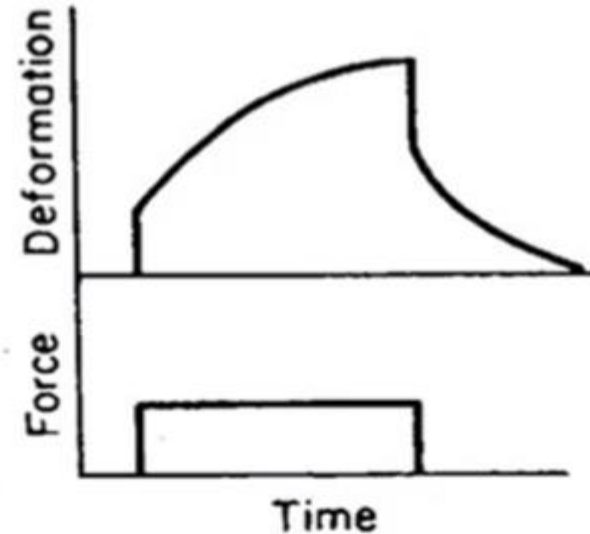
$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon}$$



Standard Linear Viscoelastic



$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon}$$



Maxwell

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon}$$

Creep recovery response

$$\epsilon(t) = \sigma_o \left(\frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E} \right)$$

At $t = 0$

$$\epsilon(0) = \sigma_o / E$$

Stress relaxation

- the material is subjected to a constant strain ϵ_0 at $t = 0$

$$\sigma(t) = \epsilon_o E(t)$$

where $E(t) = E e^{-t/t_R}$, $t_R = \frac{\eta}{E}$

Kelvin - Voigt

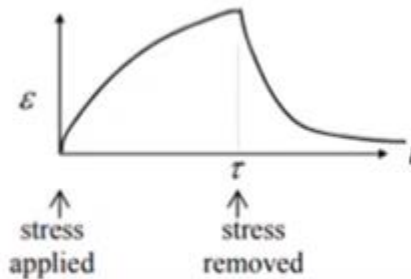
$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon}$$

Creep recovery response

- If a load σ_o is applied suddenly to the Kelvin model

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} (1 - e^{-(E/\eta)t})$$

- When the Kelvin model is unloaded



$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} e^{-(E/\eta)t} (e^{(E/\eta)\tau} - 1), \quad t \geq \tau$$

Standard Linear Viscoelastic

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon}$$

Creep recovery response

Strain at constant load

$$\epsilon(t) = \sigma_o J(t)$$

where $J(t) = \frac{1}{E_1} e^{-(E_2/\eta)t} + \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} (1 - e^{-(E_2/\eta)t})$

Recovery after removal of the load at time τ

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E_2} e^{-(E_2/\eta)t} (e^{(E_2/\eta)\tau} - 1)$$