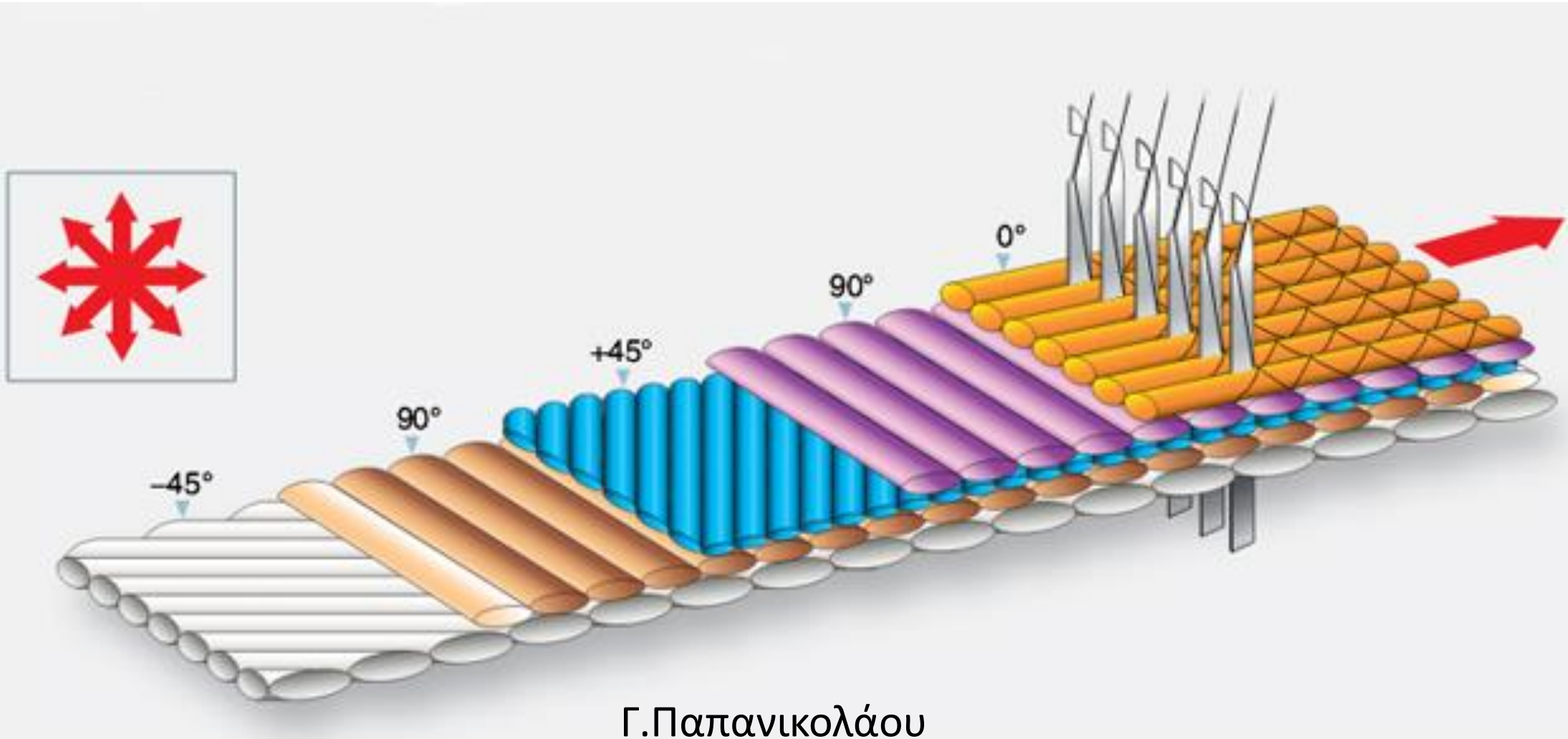
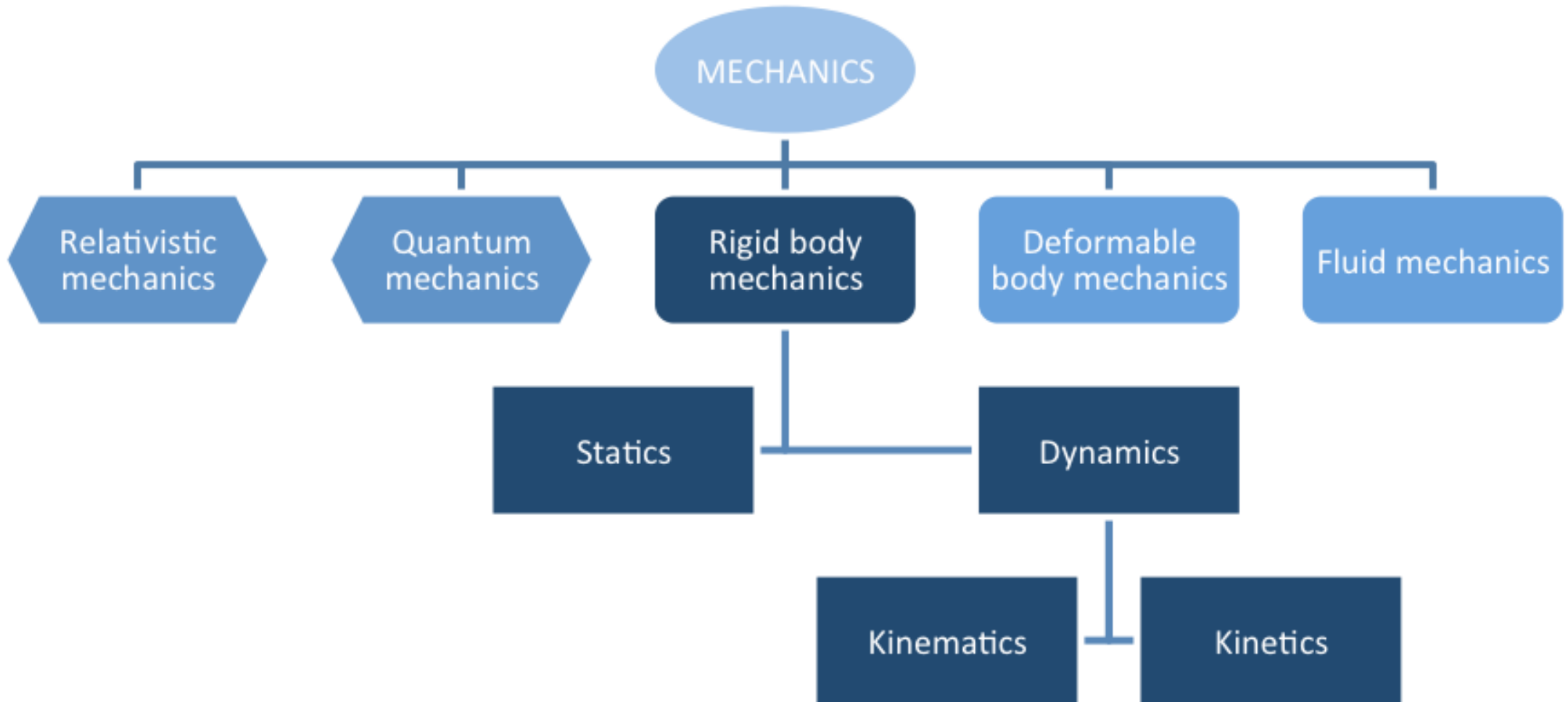
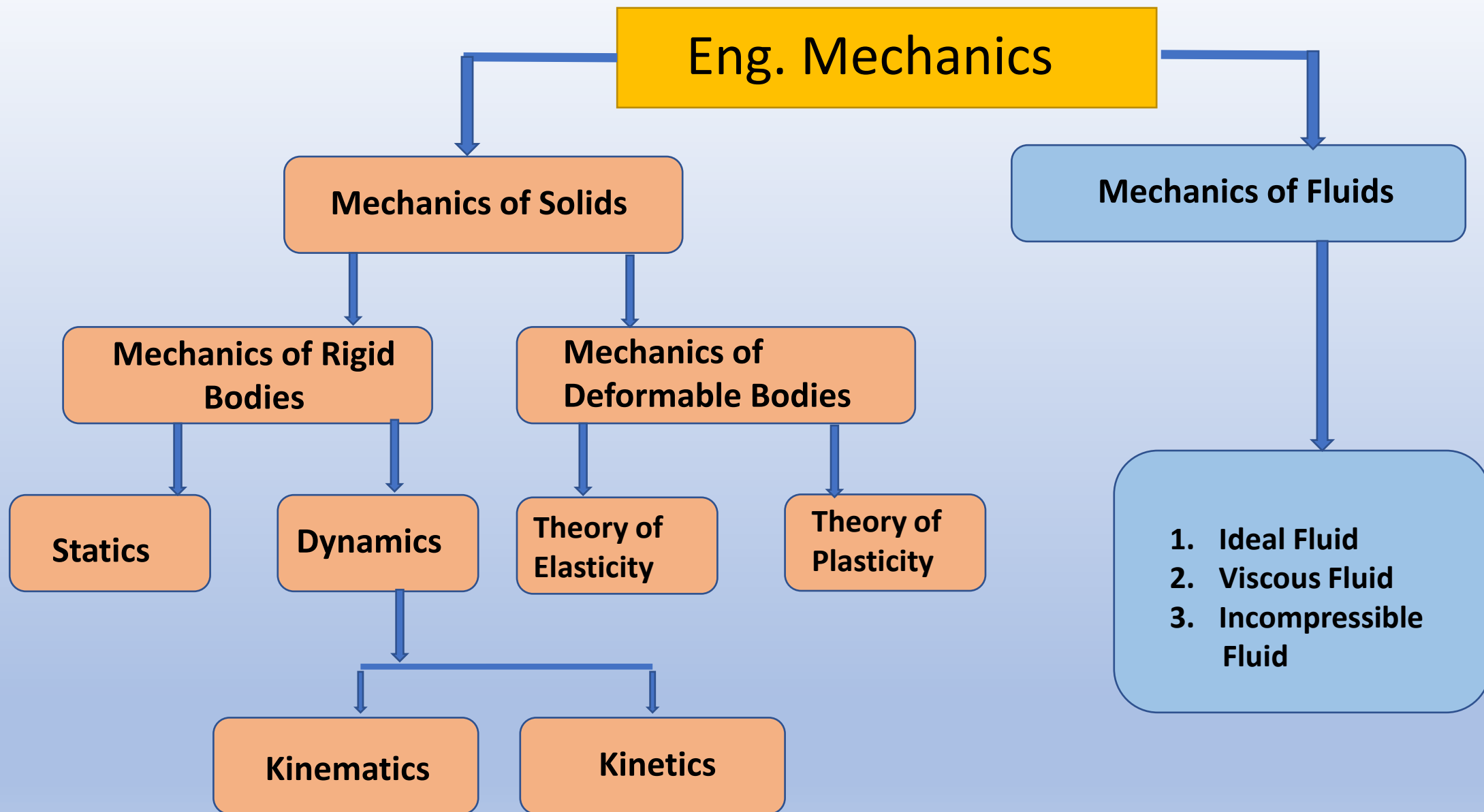


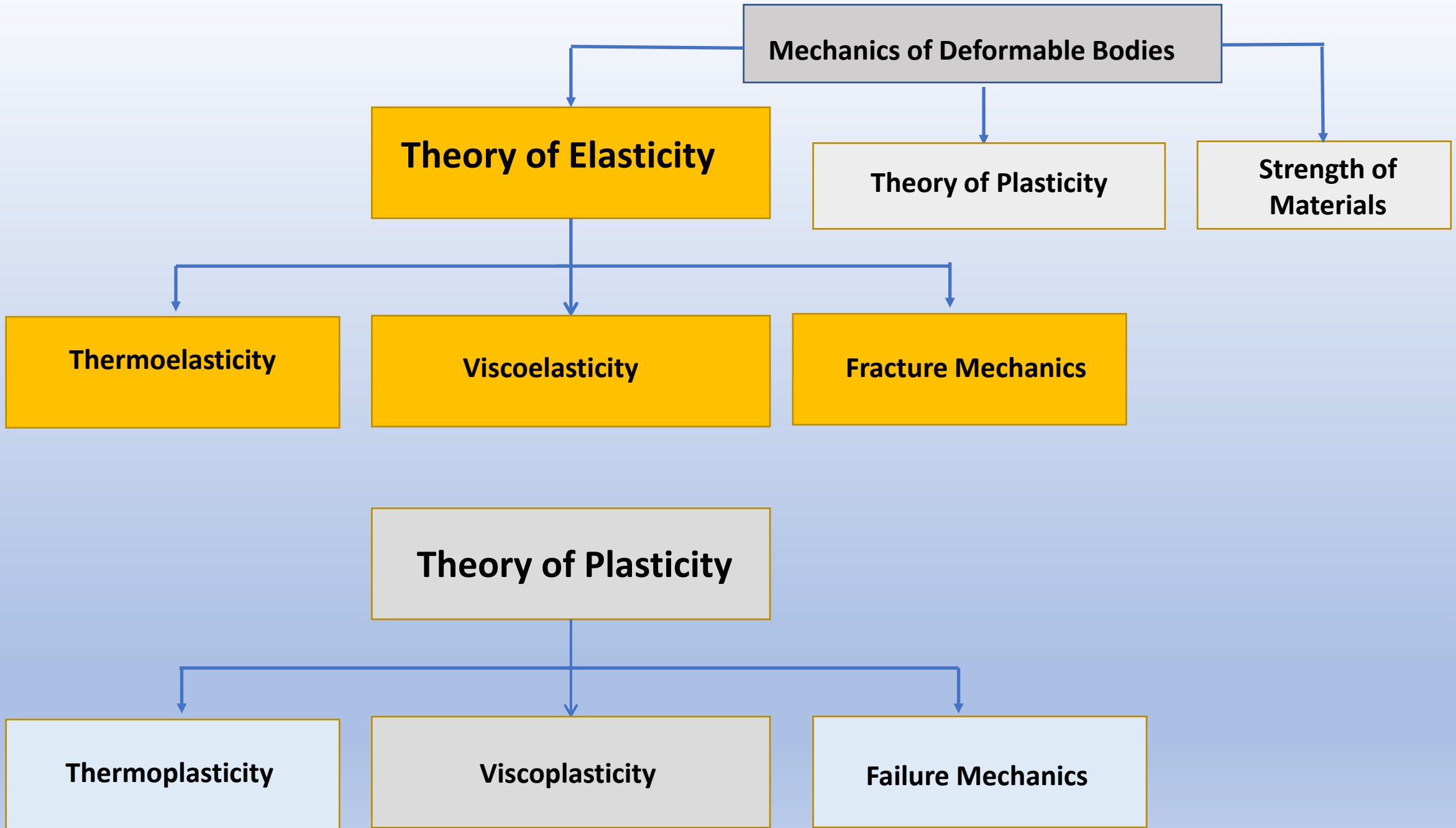
Εισαγωγή στη Μηχανική των Πολυμερών



Εισαγωγικές Έννοιες







Τύποι Δυνάμεων

Κατηγορίες δυνάμεων

1. **Δυνάμεις επαφής** (δυνάμεις οι οποίες ασκούνται όταν ένα σώμα βρίσκεται σε επαφή με κάποιο άλλο) .
2. **Δυνάμεις από απόσταση** (Βαρυτικές, Ηλεκτρικές , Μαγνητικές δυνάμεις)

Σε ένα σύστημα σωμάτων διακρίνουμε δύο είδη δυνάμεων:

- α) Αυτές που προέρχονται αποκλειστικά από τα σώματα που αποτελούν το σύστημα και τις οποίες ονομάζουμε **εσωτερικές**,
- β) Δυνάμεις που προέρχονται από άλλα σώματα και οι οποίες ονομάζονται **εξωτερικές**.

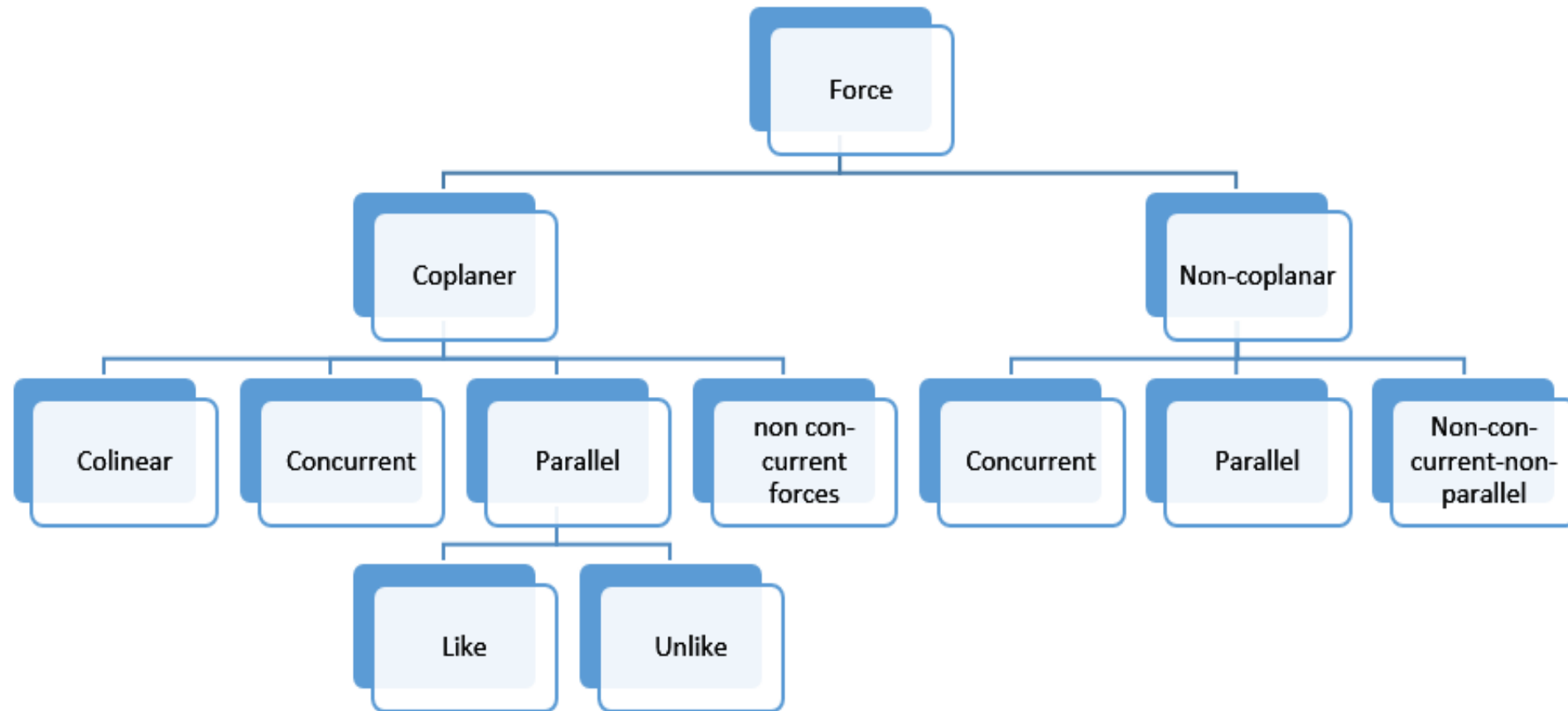
Τύποι Δυνάμεων

Μια **χωρική δύναμη ή δύναμη πεδίου** είναι μια δύναμη που δρα σε όλο τον όγκο ενός σώματος. Οι δυνάμεις λόγω της βαρύτητας, των ηλεκτρικών πεδίων και των μαγνητικών πεδίων αποτελούν παραδείγματα χωρικών δυνάμεων. Οι δυνάμεις του σώματος αντιτίθενται στις δυνάμεις επαφής ή στις επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια ενός αντικειμένου.

Οι ορθές δυνάμεις και οι διατμητικές δυνάμεις μεταξύ των αντικειμένων είναι **επιφανειακές δυνάμεις** καθώς ασκούνται στην επιφάνεια ενός αντικειμένου. Όλες οι επιφανειακές δυνάμεις καθώς και οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των αντικειμένων θεωρούνται επίσης ως **επιφανειακές δυνάμεις**.

Φανταστικές δυνάμεις όπως η φυγόκεντρη δύναμη, η δύναμη του Euler και το φαινόμενο Coriolis είναι επίσης παραδείγματα *σωματικών δυνάμεων*.

Τύποι Δυνάμεων



Ομογενές – Συνεχές - Ισότροπο - Ανισότροπο

Ομογενές Υλικό: Οι ιδιότητες είναι ανεξάρτητες της θέσης του υλικού σημείου μέσα στη μάζα.

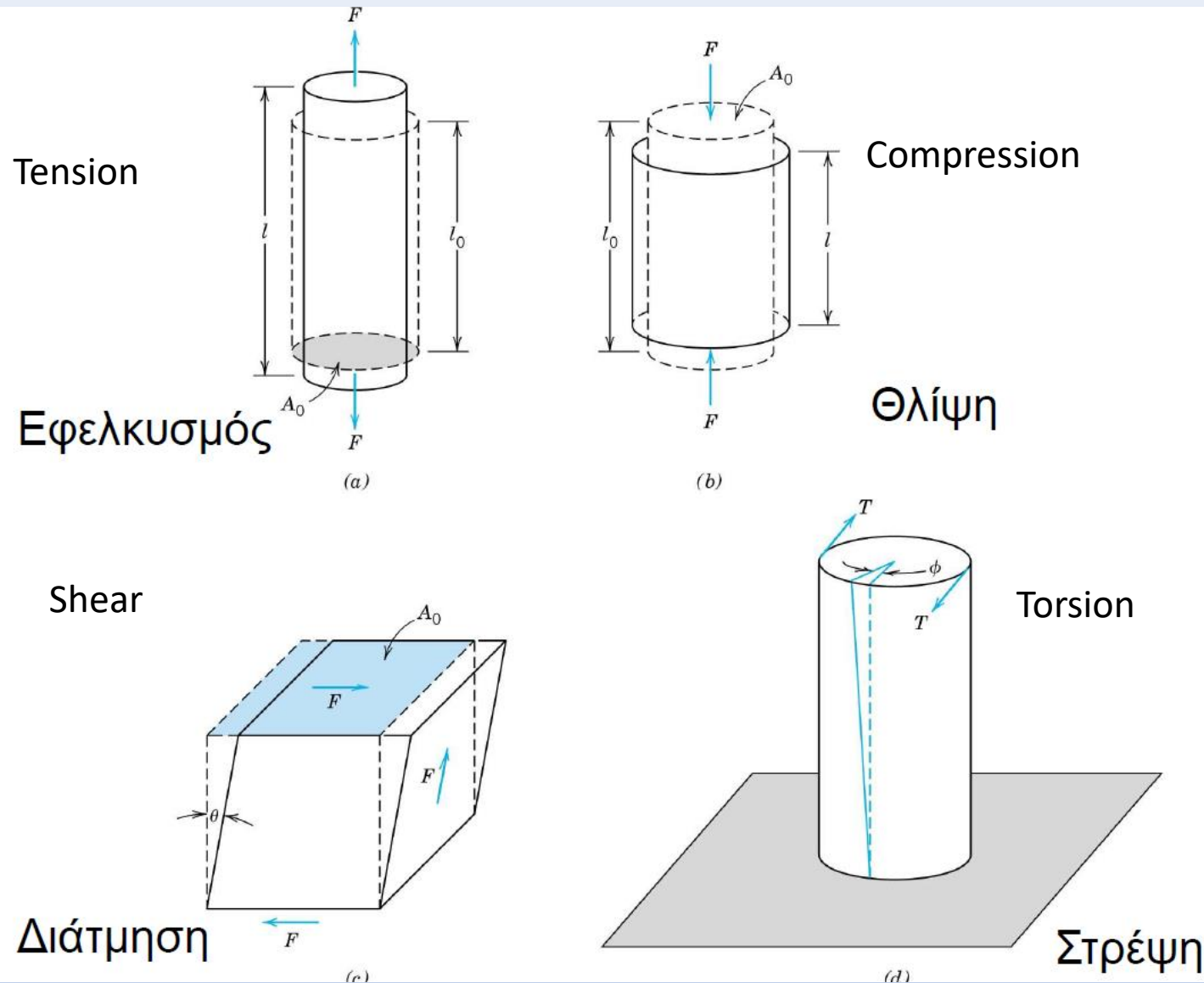
Ανομοιογενές Υλικό: Οι ιδιότητες εξαρτώνται από τη θέση του υλικού σημείου μέσα στη μάζα.

Ισότροπο Υλικό: Οι ιδιότητες είναι ανεξάρτητες της διεύθυνσης

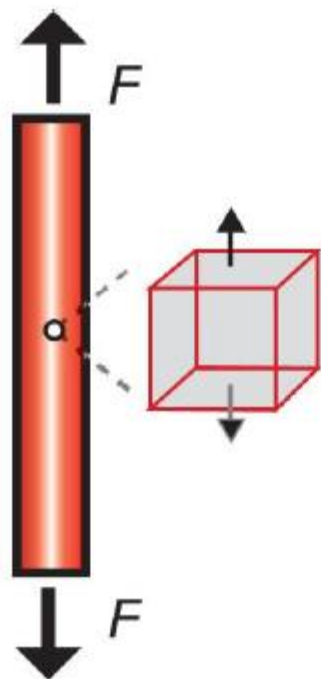
Ανισότροπο Υλικό: Οι ιδιότητες εξαρτώνται από την διεύθυνση.

Συνεχές Υλικό: Αυτό που δεν παρουσιάζει ασυνέχειες στη δομή του.

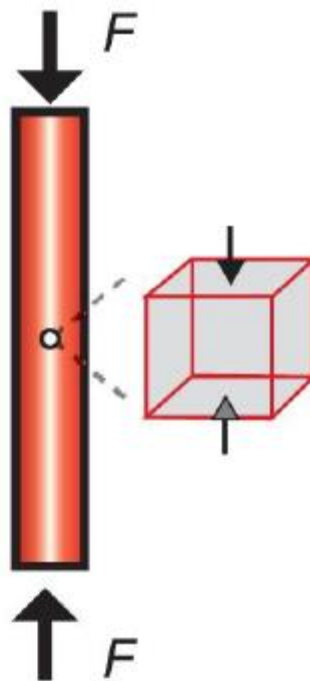
Βασικοί τύποι Μηχανικής Φόρτισης



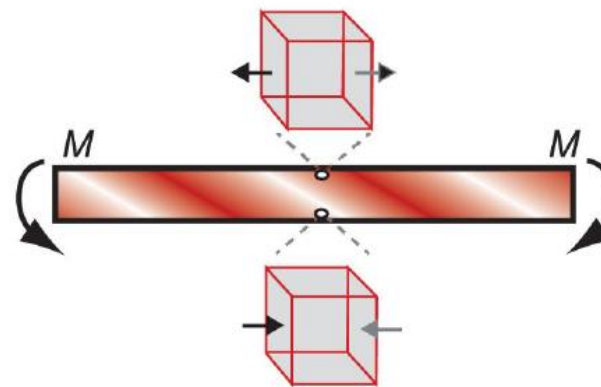
Μηχανικές Φορτίσεις



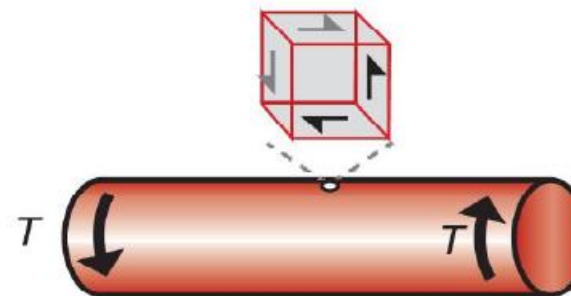
(α) Ελκυστήρας
(Tractor)



(β) Υποστήλωμα
(Pillar)



(γ) Δοκός
(Beam)



(δ) Άξονας
(Axis)

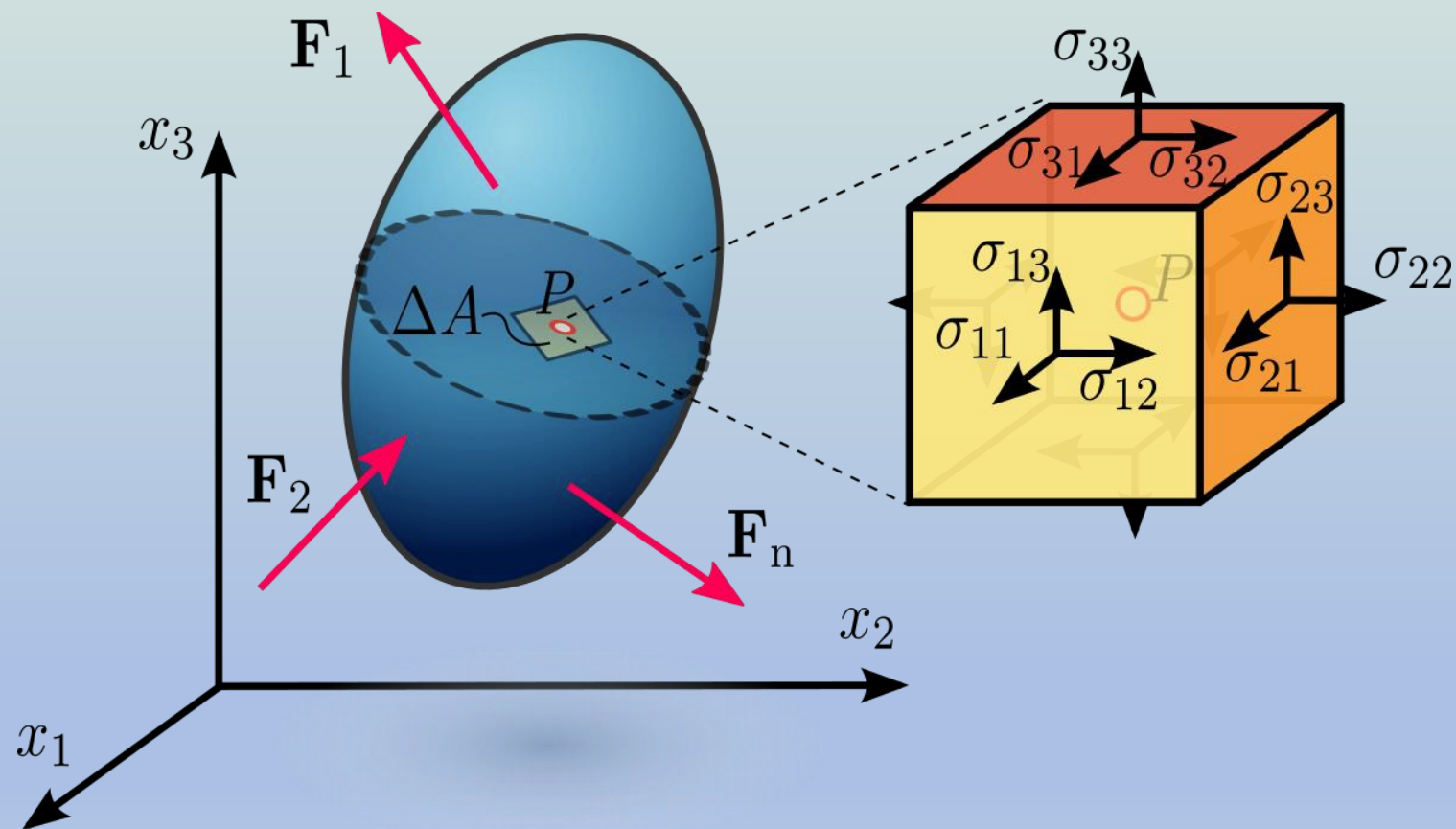
Μηχανικές Καταπονήσεις



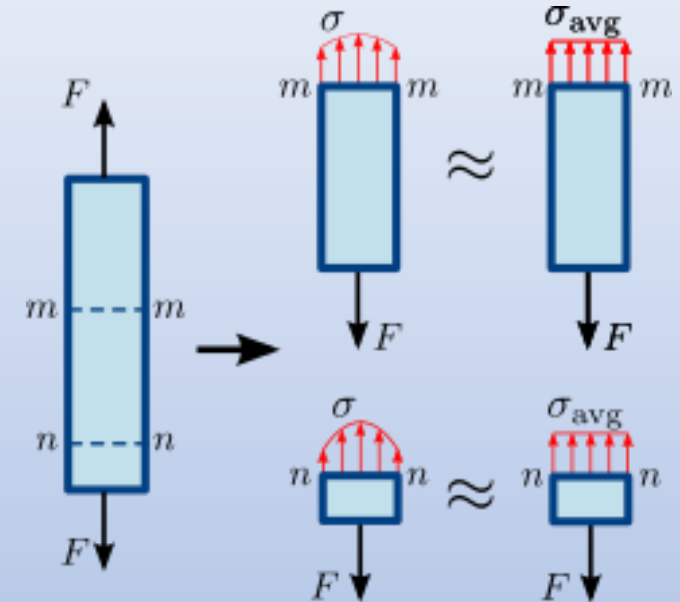
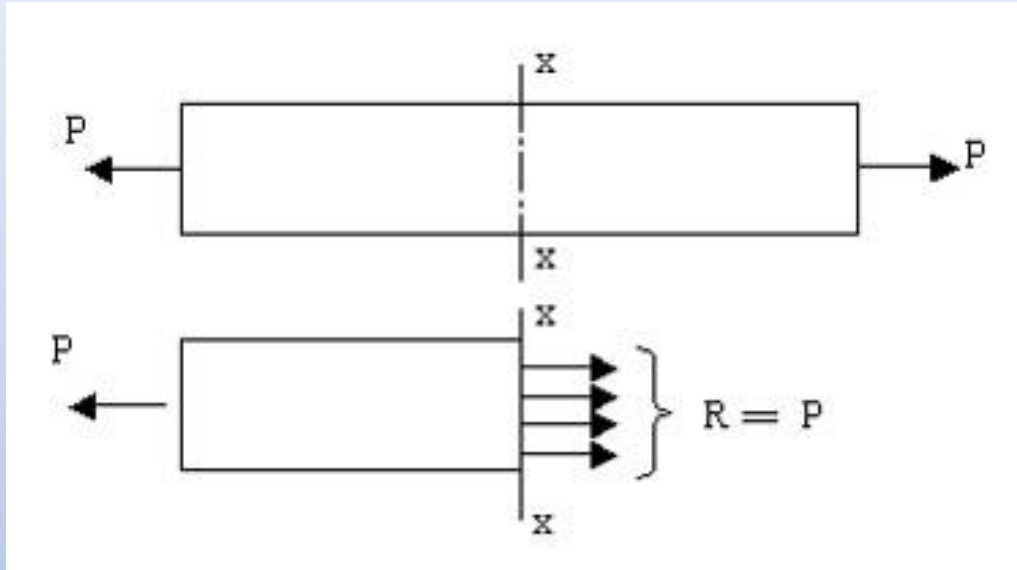
Μηχανικές Καταπονήσεις



ΤΑΣΕΙΣ

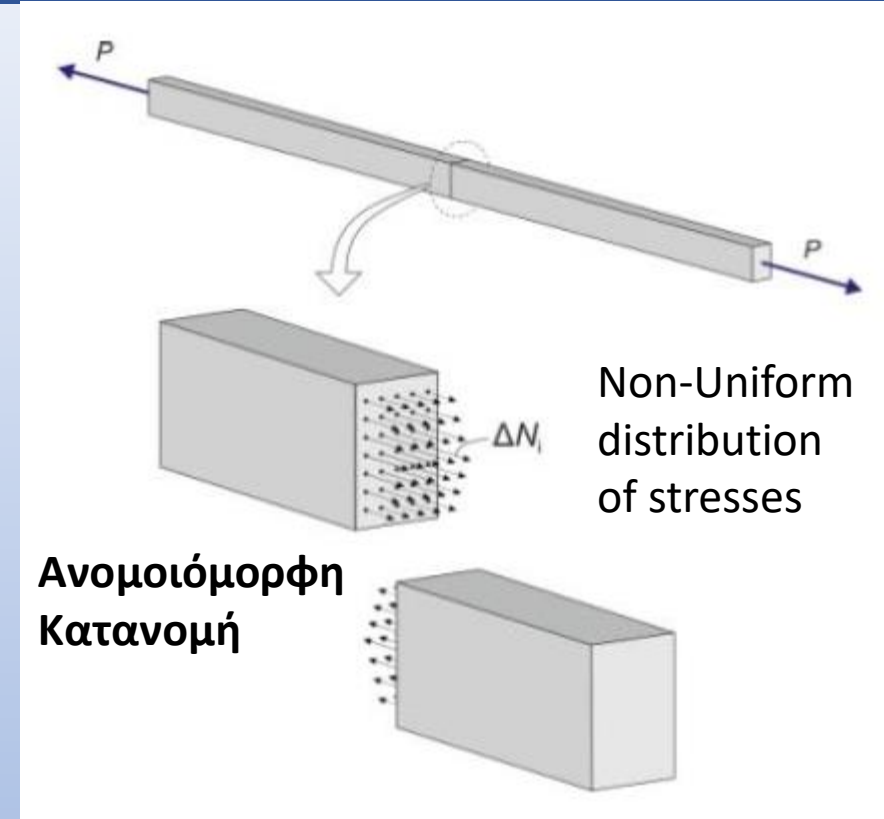
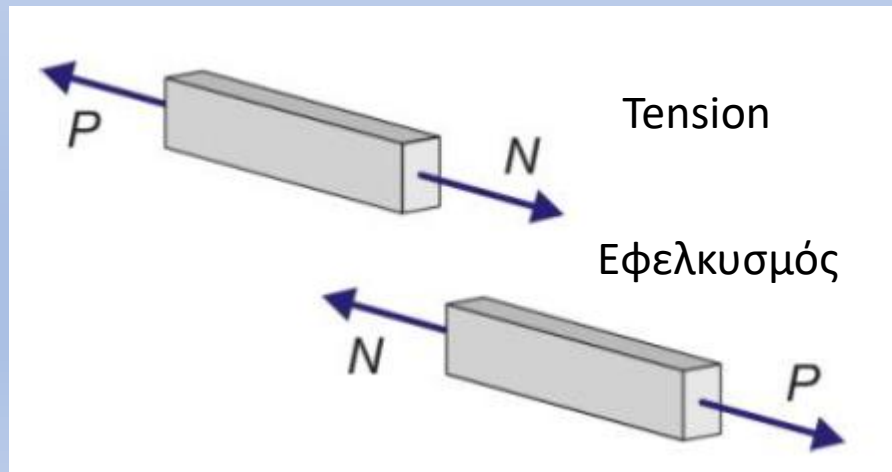
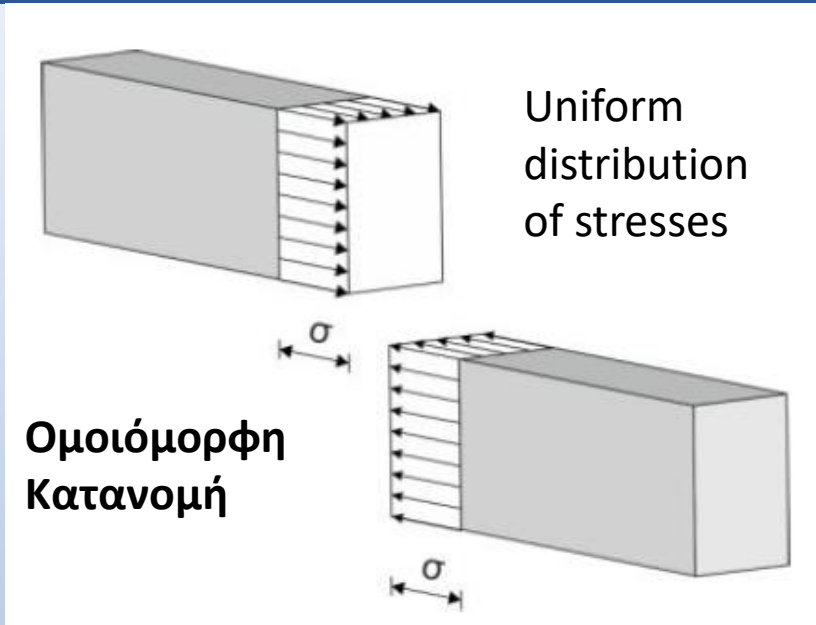


Η έννοια της Μέσης Ορθής Τάσης

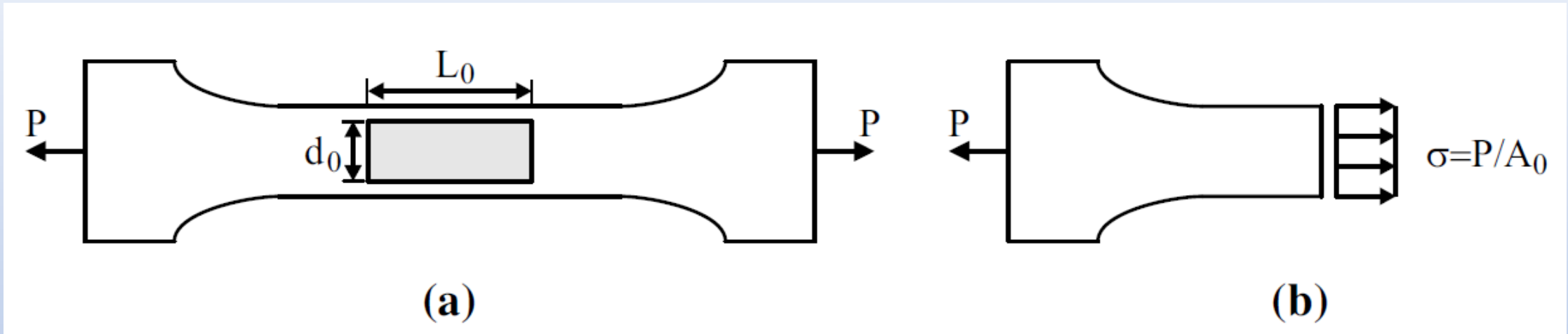


- Οι τάσεις αναπτύσσονται στο εσωτερικό του σώματος ως αντίδραση στην επιβολή επάνω στο σώμα, εξωτερικών φορτίων (δυνάμεων ή ροπών).
- Ετσι, σε κάθε διατομή αναπτύσσεται μία κατανομή δυνάμεων.
- Το μέτρο της συνισταμένης της επιφανειακής κατανομής των δυνάμεων κατά την κάθετη προς την διατομή διεύθυνση είναι η **μέση ορθή τάση**

Ομοιόμορφη και μη-ομοιόμορφη κατανομή τάσεων



Μέση Ονομαστική Ορθή Τάση



Όπου:

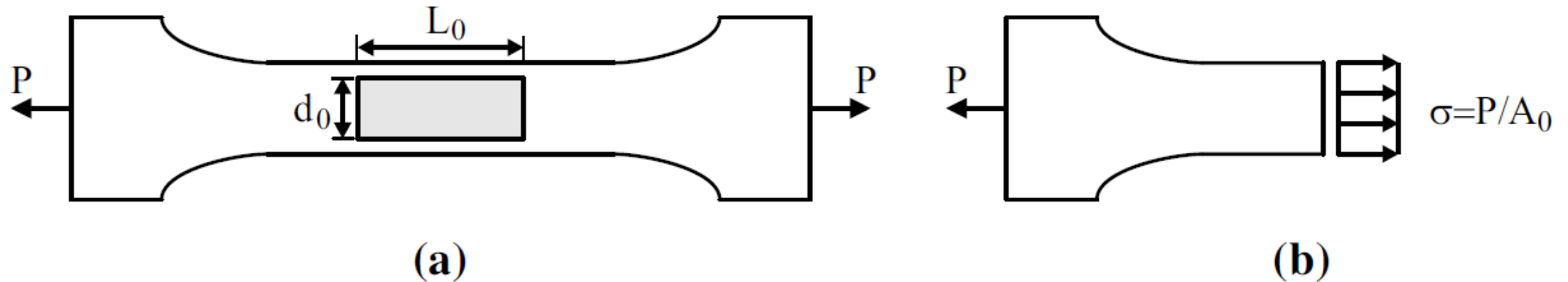
$$\sigma_{av} = \frac{P}{A_0}$$

P = Η εξωτερικά Εφαρμοζόμενη Δύναμη σε [N]

A_0 = Επιφάνεια της διατομής πριν την επιβολή του φορτίου, σε [m²]

Μονάδα Μέτρησης: 1Pa = 1N/m²

Μέση Ονομαστική Ορθή Τάση



Προσοχή !!! Για να ισχύει η σχέση της μέσης ορθής τάσης, θα πρέπει: 1) η κατανομή των ορθών τάσεων σε κάθε διατομή να είναι ομοιόμορφη και 2) ο φορέας της συνισταμένης των εσωτερικών δυνάμεων να διέρχεται από τα κ.β. όλων των διατομών και να συμπίπτει με τον φορέα της εξωτερικά εφαρμοζόμενης δύναμης P . Σε αντίθετη περίπτωση, η P , εκτός από εφελκυσμό θα προκαλέσει και κάμψη του δοκιμίου.

$$\sigma_{av} = \frac{P}{A_0}$$

Μέση Ονομαστική Τάση και Μέση Πραγματική Τάση

Στον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως για την μέση ορθή τάση,

$$\sigma_{av} = \frac{P}{A_0}$$

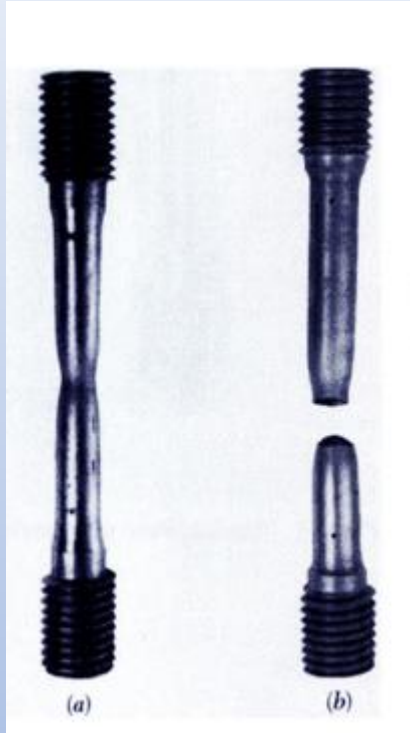
Υποτίθεται ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις:

1. Η κατανομή των τάσεων είναι ομοιόμορφη
2. Η εγκάρσια διατομή A_0 δεν μεταβάλλεται κατά τον εφελκυσμό
3. Ο φορέας της P να διέρχεται από τα κ.β. όλων των διατομών

Για τον λόγο αυτό, την παραπάνω μέση ορθή τάση την καλούμε και **μέση ονομαστική τάση**.

Όμως, ιδιαίτερα στα όλκιμα υλικά η διατομή μειώνεται κατά τον εφελκυσμό. Οπότε, αν λάβουμε υπ' όψιν την μεταβολή της διατομής συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου P , τότε ορίζουμε την **μέση πραγματική τάση**, ως:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{Όπου } A \text{ το εμβαδό της πραγματικής διατομής}$$



Διατμητική Δύναμη και Διατμητική Τάση

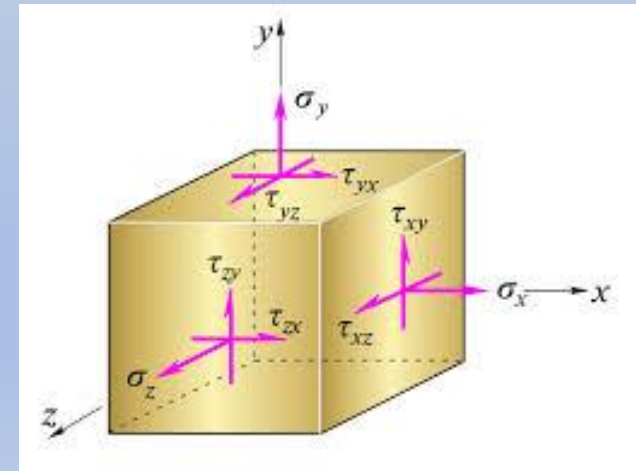
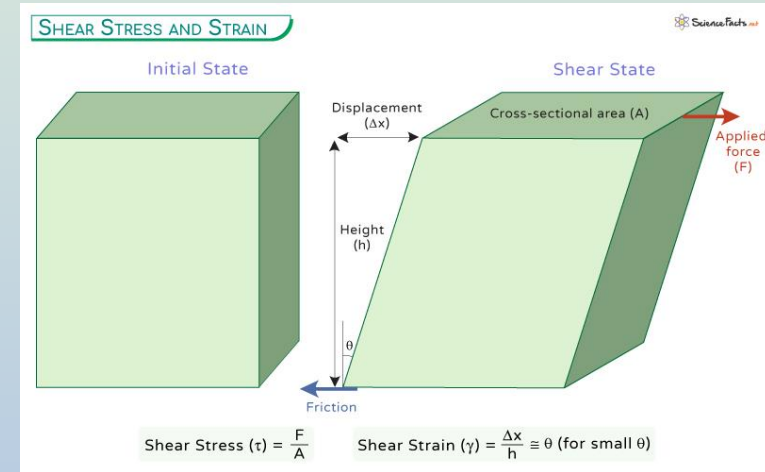
Στη Μηχανική, η **διατμητική δύναμη** (ή **διατμητική τάση**, όταν αναφέρεται ως ένταση) είναι η **δύναμη που δρα παράλληλα** σε μια επιφάνεια ενός σώματος και έχει ως αποτέλεσμα την **παραμόρφωση** ή **ολίσθηση** των στρωμάτων του υλικού **το ένα ως προς το άλλο**.

Τί είναι διατμητική δύναμη:

• **Ορισμός:**

Η **διατμητική δύναμη (shear force)** είναι η **συνιστώσα δύναμης που δρα παράλληλα σε μια επιφάνεια ή κάθετα στον άξονα** ενός στοιχείου, με αποτέλεσμα τη ροπή που τείνει να "κόψει" ή να "γλιστρήσει" τα μέρη του σώματος μεταξύ τους.

• **Σύμβολο:** Συνήθως συμβολίζεται με **V** για την διατμητική δύναμη (shear force) ή **τ** για την διατμητική τάση (shear stress).

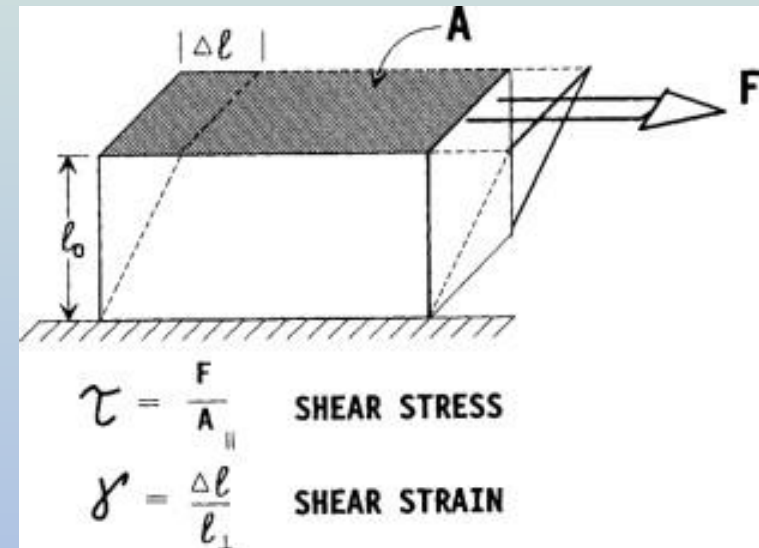


Διατμητική Δύναμη και Διατμητική Τάση

Η **διατμητική δύναμη** είναι μια **εσωτερική δύναμη** που δρα παράλληλα με την εγκάρσια διατομή ενός υλικού, ενώ η διατμητική τάση είναι το μέτρο αυτής της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας ($\tau = F/A$).

Με απλά λόγια, η διατμητική δύναμη είναι η ίδια η δύναμη και η διατμητική τάση είναι η ένταση αυτής της δύναμης σε μια συγκεκριμένη περιοχή.

Μια διατμητική δύναμη προκαλεί την ολίσθηση ή την παραμόρφωση ενός αντικειμένου διαγώνια και η προκύπτουσα τάση είναι αυτή που αντιστέκεται σε αυτήν την παραμόρφωση.



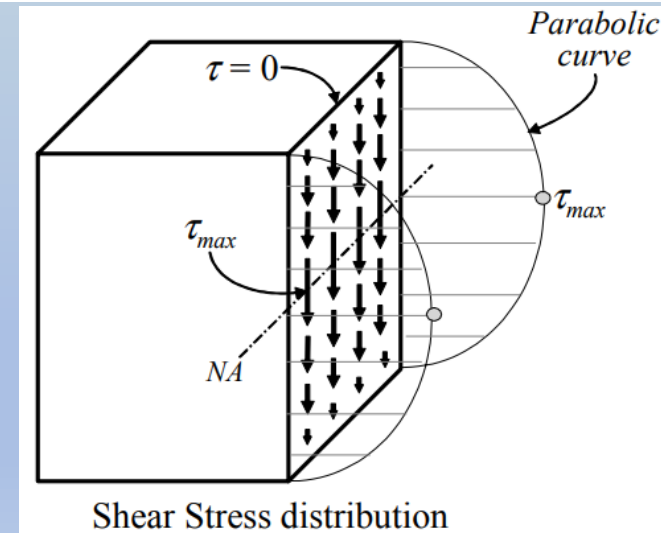
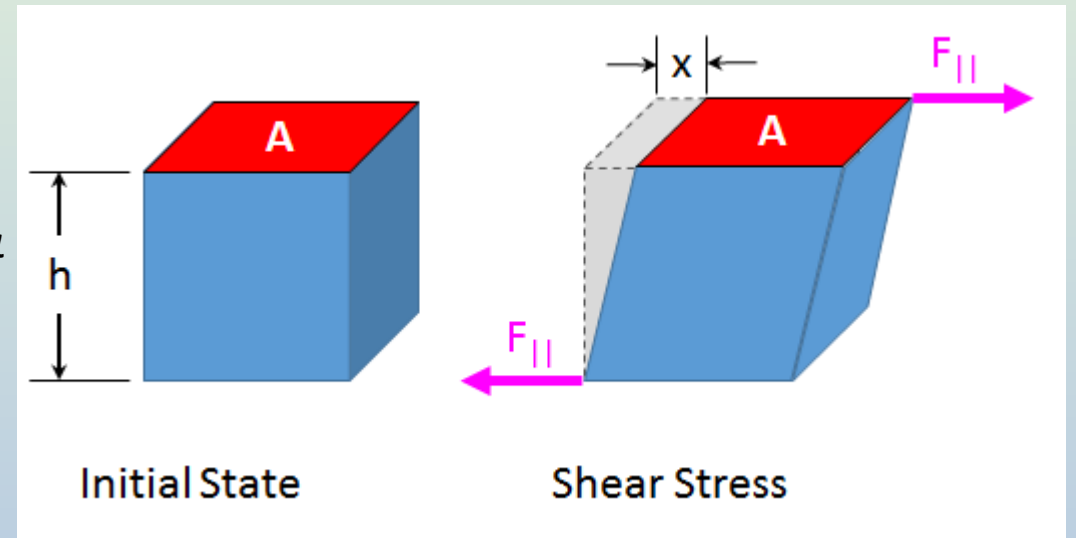
Διατμητική Δύναμη

Ορισμός: Διατμητική δύναμη είναι η εσωτερική δύναμη που αναπτύσσεται μέσα σε ένα σώμα και είναι παράλληλη με μια τομή του σώματος.

Προκύπτει από δύο αντίθετες δυνάμεις που πιέζουν διαφορετικά μέρη του αντικειμένου σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Μέτρηση: Μετράται σε Newton (N).

Παράδειγμα: Όταν χρησιμοποιείτε ψαλίδι για να κόψετε χαρτί, η δύναμη που ασκείται κατά μήκος των λεπίδων είναι μια δύναμη διάτμησης, η οποία προκαλεί την ολίσθηση και τον διαχωρισμό του χαρτιού.

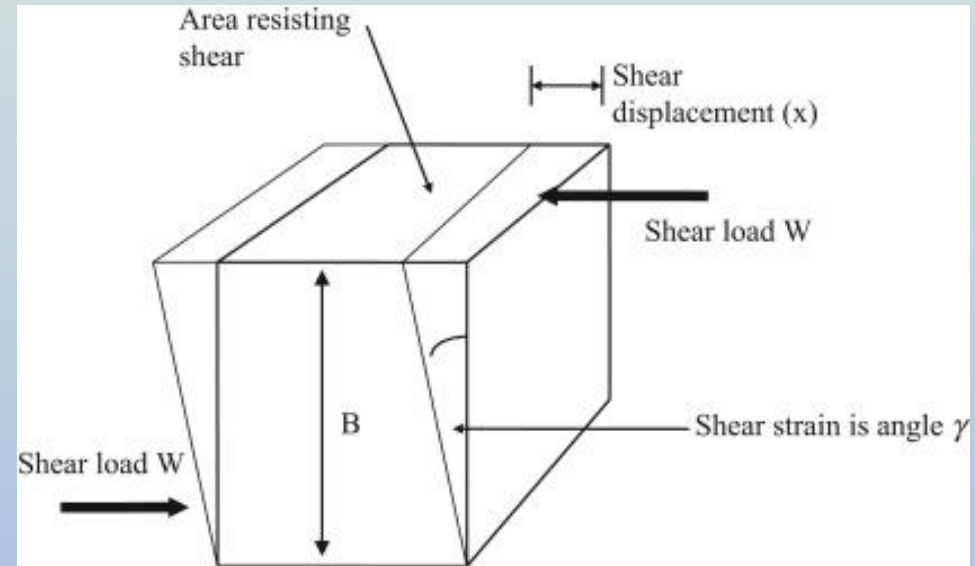


Διατμητική Τάση

Ορισμός: Διατμητική τάση είναι το μέτρο της διατμητικής δύναμης που κατανέμεται σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια, ανά μονάδα αυτής της επιφάνειας. Εκφράζει την ένταση της διατμητικής δύναμης που δρα παράλληλα προς την επιφάνεια.

Μέτρηση: Μετράται σε Pascals (Pa) ή Newtons ανά τετραγωνικό μέτρο (N/m^2). Τύπος: ($\tau = F/A$), όπου, τ , είναι η τάση διάτμησης, F , είναι η δύναμη διάτμησης και A , είναι η περιοχή στην οποία ασκείται η δύναμη.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα με το ψαλίδι και το χαρτί, η τάση διάτμησης είναι η διατμητική δύναμη διαιρούμενη με την επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής του χαρτιού στο σημείο κοπής.



Διατμητική Τάση

Διατμητική τάση (Shear Stress):

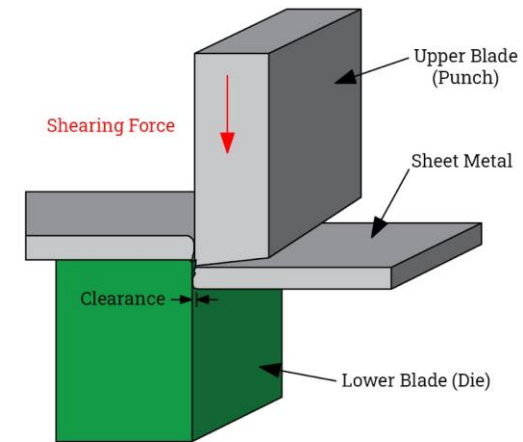
Η ένταση αυτής της δύναμης (π.χ. πόσο έντονα δρα) δίνεται από τον τύπο:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

όπου:

- τ : διατμητική τάση (σε Pa ή N/m²)
- F : διατμητική δύναμη (σε N)
- A : επιφάνεια στην οποία δρα η δύναμη (σε m²)

Metal Shearing Process



IQSdirectory.com

Διαφορές μεταξύ ορθής και διατμητικής δύναμης

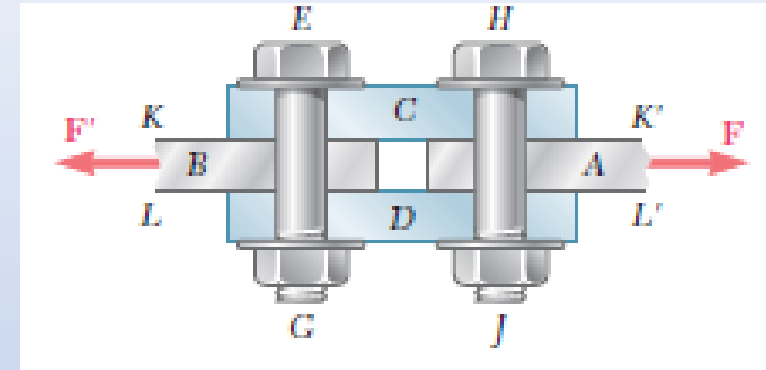
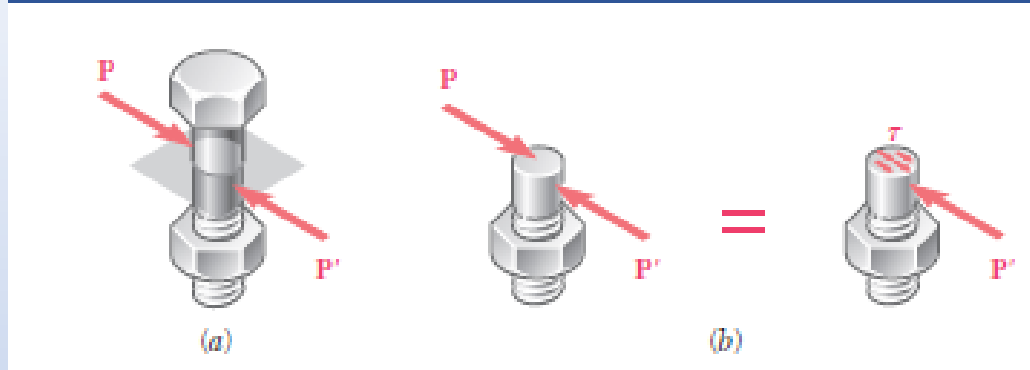
Διαφορά από αξονική δύναμη:

Είδος Δύναμης	Δράση	Τάση που προκαλεί
Αξονική (κατακόρυφη)	Κατά μήκος του άξονα	Εφελκυστική ή Θλιπτική
Διατμητική	Πλάγια (παράλληλη στην επιφάνεια)	Διατμητική τάση (shear stress)

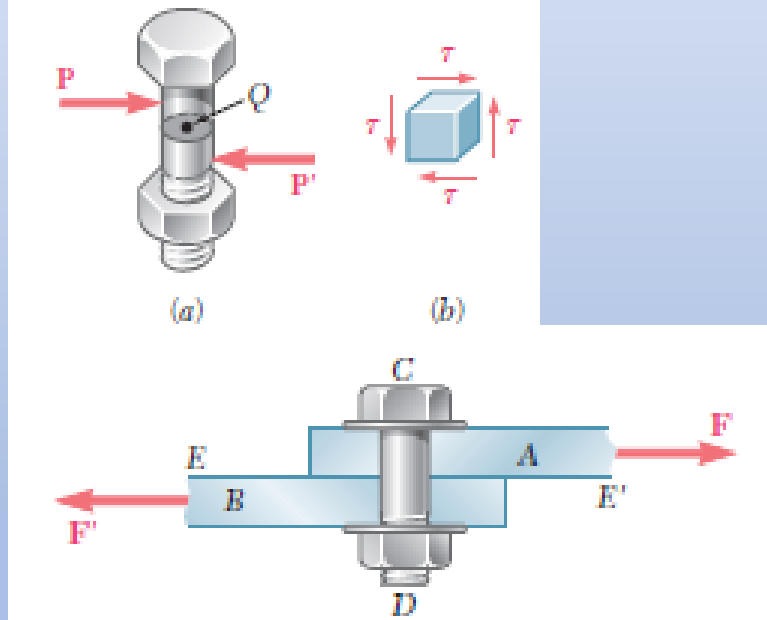
Η **διατμητική δύναμη** είναι ένα από τα βασικά είδη φορτίσεων στη Μηχανική. Είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη στον σχεδιασμό κατασκευών και μηχανικών εξαρτημάτων, ώστε να **αποφεύγεται η αστοχία** λόγω "διάτμησης" (π.χ. κόψιμο, ολίσθηση ή ρωγμή).

Βασική Διαφορά: Η ορθή δύναμη προκαλεί μόνο αλλαγή των διαστάσεων και όχι του σχήματος ενώ η διατμητική προκαλεί μεταβολή του σχήματος.

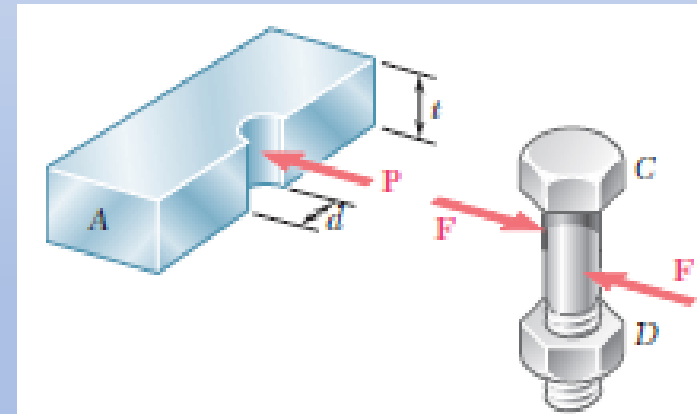
Παραδείγματα Διάτμησης (Shear)



$$\tau = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$

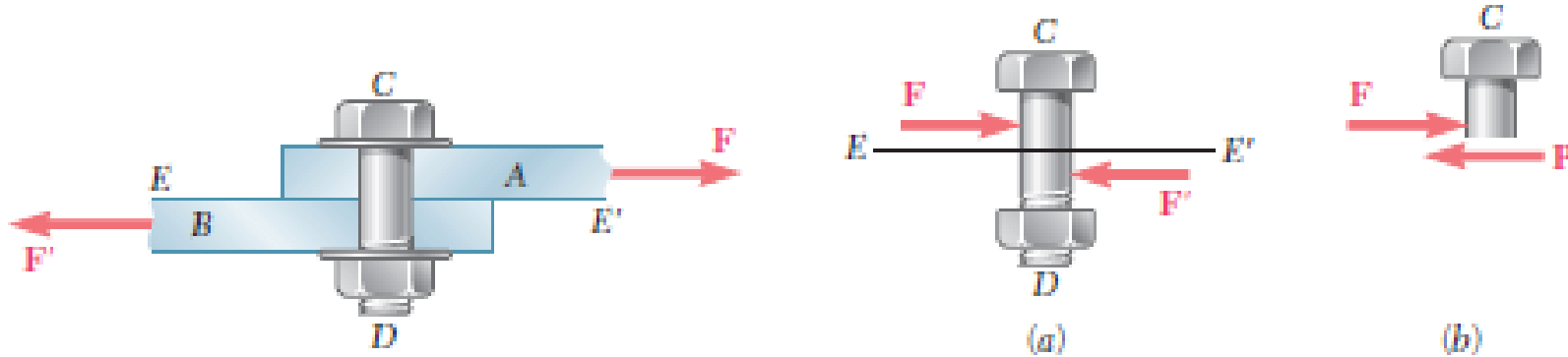


$$\tau = \frac{F}{A}$$

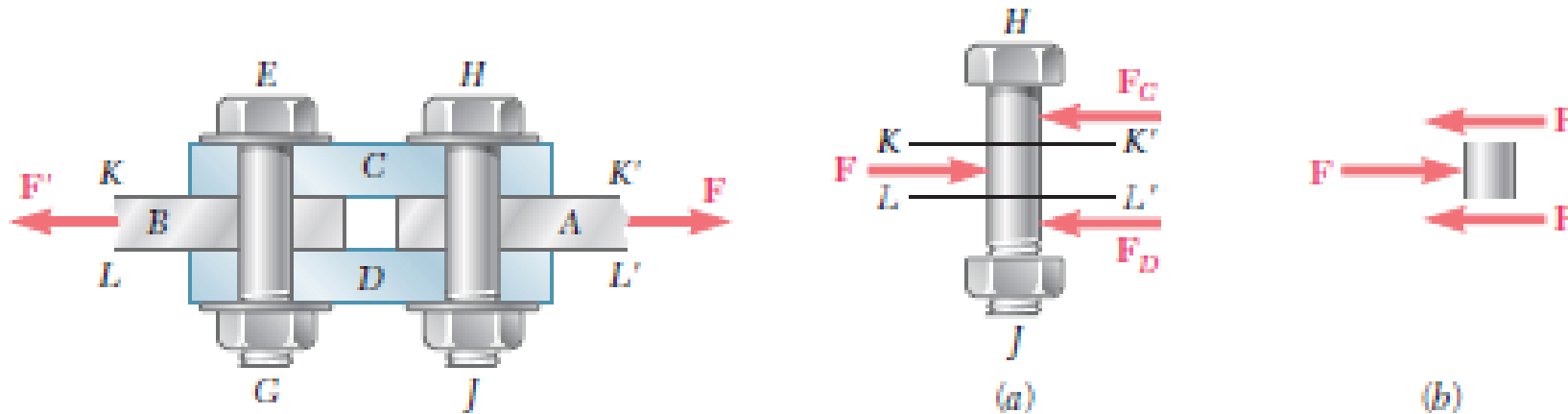


$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{t.d}$$

Παραδείγματα Διάτμησης (Shear)

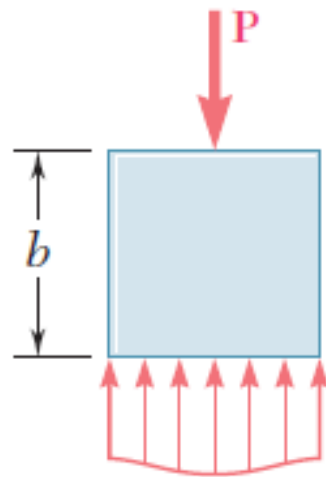
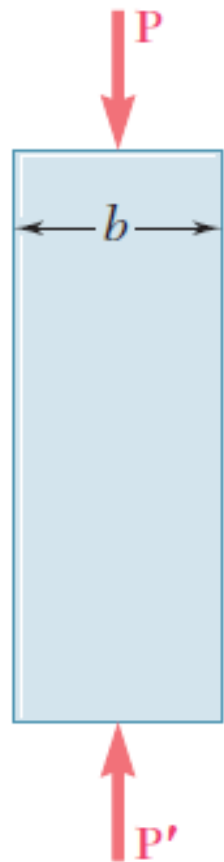


$$\tau = \frac{F}{A}$$

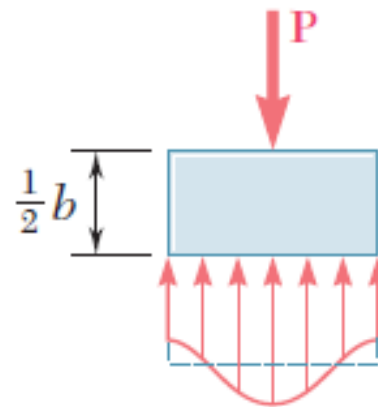


$$\tau = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$

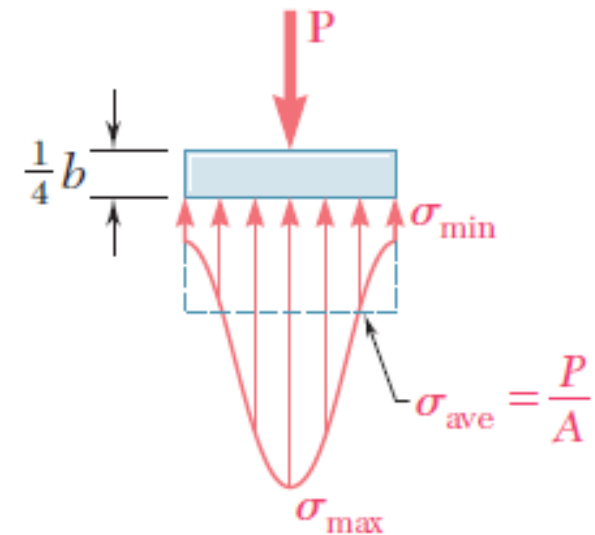
Κατανομή των τάσεων (Stress Distribution) – Αρχή του Saint Venant (*Saint-Venant's Principle*)



$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= 0.973\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.027\sigma_{\text{ave}}\end{aligned}$$

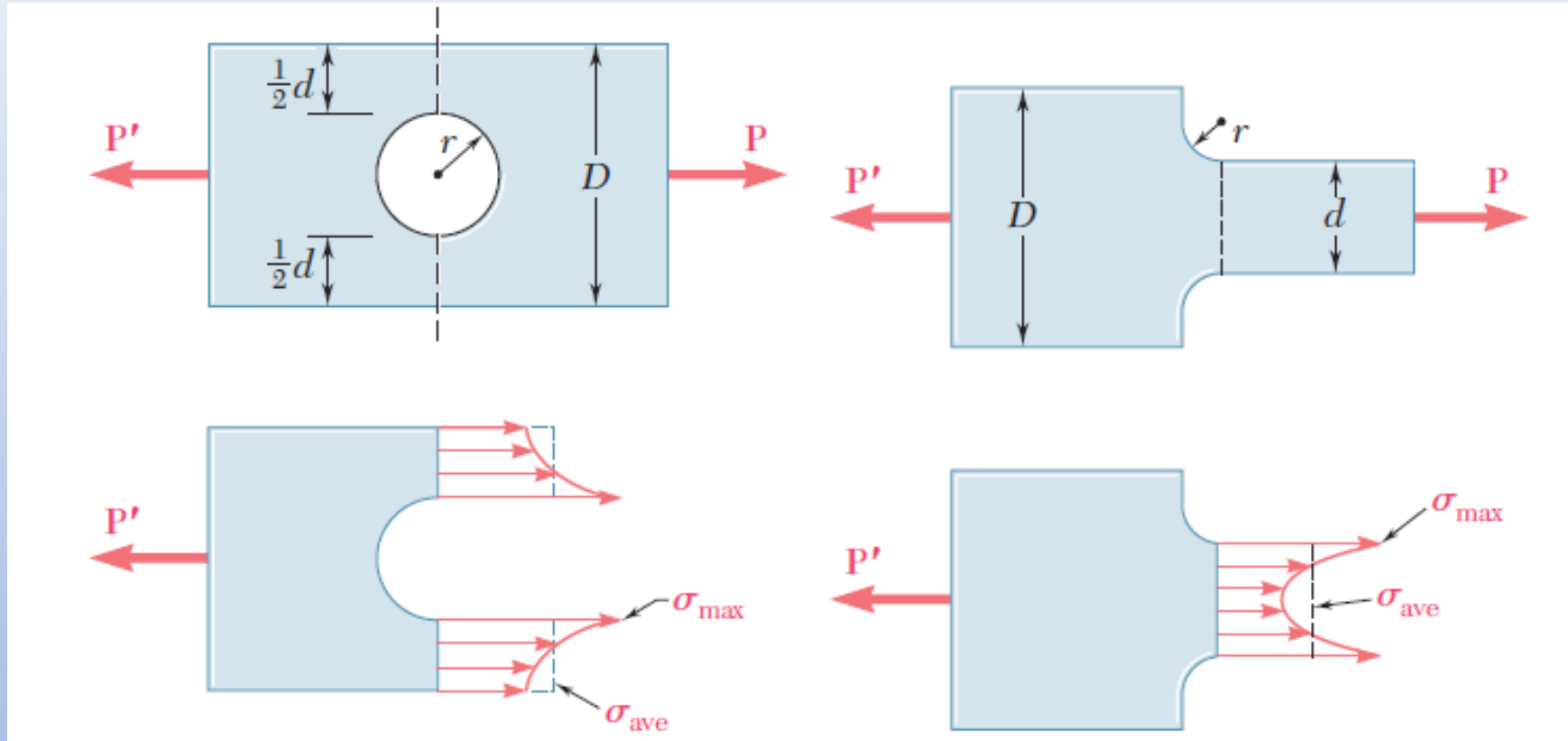


$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= 0.668\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.387\sigma_{\text{ave}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= 0.198\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 2.575\sigma_{\text{ave}}\end{aligned}$$

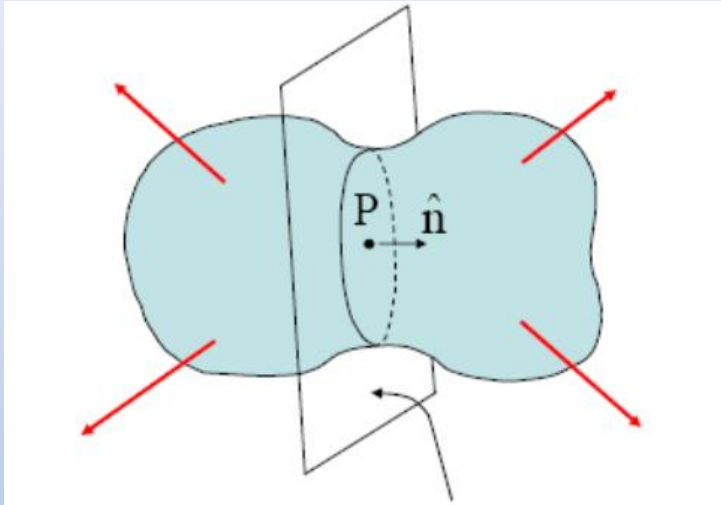
Συγκέντρωση Τάσεων (Stress Concentration)



K = Stress Concentration Factor

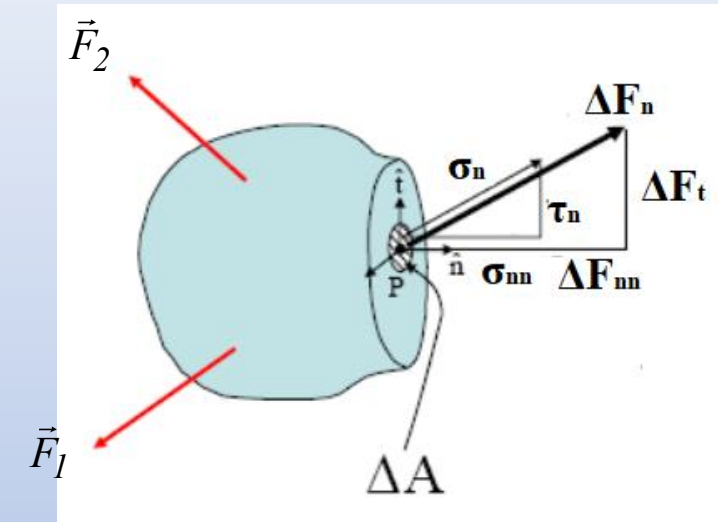
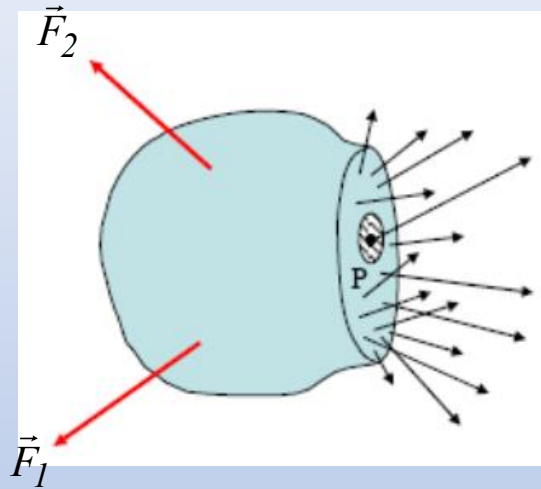
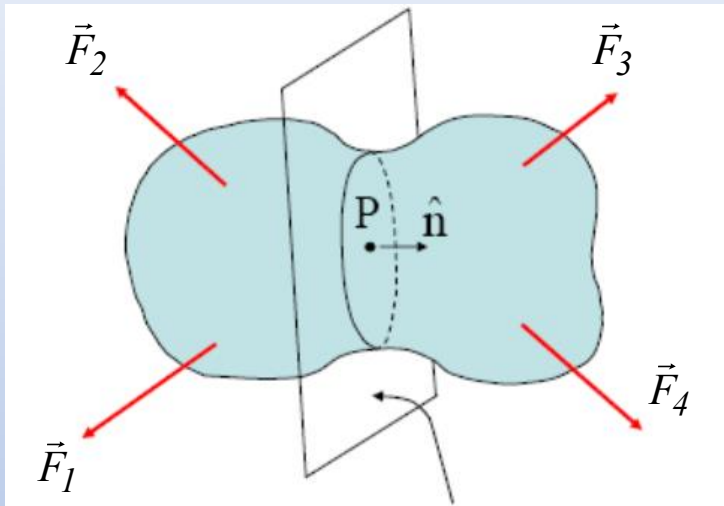
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$

Τάση σε Σημείο Διατομής



- Η τάση που αναπτύσσεται σε ένα σημείο στο εσωτερικό ενός σώματος σαν αντίδραση από τα επιβαλλόμενα εξωτερικά φορτία, **εξαρτάται από το επίπεδο της τομής στο οποίο θεωρούμε ότι ανήκει το συγκεκριμένο σημείο.** Και επειδή από κάθε σημείο του χώρου διέρχονται άπειρα επίπεδα, έπεται ότι **δεν έχει νόημα η τάση σε ένα σημείο αν δεν ορίσουμε πρώτα το επίπεδο της τομής στο οποίο θεωρούμε ότι ανήκει αυτό το σημείο.**
- Εξ' αυτού του λόγου, η τάση σε ένα σημείο μίας επίπεδης τομής **δεν είναι απλά ένα διανυσματικό μέγεθος** με τρεις συνιστώσες, αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι ένας **τανυστής δευτέρας τάξεως** με 6 ανεξάρτητες συνιστώσες.
- Παρόλα αυτά, μεταβατικά, μπορούμε να ορίσουμε ένα **διάνυσμα τάσης** το οποίο θα μας βοηθήσει να μεταβούμε στην έννοια του τανυστή και να την κατανοήσουμε πληρέστερα.

Τάση σε Σημείο Διατομής



$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A}$$

$$\Delta \vec{F}_n = \Delta \vec{F}_{nn} + \Delta \vec{F}_t$$

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{nn}}{\Delta A} + \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_t}{\Delta A}$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\tau}_n$$

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \hat{n} + \tau_n \hat{t}$$

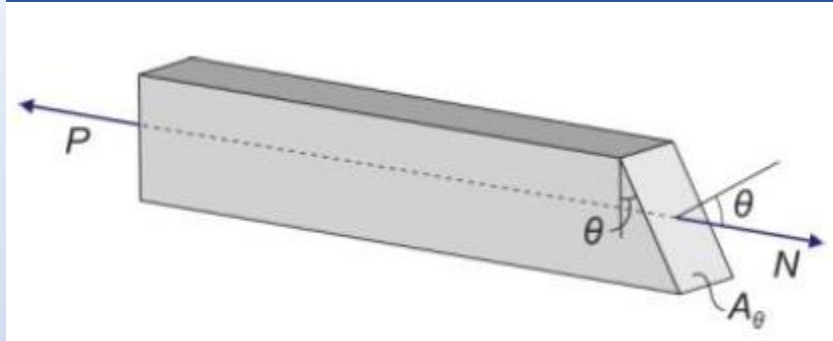
$$\sigma_{nn} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{nn}}{\Delta A}$$

Ορθή τάση στο σημείο P της διατομής

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$$

Διατμητική τάση στο σημείο P της διατομής

Τάσεις σε Πλάγιο Επίπεδο



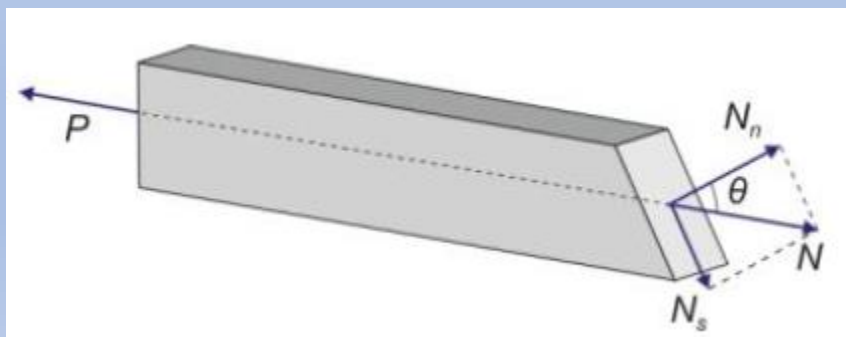
$$A_{\theta} = \frac{A_0}{\cos \theta} \quad N_n = N \cos \theta, \quad N_s = N \sin \theta$$

$$\sigma_{nn} = \frac{N_n}{A_{\theta}} = \frac{N \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{N}{A_0} \cos^2 \theta = \sigma_0 \cos^2 \theta$$

Μέση ορθή τάση στην πλάγια τομή
Mean normal stress on the oblique cross-section

$$\tau_n = \frac{N_s}{A_{\theta}} = \frac{N \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{N}{A_0} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{N}{A_0} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta$$

Μέση διατμητική τάση στην πλάγια τομή
Mean shear stress

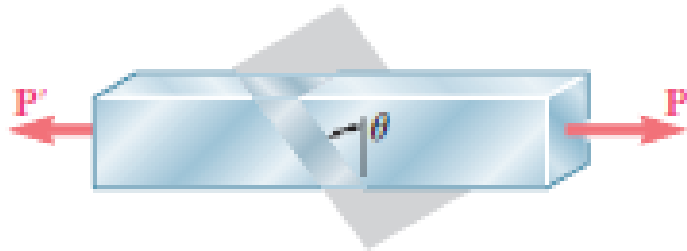


Για $\theta = 0^\circ$, $\sigma_{nn} = \sigma_0 = N/A_0 = \sigma_{\max}$

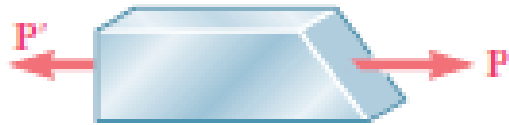
Για $\theta = \pm 45^\circ$, $\tau_n = \pm \frac{\sigma_0}{2} = \tau_{\max}$

Για $\theta = 90^\circ$, $\sigma_{nn} = 0$, $\tau_n = 0$

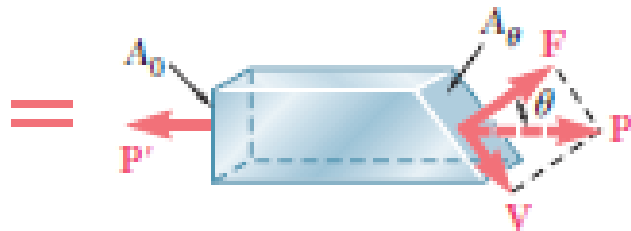
Τάσεις σε Πλάγια Τομή



(a)



(b)



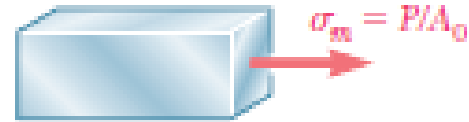
(c)



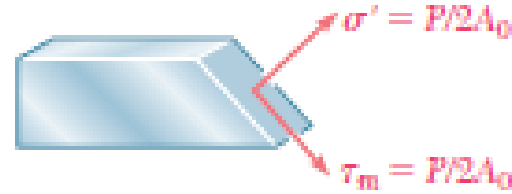
(d)



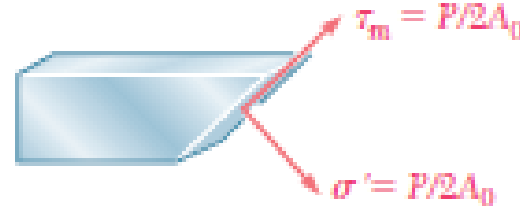
(a) Axial loading



(b) Stresses for $\theta = 0$



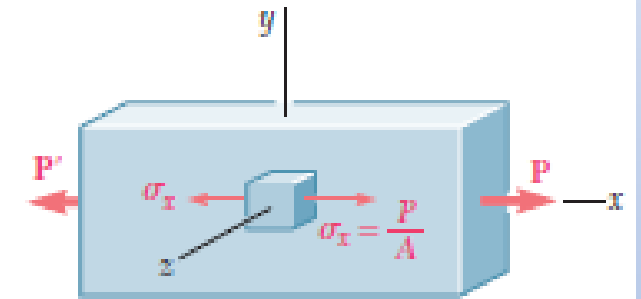
(c) Stresses for $\theta = 45$



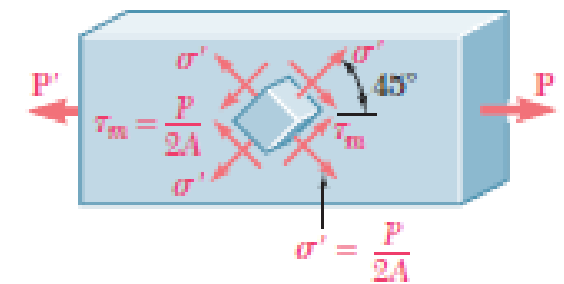
(d) Stresses for $\theta = -45$

$$\sigma_{nn} = \sigma_0 \cos^2 \theta$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta$$

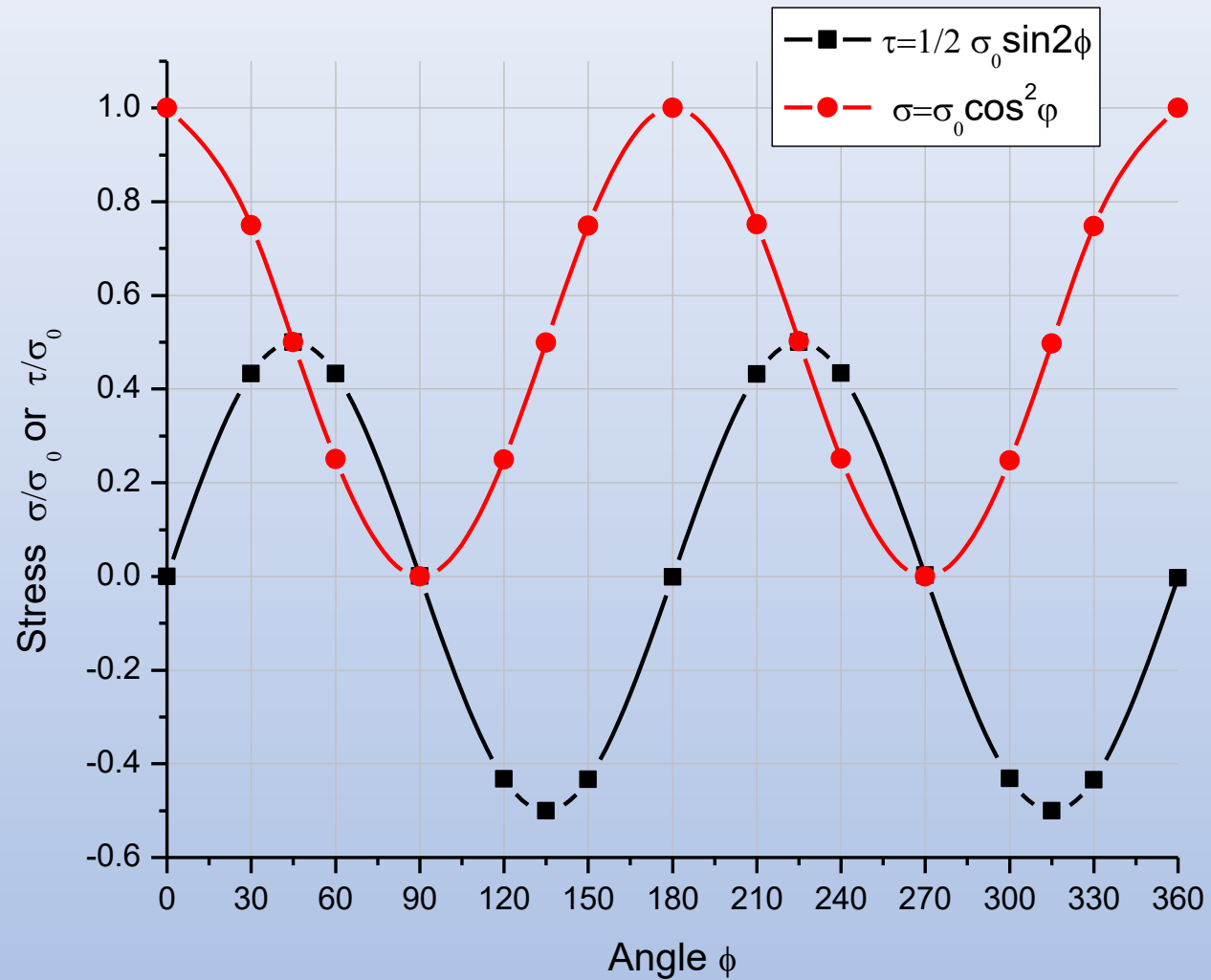


(a)

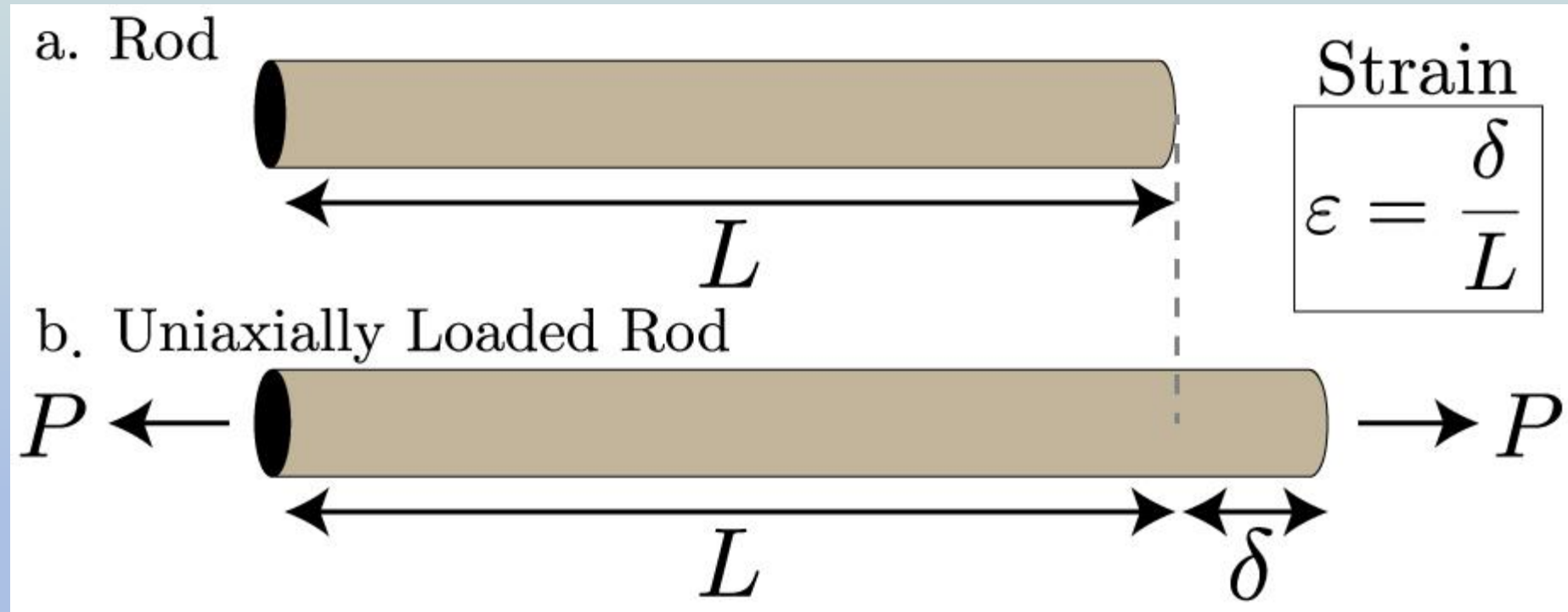


(b)

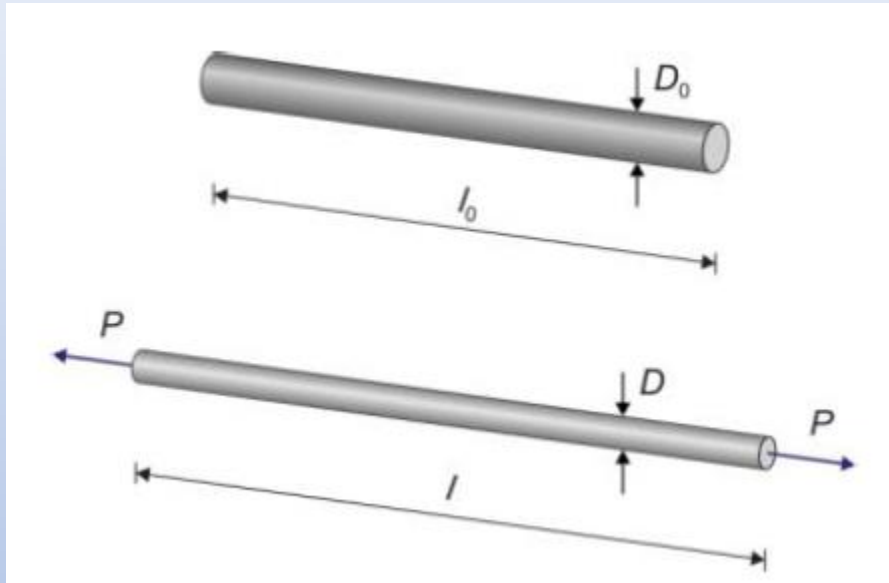
Μεταβολή των ανηγμένων τάσεων με την κλίση της επίπεδης τομής



Παραμορφώσεις



Η Έννοια της Μέσης Ορθής ή Αξονικής Παραμόρφωσης



$$P > 0, \quad \Delta l = l - l_0 > 0, \quad \Delta D = D - D_0 < 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Διαμήκης ορθή παραμόρφωση

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta D}{D_0}$$

Εγκάρσια ορθή παραμόρφωση

Ο κύλινδρος παραμένει κύλινδρος αλλά με άλλες διαστάσεις

Οι Ορθές παραμορφώσεις αλλάζουν μόνο τις διαστάσεις και όχι το Σχήμα του σώματος

Η μέση ορθή παραμόρφωση ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή των τάσεων στην διατομή είναι ομοιόμορφη.

Η Έννοια της Μέσης Ορθής ή Αξονικής Παραμόρφωσης και της Πραγματικής Παραμόρφωσης

Αν η κατανομή των τάσεων δεν είναι ομοιόμορφη:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta(dl)}{dl} = \frac{dl' - dl}{dl}$$

$$\Delta L = \int_0^L \Delta(dl) \Rightarrow \Delta L = \int_0^L \varepsilon_{xx} dl$$

Μεταβολή του Μήκους

$$\varepsilon_{av} = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

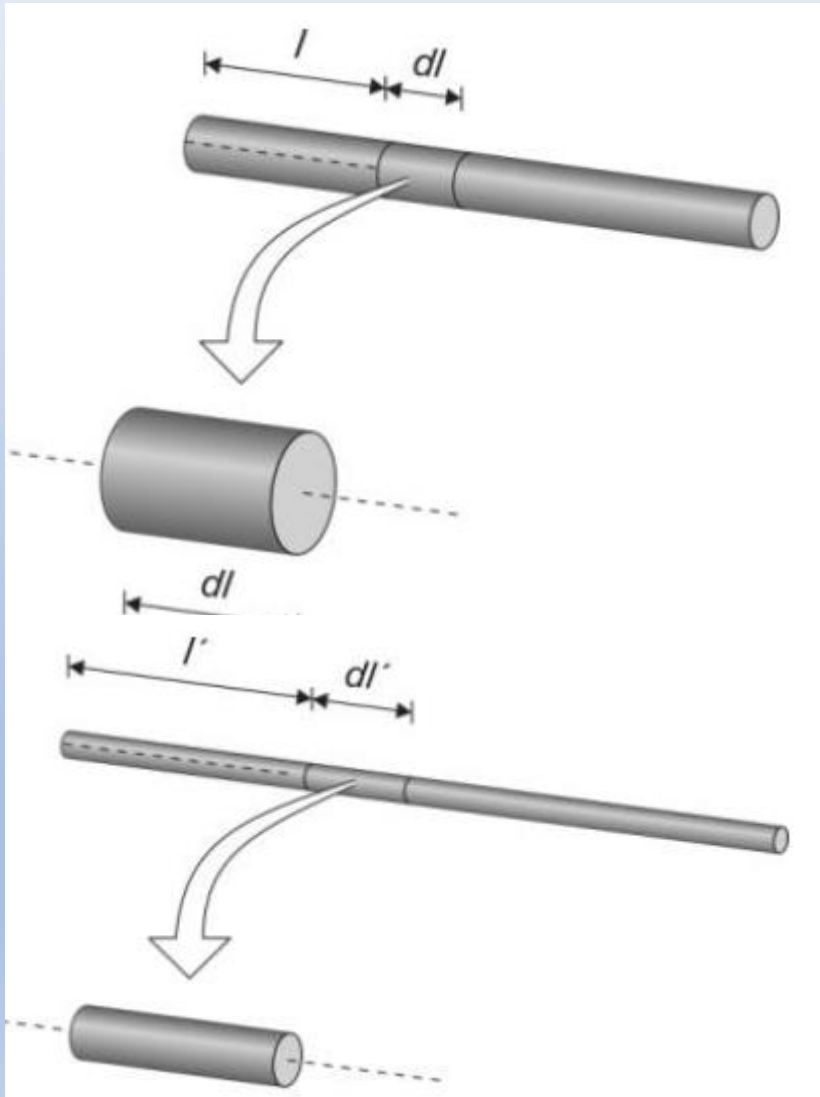
Μέση Ορθή Παραμόρφωση

$$\varepsilon_{av} = \frac{L}{L_0} - 1 = \lambda - 1$$

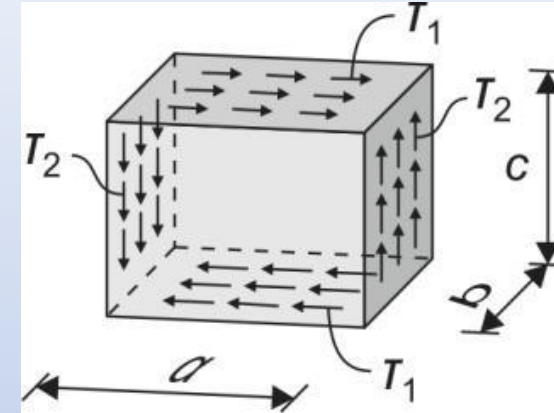
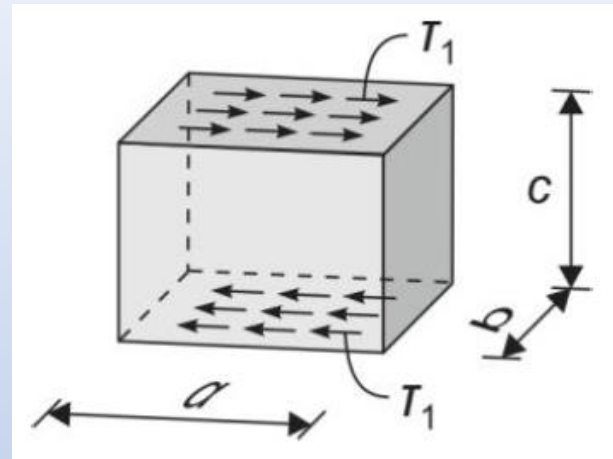
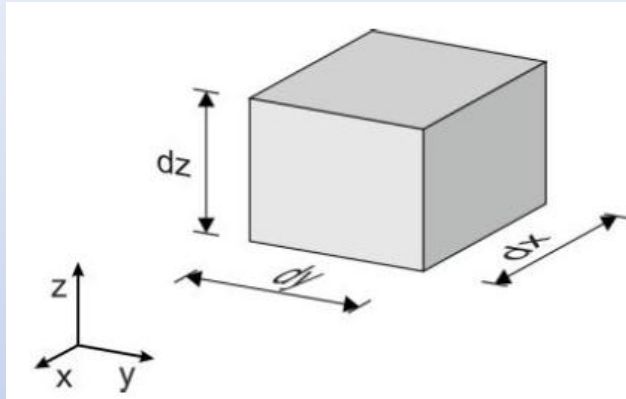
Μέση Ορθή Παραμόρφωση

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(1 + \varepsilon)$$

Πραγματική Ορθή παραμόρφωση



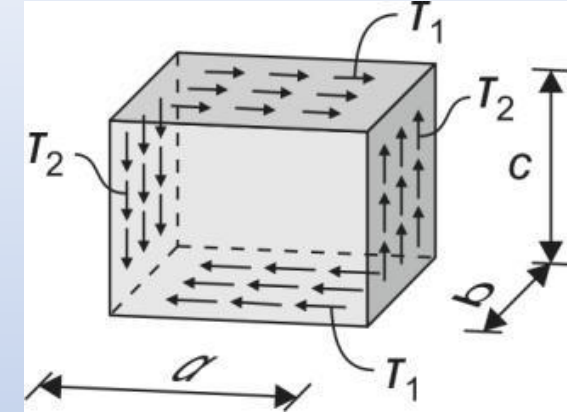
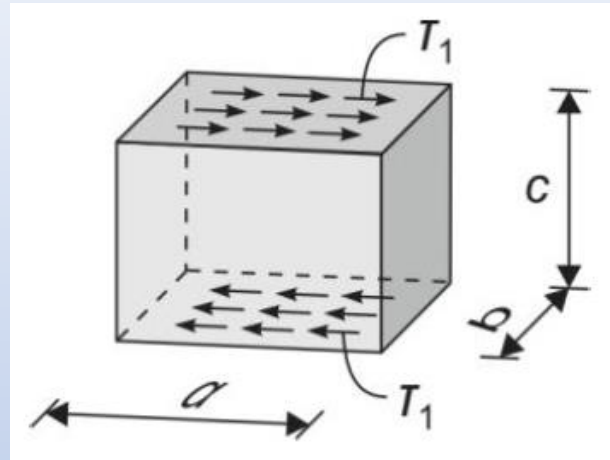
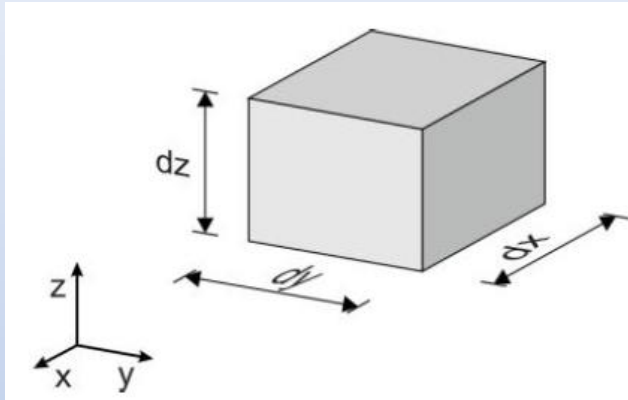
Ισορροπία Διατμητικών Τάσεων



Η διαμήκης (ή ορθή) παραμόρφωση περιγράφει την μεταβολή των διαστάσεων της ράβδου, που προκαλεί την μεταβολή του όγκου της. Για να μελετήσουμε την μεταβολή του σχήματος ενός σώματος, λόγω της δράσης εξωτερικών δυνάμεων, θεωρούμε ένα στερεό σώμα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αρχικών διαστάσεων a , b , και c . Το σώμα αυτό καταπονείται στην πάνω και την κάτω έδρα, με μία ομοιόμορφη κατανομή διατμητικών τάσεων τ_1 .

Η φόρτιση αυτή εξασφαλίζει την ισορροπία δυνάμεων κατά την διεύθυνση την παράλληλη προς την ακμή a (με συνισταμένη σε κάθε έδρα $\tau_1 \cdot a \cdot b$), πλην όμως συνιστούν ένα ζεύγος δυνάμεων $(\tau_1 a b) c$ που τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από άξονα που είναι παράλληλος στην ακμή b . Για να αποφευχθεί αυτό, εφαρμόζεται ομοιόμορφη κατανομή τάσεων τ_2 στις δύο κατακόρυφες έδρες.

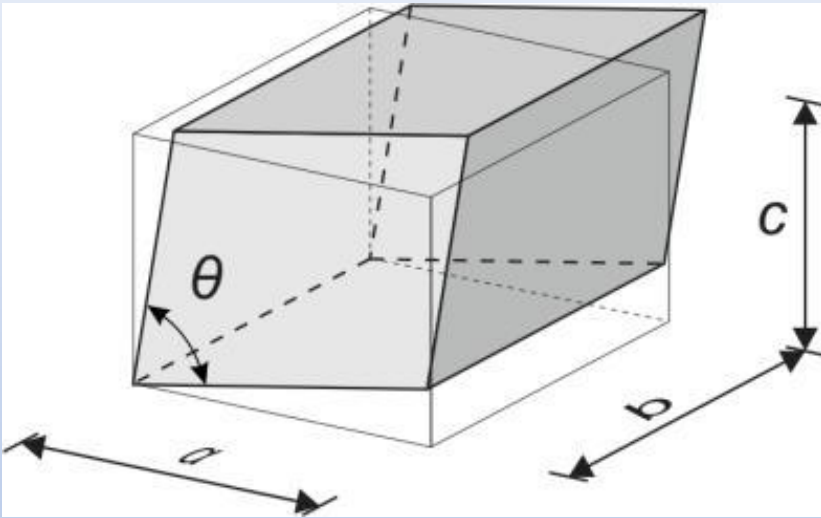
Ισορροπία Διατμητικών Τάσεων



Οι δύο νέες κατανομές, συνθέτουν δύο ίσες κατά μέτρο και αντίθετες δυνάμεις μεγέθους $\tau_2(bc)$, που αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων με μοχλοβραχίονα c . Η ροπή του ζεύγους των δύο αυτών δυνάμεων είναι ίση με $\tau_2(abc)$. Για να μην περιστρέφεται το στοιχείο, θα πρέπει:

$$\tau_1(abc) = \tau_2(abc) \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$$

Η Διατμητική Παραμόρφωση

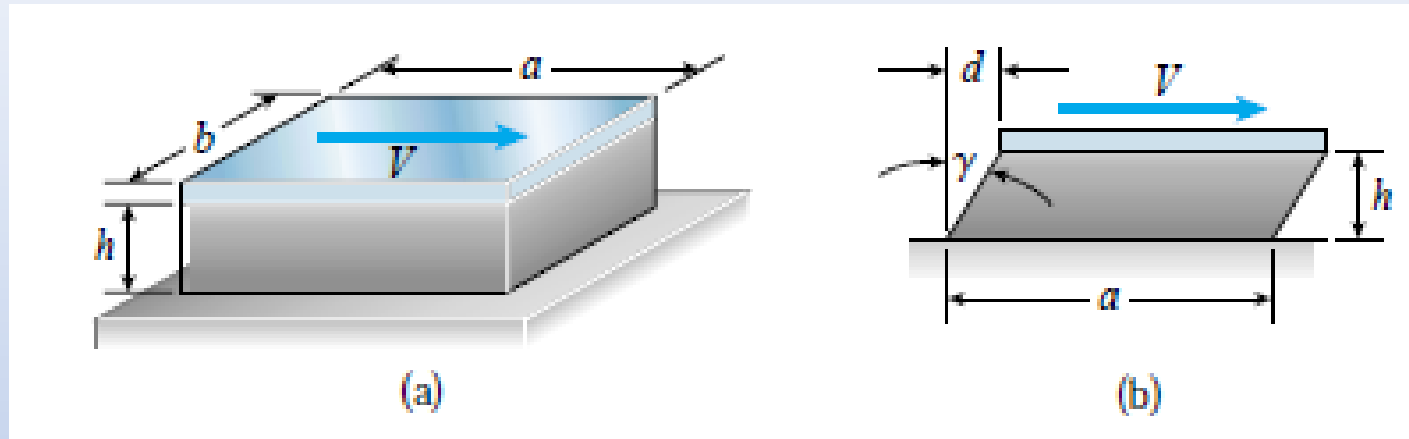


Ας δούμε τώρα πώς παραμορφώνεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λόγω της δράσης των διατμητικών τάσεων $\tau_1 = \tau_2$. Λόγω των διατμητικών αυτών τάσεων, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο θα παραμορφωθεί σε ένα πλάγιο παραλληλεπίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα, όπου η ορθή γωνία των ακμών a και c θα μεταβληθεί σε οξεία γωνία, που θα την δηλώνουμε με θ .

Ορίζουμε ως **διατμητική παραμόρφωση γ** των ακμών a και c του στοιχείου, την μεταβολή (σε ακτίνια), που υπέστη η αρχική ορθή γωνία τους, δηλαδή

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Η Διατμητική Παραμόρφωση



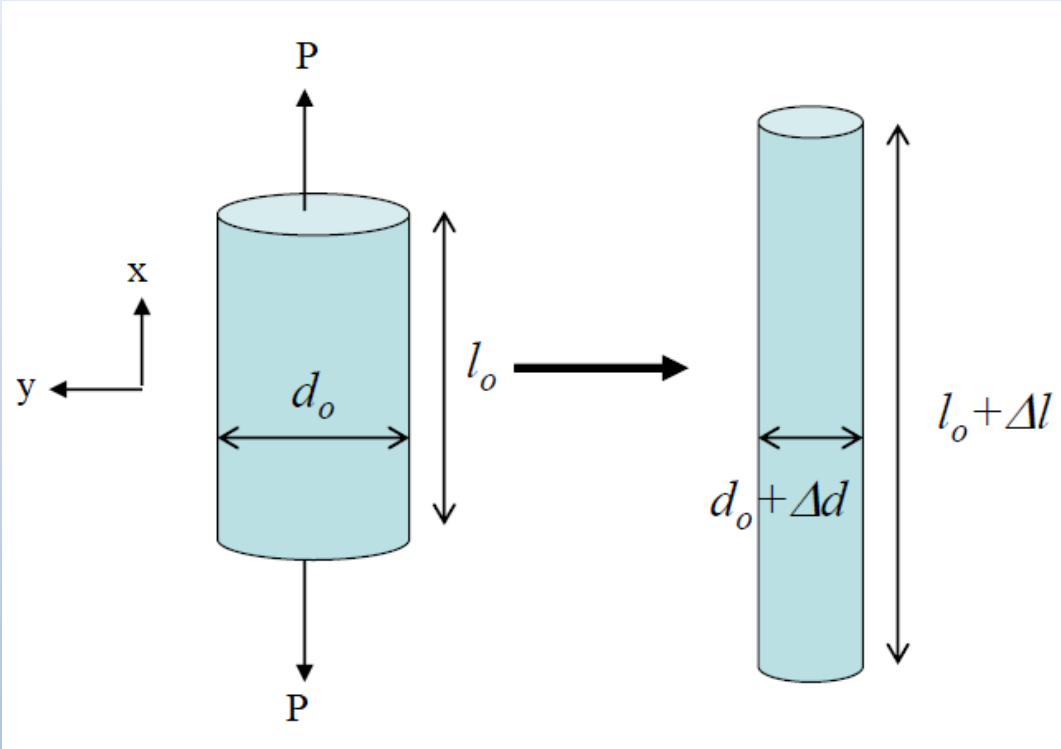
$$\tau_{ave} = \frac{V}{a b}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\tau_{ave}}{G} = \frac{V}{a b G}$$

$$d = h \tan \gamma = h \tan \left(\frac{V}{a b G} \right) \quad \text{Και επειδή η γωνία } \gamma \text{ είναι πολύ μικρή, έπεται ότι:} \quad \tan \gamma \approx \gamma (rad)$$

$$\Rightarrow d = h \gamma = \frac{h V}{a b G}$$

Λόγος του Poisson (Poisson's Ratio)



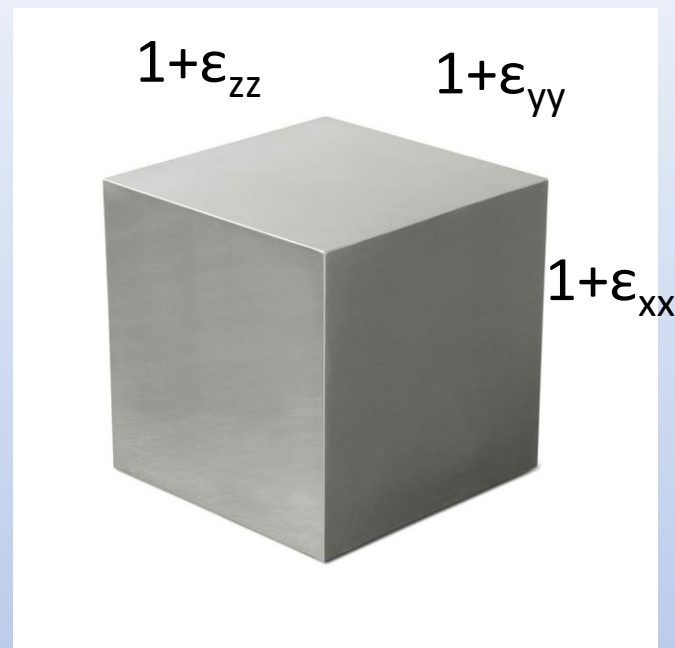
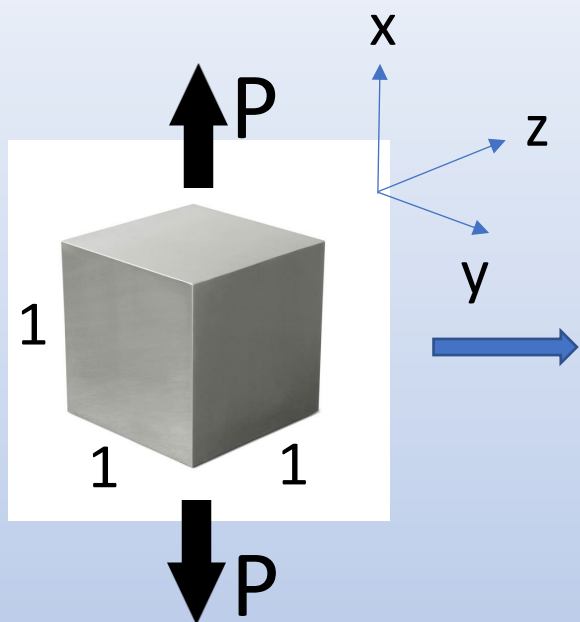
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_o}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\Delta d}{d_o}$$

Poisson's Ratio
Λόγος του Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

Ο Λόγος του Poisson



1. Αν $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ τότε:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}} = -1$$

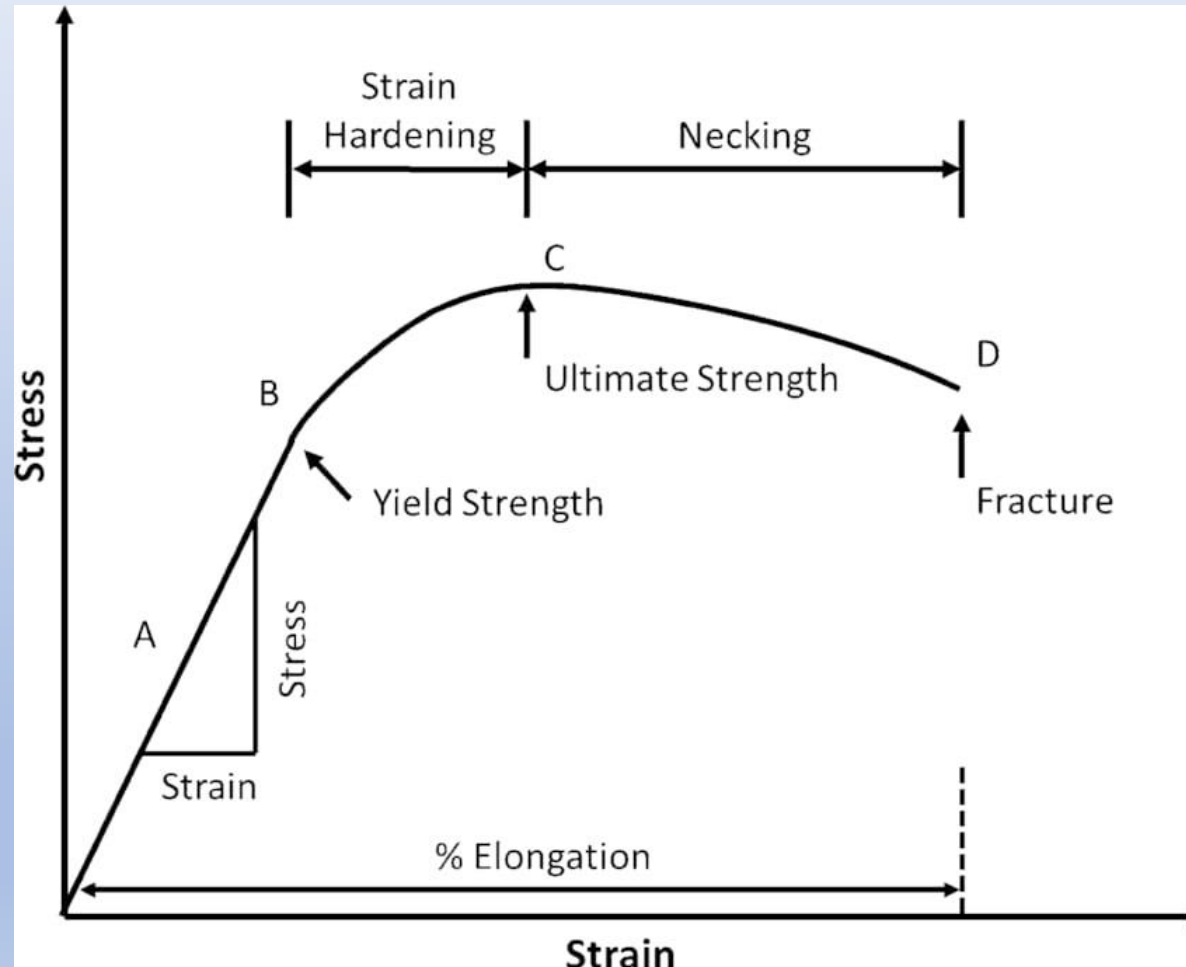
2. Αν ο όγκος παραμένει σταθερός: $V = \text{σταθ.}$ και $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ τότε:

$$(1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) = 1 \Rightarrow 2\epsilon_{yy} = -\epsilon_{xx} \Rightarrow -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nu = 0.5$$

Ο λόγος του Poisson παίρνει τιμές στο διάστημα:

$$-1 \leq \nu \leq 0.5$$

Σχέσεις Τάσεων-Παραμορφώσεων



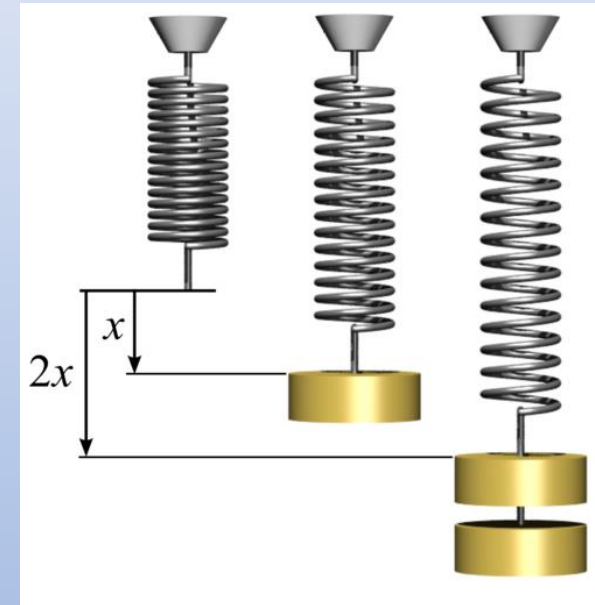
Ο Νόμος του Hooke στον Εφελκυσμό

Στη Φυσική, ο νόμος του Hooke είναι ένας εμπειρικός νόμος που δηλώνει ότι η δύναμη (F) που απαιτείται για να επιμηκυνθεί ή να συμπιεστεί ένα ελατήριο κατά (x) μεταβάλλεται ανάλογα με την μετατόπιση. Δηλαδή,

$$F = -k \cdot x$$

όπου k είναι μία σταθερά χαρακτηριστική του ελατηρίου (που εκφράζει την δυσκαμψία του) και x είναι η μετατόπιση η οποία θεωρείται μικρή σε σχέση με τη συνολική πιθανή επιμήκυνση του ελατηρίου.

Ένα ελαστικό σώμα ή υλικό το οποίο υπακούει σε αυτή την εξίσωση λέγεται **γραμμικά ελαστικό** ή **Hookean**.



Ο Νόμος του Hooke (Hooke's Law)

Hooke's law

$$F = -kx$$

Force
(N)

Spring
constant
(N/m)

Deformation
(m)

Hooke's law describes an
"ideal" spring. It is a good
approximation for real springs.

Notice the units: The deformation must be in meters!

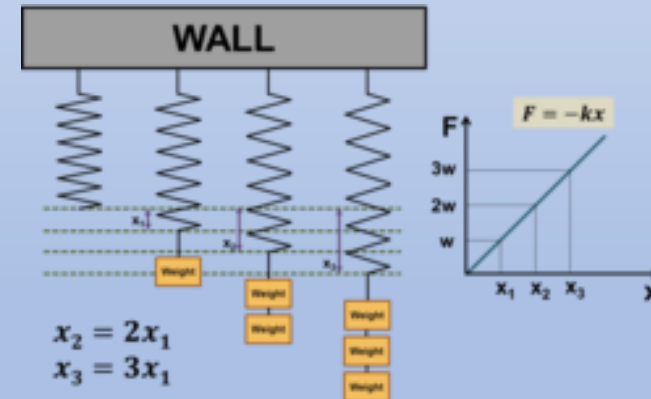
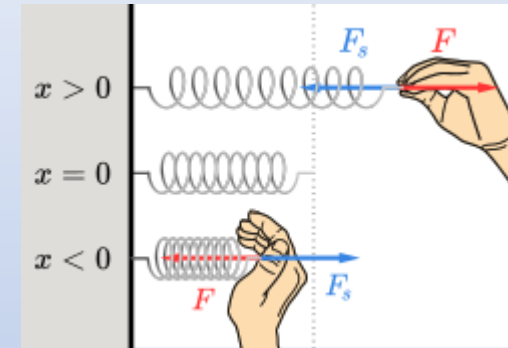
Ο Νόμος του Hooke

Θεωρήστε ένα απλό ελικοειδές ελατήριο που έχει το ένα άκρο προσαρτημένο σε κάποιο σταθερό αντικείμενο, ενώ το ελεύθερο άκρο του έλκεται από μια δύναμη του οποίου το μέγεθος είναι F . Ας υποθέσουμε ότι το ελατήριο έχει φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας, όπου το μήκος του δεν αλλάζει πλέον. Έστω x το ποσό κατά το οποίο το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου μετατοπίστηκε από τη «χαλαρή» του θέση (όταν δεν τεντώνεται). Ο νόμος του Hooke ορίζει ότι

$$F = -k \cdot x$$

ή, ισοδύναμα, σε απόλυτες τιμές,

$$x = \frac{F}{k}$$



Ο Νόμος του Hooke

Μια ράβδος από οποιοδήποτε ελαστικό υλικό μπορεί να θεωρηθεί ότι λειτουργεί ως ένα γραμμικό ελατήριο . Αν η ράβδος έχει μήκος L και εμβαδόν διατομής A , τότε η τάση εφελκυσμού σ θα είναι γραμμικά ανάλογη με την παραμόρφωση ε και του μέτρου ελαστικότητας E :

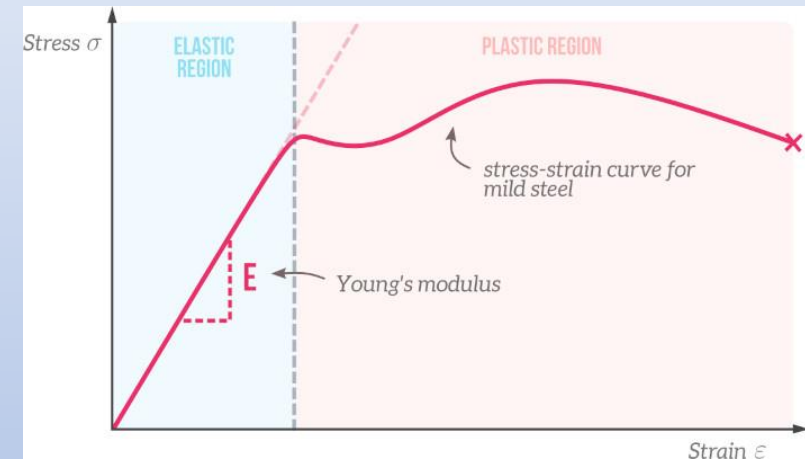
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Αν το μέτρο ελαστικότητας θεωρηθεί σταθερό και λάβουμε υπόψιν ότι

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Τότε, ισχύει ότι:

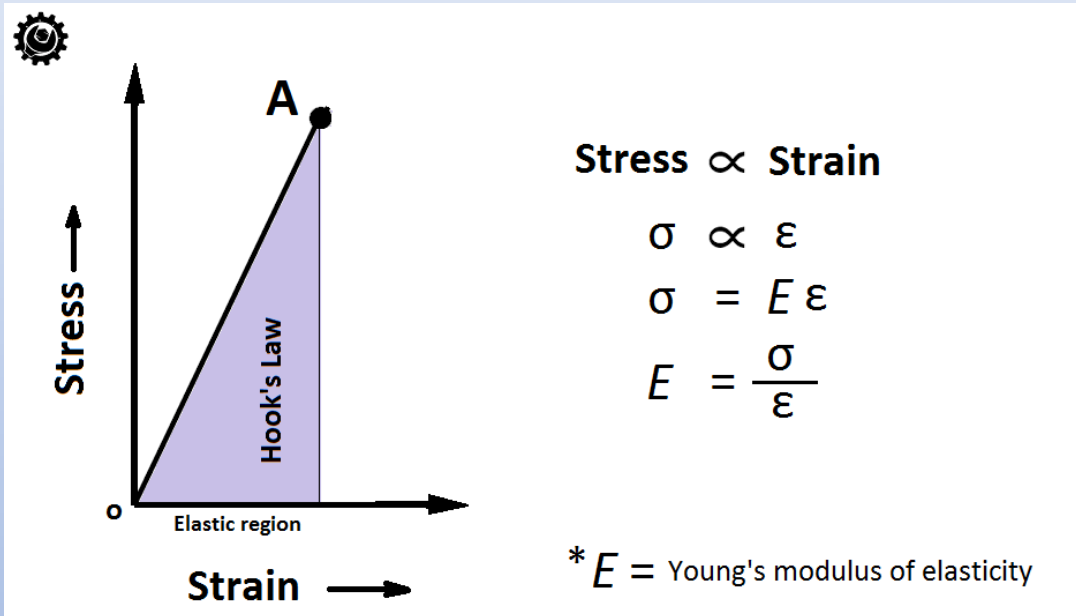
$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A \cdot E} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon \cdot L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A}$$



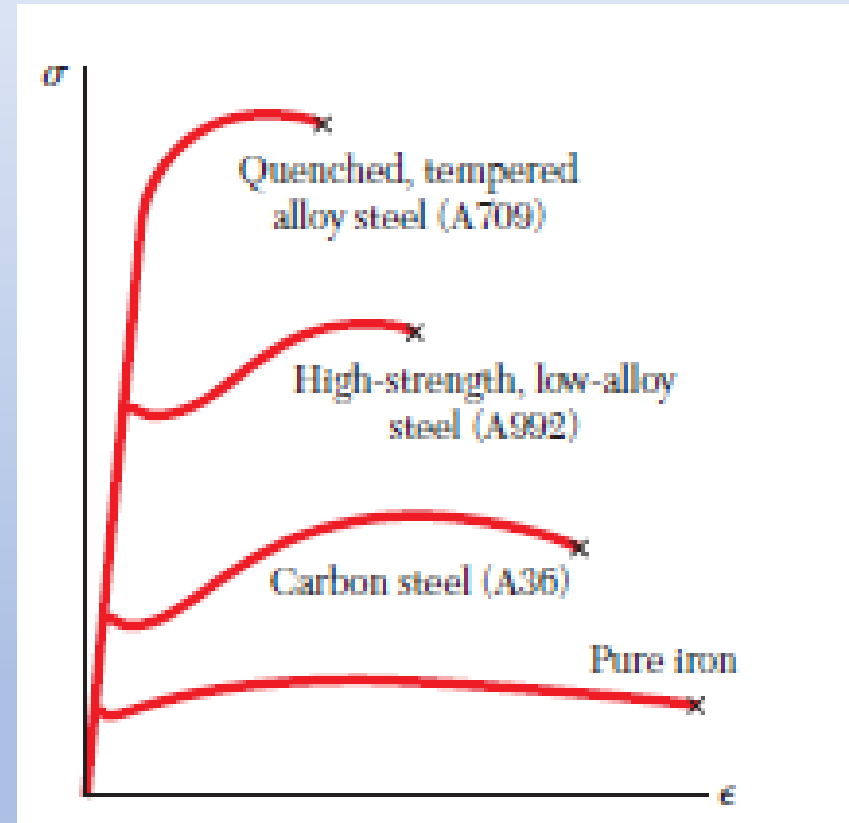
$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A}$$

Hooke's Law for Normal Stresses

Ο Νόμος του Hooke για Ορθές Τάσεις



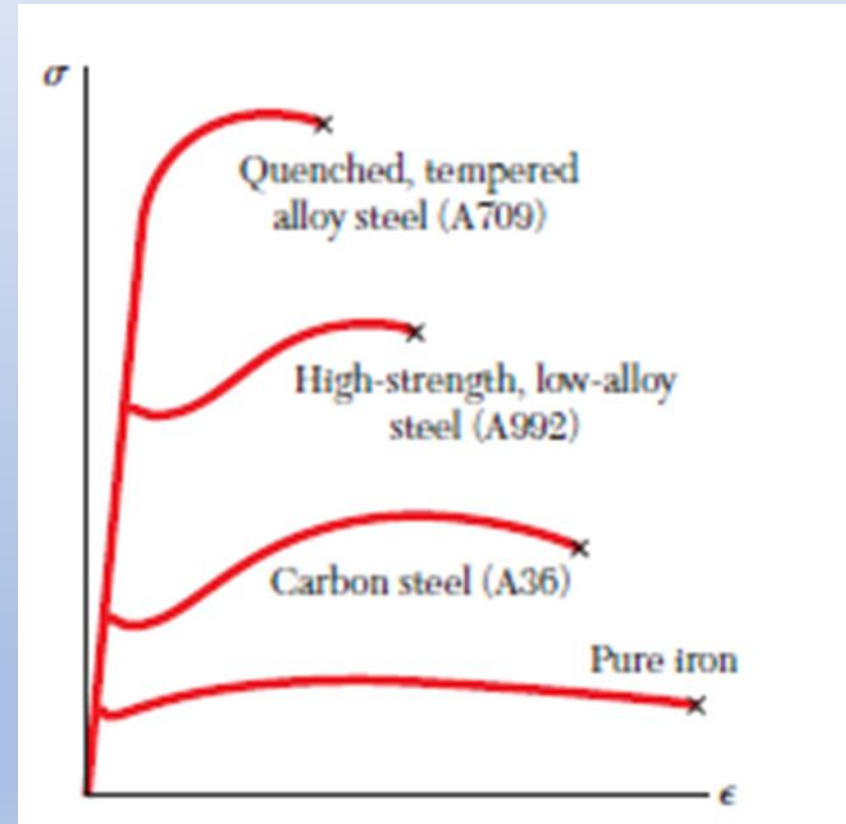
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \Delta L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A}$$



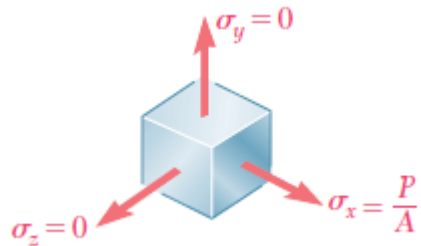
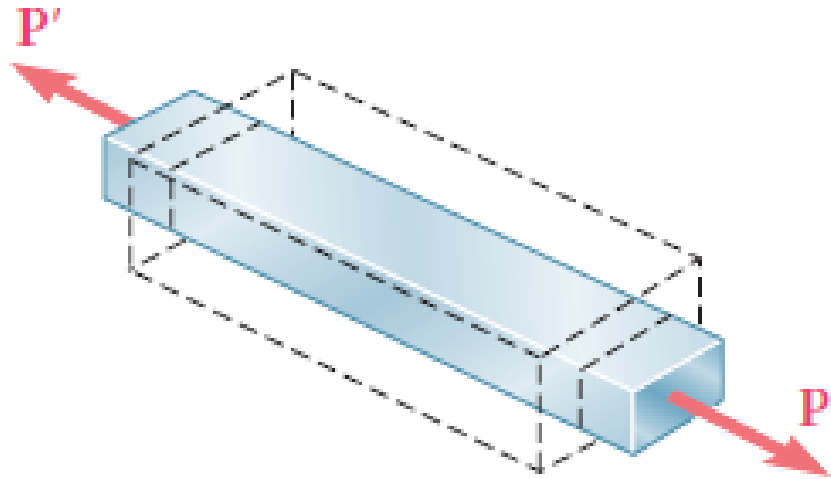
Μία σημαντική παρατήρηση

ΠΡΟΣΟΧΗ : Στο παραπλεύρως διάγραμμα, παρατηρούμε ότι τα διάφορα υλικά μπορεί να έχουν το ίδιο μέτρο ελαστικότητας αλλά να παρουσιάζουν διαφορετική αντοχή καθώς και διαφορετική παραμόρφωση σε θραύση.

Επομένως, το ότι δύο υλικά έχουν το ίδιο μέτρο ελαστικότητας, δεν συνεπάγεται το οποιοδήποτε συμπέρασμα σχετικά με την αντοχή ή την παραμόρφωση σε θραύση τους.



Παραμορφώσεις κατά τον εφελκυσμό



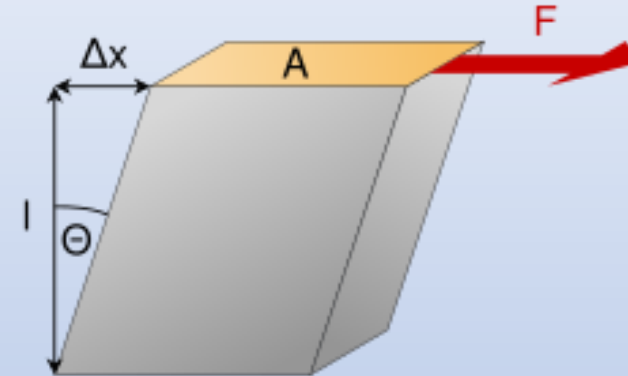
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

Τι είναι το Μέτρο Διάτμησης?

Στην επιστήμη των υλικών, το μέτρο διάτμησης, που συμβολίζεται με G , ή μερικές φορές με μ , είναι ένα μέτρο της ελαστικής δυσκαμψίας ενός υλικού και ορίζεται ως ο λόγος της διατμητικής τάσης προς την διατμητική παραμόρφωση:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{F/A}{\Delta x/l} = \frac{Fl}{A\Delta x}$$



Shear modulus

Common symbols G, S, μ

SI unit Pa

Derivations from other quantities $G = \tau / \gamma = E / [2(1 + \nu)]$

where

$\tau_{xy} = F/A$ = shear stress

F is the force which acts

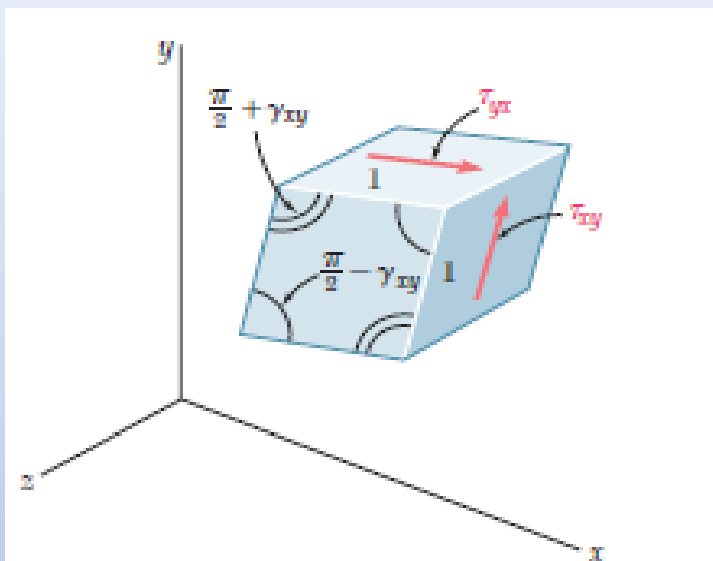
A is the area on which the force acts

γ_{xy} = shear strain. In engineering $:= \Delta x/l = \tan \theta$, elsewhere $:= \theta$

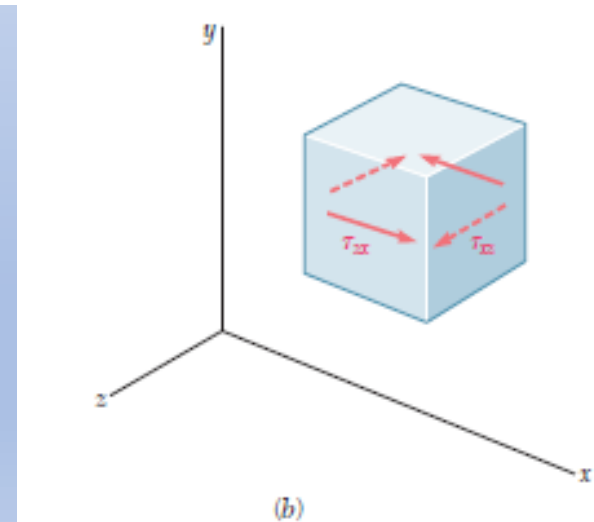
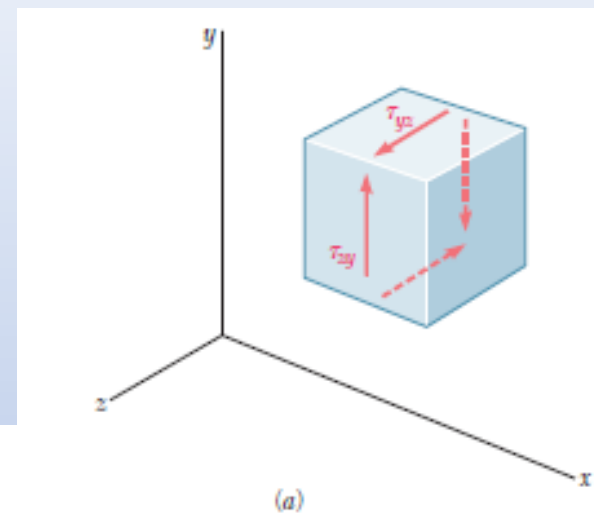
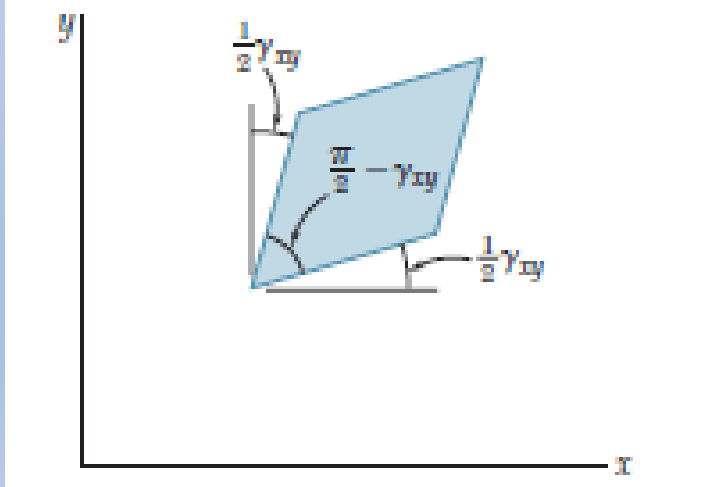
Δx is the transverse displacement

l is the initial length of the area.

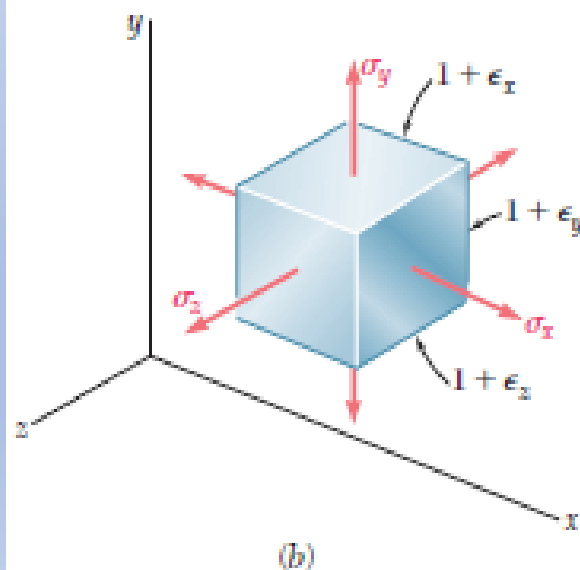
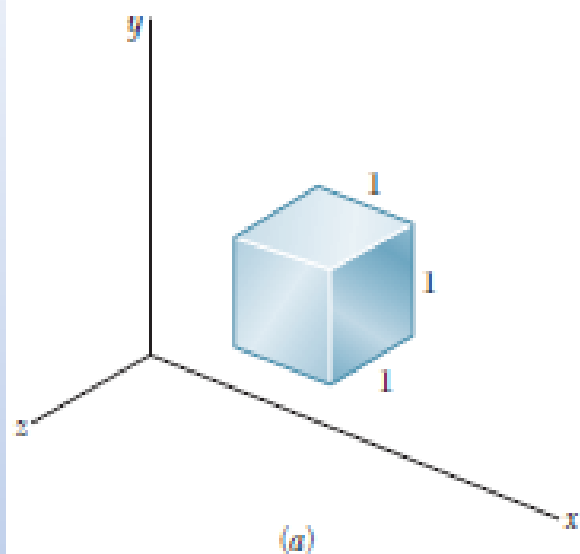
Διατμητικές Παραμορφώσεις



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$



Τριαξονική Φόρτιση

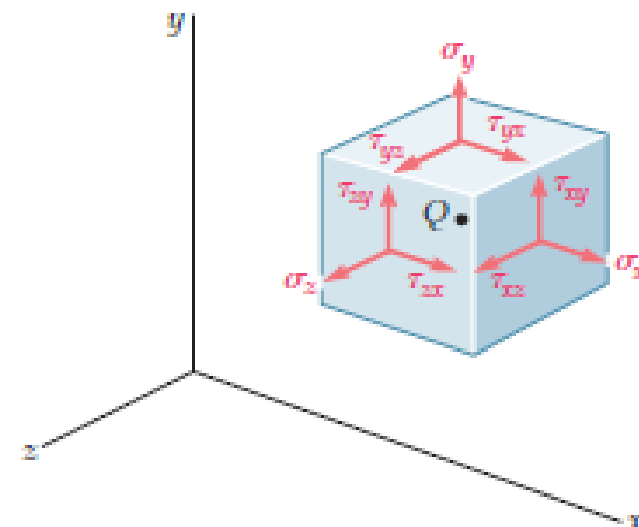


$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

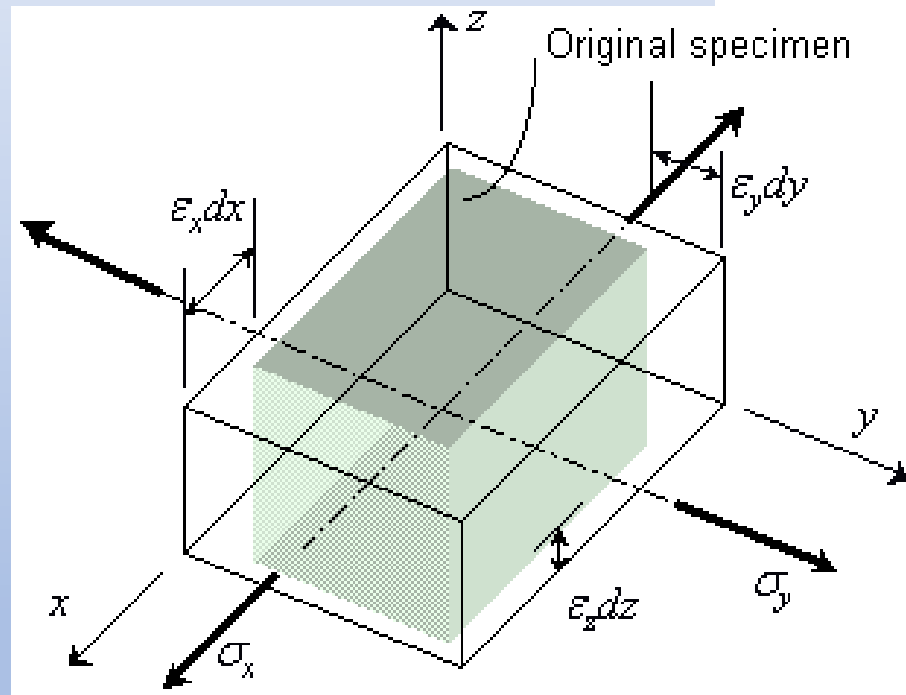
$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$



Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke για Ομογενή και Ισότροπα Υλικά



$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Generalised Hooke's Law

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Shear stress-strain relations

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke για Ομογενή και Ισότροπα Υλικά

Generalised Hooke's Law

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Shear stress-strain relations

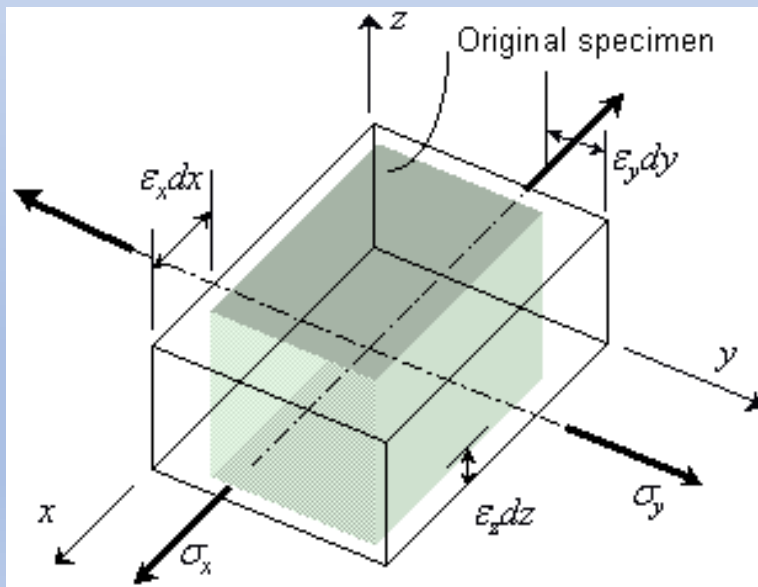
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

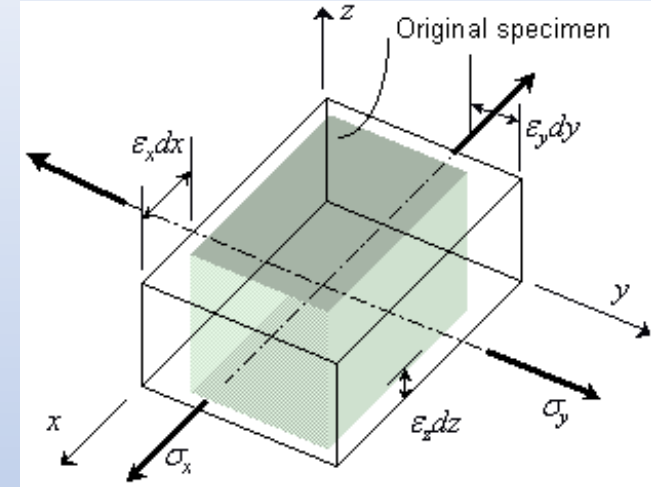
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Ο Πίνακας των Μέτρων Ένδοσης
The Compliance Matrix S_{ij}

The Generalized Hooke's Law for Homogeneous and Isotropic Materials in Matrix Form

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$



Ο Πίνακας των Μέτρων Δυσκαμψίας
The Stiffness Matrix C_{ij}

Shear Modulus

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y) \right]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

Ανηγμένη διόγκωση

Η **ανηγμένη διόγκωση** (ή αλλιώς **ογκομετρική ανηγμένη παραμόρφωση**, στα αγγλικά: *volumetric strain*) είναι ένας σημαντικός όρος στη Μηχανική, ειδικά σε προβλήματα **υδροστατικής φόρτισης**, **πλαστικής παραμόρφωσης** και **ανάλυσης τάσεων/παραμορφώσεων**.

Ορισμός: Τί είναι η ανηγμένη διόγκωση;

Η **ανηγμένη διόγκωση** είναι το άθροισμα των **ορθών παραμορφώσεων** στις τρεις κατευθύνσεις:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Εκφράζει την **σχετική μεταβολή όγκου** του υλικού:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

Σχέση της Ανηγμένης Διόγκωσης με τον λόγο του Poisson και την ορθή παραμόρφωση

Ας υποθέσουμε ένα σώμα που επιμηκύνεται μόνο στον άξονα x , ενώ στους άλλους άξονες δεν υπάρχει άμεση φόρτιση (αλλά αναπτύσσονται παραμορφώσεις λόγω Poisson):

•Ορθή παραμόρφωση κατά x :

$$\varepsilon_x = \varepsilon$$

Οι εγκάρσιες παραμορφώσεις λόγω του **φαινομένου Poisson** θα είναι:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon$$

(το μείον γιατί υπάρχει συστολή στους εγκάρσιους άξονες)

Άρα η ανηγμένη διόγκωση θα είναι: $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon - \nu\varepsilon - \nu\varepsilon = \varepsilon \cdot (1 - 2\nu)$

Σχόλια στην Τελική Σχέση

Τελική σχέση: $\varepsilon_v = \varepsilon \cdot (1 - 2\nu)$

όπου:

- ε_v : ανηγμένη διόγκωση
- ε : ορθή παραμόρφωση στην κύρια διεύθυνση φόρτισης
- ν : λόγος του Poisson

Σχόλιο:

• Για $\nu = 0.5$ (ασυμπίεστο υλικό, όπως πολλά υγρά): $\varepsilon_v = \varepsilon \cdot (1 - 2 \cdot 0.5) = 0$

⇒ Καμία μεταβολή όγκου!

Για **στερεά υλικά** όπως ο χάλυβας ($\nu \approx 0.3$), έχουμε μικρή αλλά υπαρκτή μεταβολή όγκου.

Παράδειγμα εφαρμογής της σχέσης

Αν ένα υλικό επιμηκύνεται κατά 1% ($\varepsilon = 0.01$) και έχει λόγο Poisson $\nu = 0.3$, τότε:

$$\varepsilon_v = 0.01 \cdot (1 - 2 \cdot 0.3) = 0.01 \cdot 0.4 = 0.004 = 0.4\%$$

Άρα ο όγκος του αυξάνεται κατά 0.4%.

Γενικές μορφές της σχέσης σε περιπτώσεις πολυ-αξονικής φόρτισης

Πάμε να δούμε τη **γενικευμένη μορφή της ανηγμένης διόγκωσης** (ογκομετρικής παραμόρφωσης) σε **τρισδιάστατη εντατική κατάσταση** – δηλαδή όταν ασκούνται τάσεις και στις τρεις διευθύνσεις.

Έστω ότι έχουμε:

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: οι **ορθές τάσεις** στους τρεις κύριους άξονες.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό** και **ισότροπο**.
- Οι **παραμορφώσεις** που αντιστοιχούν σε αυτές τις τάσεις δίνονται από τις **εξισώσεις Hooke**:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

Ανηγμένη διόγκωση στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

Η **συνολική ογκομετρική παραμόρφωση** είναι το άθροισμα των τριών ορθών παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Αν προσθέσουμε τις τρεις παραπάνω εξισώσεις:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Σχόλια στην Τελική Σχέση

Όπως είδαμε, η τελική σχέση της ανηγμένης διόγκωσης στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση, είναι:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Η σχέση αυτή γράφεται και ως:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot \text{tr}[\sigma]$$

όπου $\text{tr}[\sigma]$ είναι το **ίχνος του τανυστή τάσεων**, δηλαδή το **άθροισμα των κύριων τάσεων** και ισούται με 3 φορές τη **μέση υδροστατική τάση** σ_m :

$$\text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\text{tr}[\sigma] = 3\sigma_m \quad \text{όπου} \quad \sigma_m = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$$

Το Μέτρο Διόγκωσης K

Στη Μηχανική, το **μέτρο διόγκωσης** (ή **μέτρο όγκου** – στα αγγλικά: *bulk modulus*, συμβολίζεται συνήθως με **K**) είναι μια ελαστική σταθερά που περιγράφει το **πόσο δύσκολο είναι να συμπιεστεί ένα υλικό**.

Ορισμός:

Το **μέτρο διόγκωσης K** ορίζεται ως:

$$K = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

όπου:

- Δp : η μεταβολή πίεσης που ασκείται στο σώμα (θετική σε συμπίεση),
- $\Delta V/V$: η σχετική μεταβολή του όγκου (λόγος μεταβολής όγκου προς αρχικό όγκο),
- το αρνητικό πρόσημο μπαίνει επειδή η αύξηση πίεσης προκαλεί μείωση όγκου.

Φυσική Σημασία του Μέτρου Διόγκωσης

Φυσική σημασία:

- Όσο **μεγαλύτερο** είναι το K , τόσο **λιγότερο συμπιέσιμο** είναι το υλικό.
- Ιδανικά άκαμπτα υλικά $\rightarrow K \rightarrow \infty$
- Πολύ "μαλακά" υλικά ή υγρά $\rightarrow$ μικρότερο K

Σχέση του Μέτρου Διόγκωσης με άλλα Ελαστικά Μεγέθη

Αν υποθέσουμε ότι το υλικό είναι **ισότροπο** και **γραμμικά ελαστικό**, τότε το μέτρο διόγκωσης K συνδέεται με:

- το **μέτρο ελαστικότητας του Young** (E)
- το **μέτρο διάτμησης** (G)
- τον **συντελεστή Poisson** (ν)

Οι σχέσεις είναι:

1. Με E και ν :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

2. Με G και ν :

$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$$

Αντίστροφα, μπορούμε να εκφράσουμε και τα άλλα μεγέθη συναρτήσει του K , π.χ.:

$$E = 3K(1 - 2\nu)$$

Παράδειγμα

Ένα απλό παράδειγμα:

Για τα περισσότερα μέταλλα:

- $\nu \approx 0.3$

- Αν γνωρίζουμε το μέτρο του Young E , μπορούμε να υπολογίσουμε το K

$$K = \frac{E}{3(1 - 2 \cdot 0.3)} = \frac{E}{3 \cdot 0.4} = \frac{E}{1.2}$$

Συνοπτικά Συμπεράσματα για τα Μέτρα

Μέγεθος

E (Μέτρο του Young)

G (Μέτρο Διάτμησης)

K (Μέτρο Διόγκωσης)

ν (Λόγος του Poisson)

Τι περιγράφει

Αντίσταση σε εφελκυσμό ή θλίψη

Αντίσταση σε παραμόρφωση διάτμησης

Αντίσταση σε ογκομετρική μεταβολή

Λόγος της εγκάρσιας προς την διαμήκη παραμόρφωση

Πώς προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν το μέτρο διόγκωσης K με τα E , G και ν ?

Οι σχέσεις μεταξύ των ελαστικών μεγεθών (K , E , G , ν) προκύπτουν από τη γενική **θεωρία γραμμικής ελαστικότητας** για **ισότροπα** και **ομογενή** υλικά. Παρακάτω θα δείξουμε **πώς προκύπτουν βήμα-βήμα** αυτές οι σχέσεις από τις βασικές εξισώσεις.

Βασικά μεγέθη:

- E : Μέτρο του Young (ή μέτρο ελαστικότητας, Young's Modulus)
- G : Μέτρο διάτμησης (shear modulus)
- K : Μέτρο διόγκωσης (ή μέτρο όγκου, bulk modulus)
- ν : Συντελεστής Poisson

Πώς προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν το μέτρο διόγκωσης K με τα E , G και ν ?

Ξεκινάμε από τις βασικές σχέσεις παραμόρφωσης
Για ισότροπα υλικά, οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και παραμορφώσεων δίνουν:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Βήμα 1: Ανηγμένη Διόγκωση

Βήμα 1: Ανηγμένη Διόγκωση

Η ολική ανηγμένη διόγκωση (δηλ. η μεταβολή του όγκου προς τον αρχικό όγκο) είναι:

$$\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Αν προσθέσουμε τις 3 προηγούμενες εξισώσεις:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\nu)]$$

Βήμα 2. Από τον ορισμό του μέτρου διόγκωσης

Βήμα 2: Ορισμός του μέτρου διόγκωσης

Αν εφαρμόσουμε **ισότροπη πίεση** (δηλαδή υδροστατική πίεση), τότε:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

(Αρνητικό πρόσημο γιατί πρόκειται για πίεση.)

Άρα:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(-3p)(1 - 2\nu)] = -\frac{3p(1 - 2\nu)}{E}$$

Βήμα 2. (συνέχεια)

Αλλά από τον **ορισμό του K**:

$$K = -\frac{p}{\Delta V/V} = -\frac{p}{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Άρα:

$$K = \frac{p}{\frac{3p(1-2\nu)}{E}} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Αυτή είναι η βασική σχέση:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Σχέση του K με G και ν

Από τη γνωστή σχέση μεταξύ E , G και ν :

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Και την σχέση $E = 3K(1 - 2\nu)$, προκύπτει ότι:

$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$$

$$\boxed{K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}}$$

Περίληψη των Βασικών Σχέσεων

Σχέση

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$E = 2G(1 + \nu)$$

$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$$

Ερμηνεία

Μέτρο διόγκωσης συναρτήσει των E και ν

Μέτρο του Young συναρτήσει των G και το ν

Μέτρο διόγκωσης συναρτήσει των G και ν

Αριθμητικό Παράδειγμα

Δεδομένα: Ένα ισότροπο, ελαστικό υλικό έχει:

• **Μέτρο του Young:**

$$E = 210 \text{ GPa}$$

• (τυπική τιμή για χάλυβα)

• **Συντελεστής Poisson:**

$$\nu = 0.3$$

Ζητούνται:

1. Το μέτρο διάτμησης G
2. Το μέτρο διόγκωσης K

Υπολογισμοί των G και K

Υπολογισμός G

Χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$E = 2G(1 + \nu) \Rightarrow G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Άρα:

$$G = \frac{210}{2(1 + 0.3)} = \frac{210}{2.6} \approx 80.77 \text{ GPa}$$

Υπολογισμός K

Χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Άρα:

$$K = \frac{210}{3(1 - 2 \cdot 0.3)} = \frac{210}{3(0.4)} = \frac{210}{1.2} = 175 \text{ GPa}$$

Σχέση της ανηγμένης διόγκωσης με το μέτρο διόγκωσης στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

Θυμόμαστε ότι:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \Rightarrow \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{3K}$$

Άρα:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}$$

ή:

$$\varepsilon_v = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3K}$$

Και επειδή $tr[\boldsymbol{\sigma}] = 3\sigma_m$, έπεται ότι:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K}$$

Συμπεράσματα

Συμπεράσματα:

- Η ανηγμένη διόγκωση εξαρτάται **μόνο από την υδροστατική (μέση) τάση**.
- Δεν επηρεάζεται από τάσεις διάτμησης (shear).
- Σε **ασυμπίεστα υλικά**, για τα οποία $\nu = 0.5$, προκύπτει $\varepsilon_\nu = 0$ (ο όγκος δεν αλλάζει).

Παράδειγμα

Έστω: $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 75 \text{ MPa}$

Υλικό με $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$

Υπολογίζουμε:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2 \cdot 0.3}{200 \times 10^3} \cdot (100 + 50 + 75) = \frac{0.4}{200 \times 10^3} \cdot 225$$

$$\varepsilon_v = \frac{0.4 \cdot 225}{200000} = \frac{90}{200000} = 0.00045 = 0.045\%$$

Άρα το υλικό αυξάνει τον όγκο του κατά **0.045%** υπό αυτή τη φόρτιση.

Ο Λόγος του Poisson και οι βασικές σχέσεις

Metal	Possion ratio	Polymer	Possion Ratio
Al	0,25	PS	0,33
Cu	0,31-0,34	Natural rubber	0,49
Steel	0,27-0,30	Nylon 6,6	0,4
		LDPE	0,4
		PMMA	0,33

Possion ratios of some metals and polymers

$$\Delta V = (1 - 2\nu) \varepsilon V_0$$

ΔV =Διόγκωση
 ν =Λόγος του Poisson
 ε =Παραμόρφωση
 V_0 =Αρχικός όγκος, πριν την παραμόρφωση

$$E = 2G(1 + \nu)$$

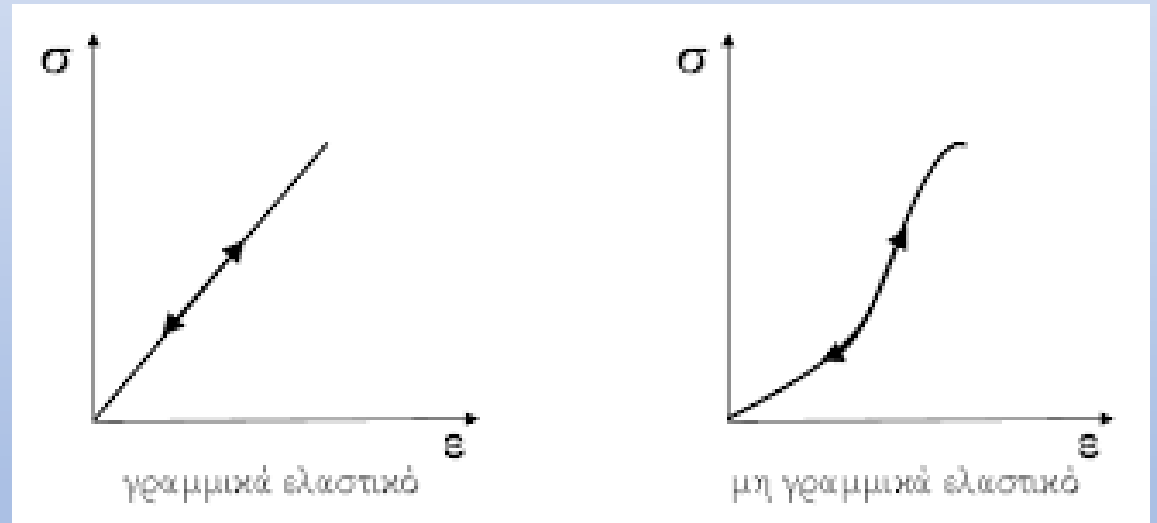
$$E = 3K(1 - 2\nu)$$

E =Μέτρο Ελαστικότητας
 ν =Λόγος του Poisson
 G =Μέτρο Διάτμησης
 K =Μέτρο Διόγκωσης

Ελαστική Συμπεριφορά

Ένα υλικό λέμε ότι παρουσιάζει **ελαστική συμπεριφορά**, όταν:

- Μετά την αποφόρτιση επιστρέφει στις αρχικές του διαστάσεις.
 - Η επιστροφή στις αρχικές διαστάσεις ακολουθεί τον ίδιο δρόμο με εκείνον της φόρτισης.
 - Η επιστροφή στις αρχικές διαστάσεις, συμβαίνει ακαριαία.
- Αν επιπλέον των παραπάνω συνθηκών η τάση είναι ανάλογη της παραμόρφωσης, τότε η συμπεριφορά ονομάζεται **γραμμικά ελαστική (linear elastic behavior)**.
 - Αντίθετα, αν ισχύουν οι τρεις βασικές συνθήκες αλλά η τάση δεν είναι ανάλογη της παραμόρφωσης, τότε η συμπεριφορά ονομάζεται **μη-γραμμικά ελαστική (non-linearly elastic behavior)**.



Αιτίες Αστοχίας των Πολυμερών

1. Λόγω μεγάλης ελαστικής παραμόρφωσης

Ιδιαίτερα σε φέρουσες κατασκευές, λόγω μη επαρκούς στιβαρότητας (rigidity) ή δυσκαμψίας (stiffness). Σε αυτήν την περίπτωση, ο καθοριστικός παράγοντας είναι το μέτρο ελαστικότητας.

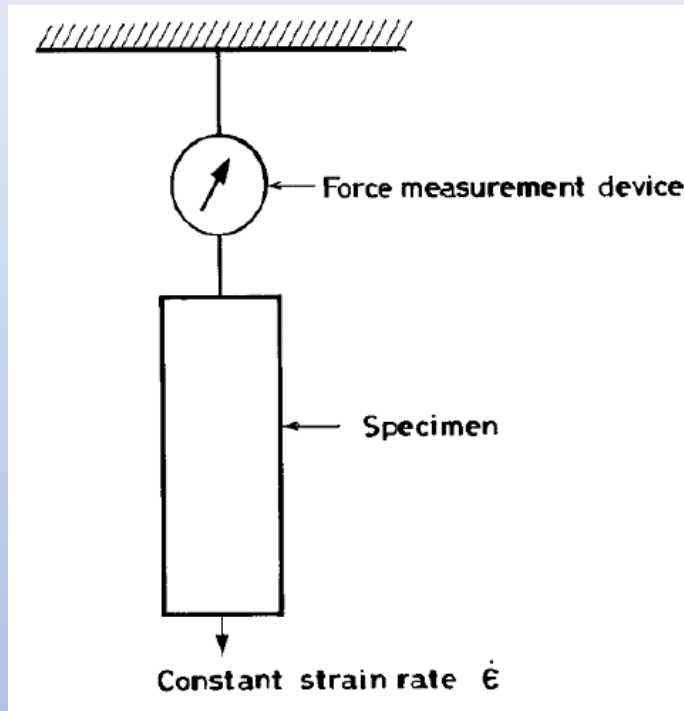
2. Λόγω διαρροής ή εκτεταμένης πλαστικής παραμόρφωσης

Σε κάποιες εφαρμογές, τα πολυμερή αποτυγχάνουν να φέρουν τα φορτία που προκαλούνται από εξωτερικά αίτια λόγω μη επαρκούς αντοχής (strength). Για την ποσοτικοποίηση αυτών των αστοχιών, είναι απαραίτητη η γνώση της τάσης διαρροής (yield strength) και της αντίστοιχης παραμόρφωσης (yield strain).

3. Λόγω θραύσης

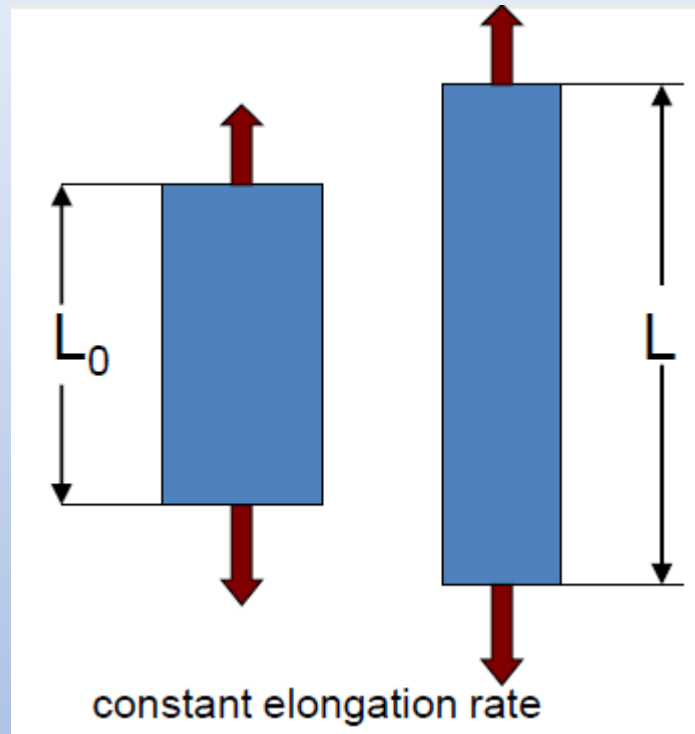
Οι ρωγμές είναι περιοχές ασυνέχειας (discontinuity areas) των υλικών που συχνά οδηγούν στην θραύση (fracture). Η θραύση μπορεί να συμβεί ξαφνικά και απροειδοποίητα και το υλικό να σπάσει ψαθυρά (brittle fracture), η μπορεί να σπάσει λόγω κόπωσης με μία σταδιακή διαδικασία (progressive fracture).

Συμπεριφορά σ-ε των πολυμερών



- Τα πολυμερή παρουσιάζουν μία ποικιλία συμπεριφορών, που εκτείνεται, ανάλογα με τις συνθήκες, από την απόλυτα ψαθυρή έως την απόλυτα όλκιμη.
- Η χρησιμότητα των διαγραμμάτων σ-ε των πολυμερών διευρύνεται αν γίνουν πειράματα τάσης-παραμόρφωσης σε διάφορες θερμοκρασίες και διάφορους **ρυθμούς παραμόρφωσης** (*Strain-rates*).
- Όπως θα δούμε και στην συνέχεια, αυξανόμενης της ταχύτητας παραμόρφωσης, αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας και η αντοχή, ενώ μειώνεται η παραμόρφωση θραύσης.

Σημαντικά μεγέθη: Ορισμοί



Μέση Ορθή Τάση:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Μέση Ορθή
Παραμόρφωση:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L}$$

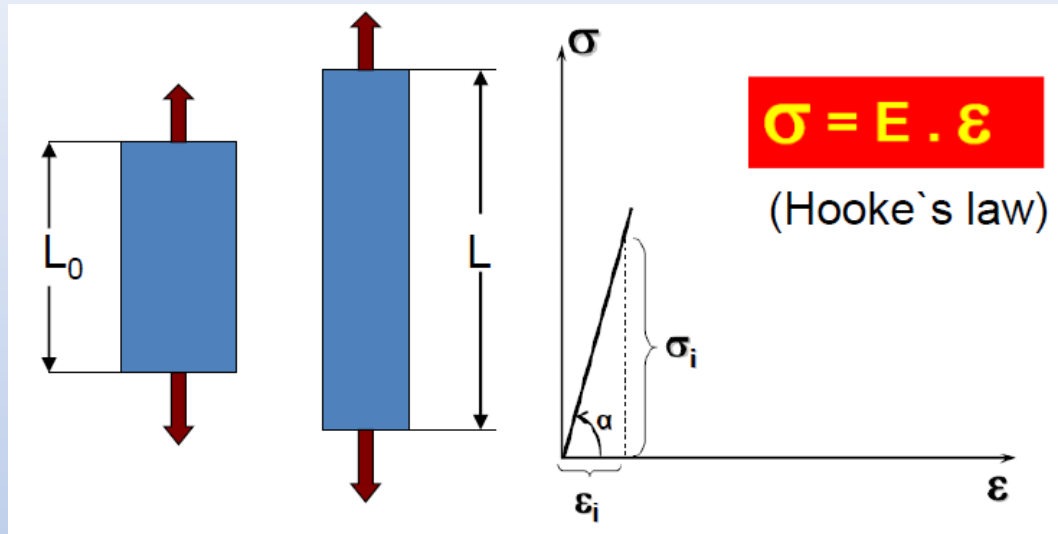
Πραγματική Ορθή Τάση:

$$\sigma_t = \frac{F}{A}$$

Πραγματική Ορθή Παραμόρφωση:

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \left(\frac{\Delta L + L_0}{L_0} \right) = \ln(1 + \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \sigma_t = \sigma(1 + \varepsilon)$$

Stress-Strain Relation in Linear Elastic Behavior

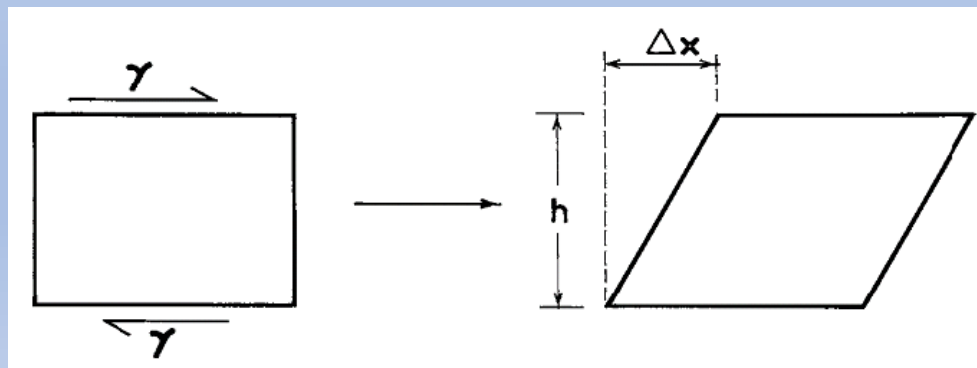


Elastic Modulus

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan(\alpha)$$

Shear strain

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h}$$



Shear stress

$$\frac{\tau}{\gamma} = G$$

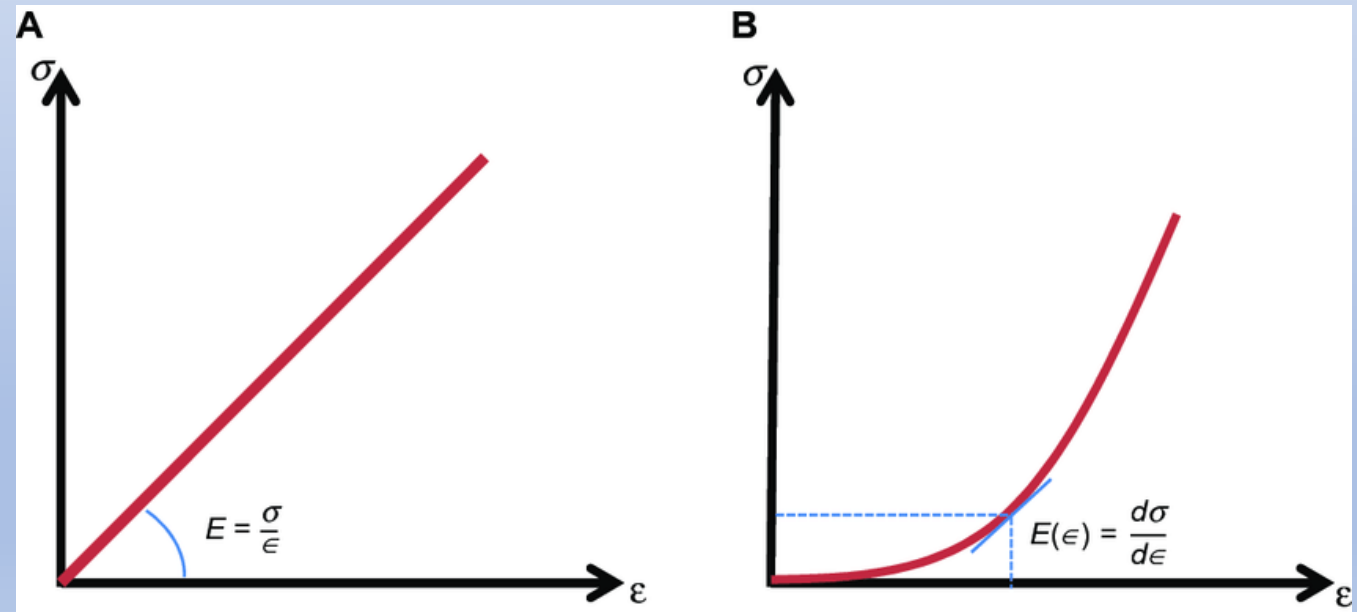
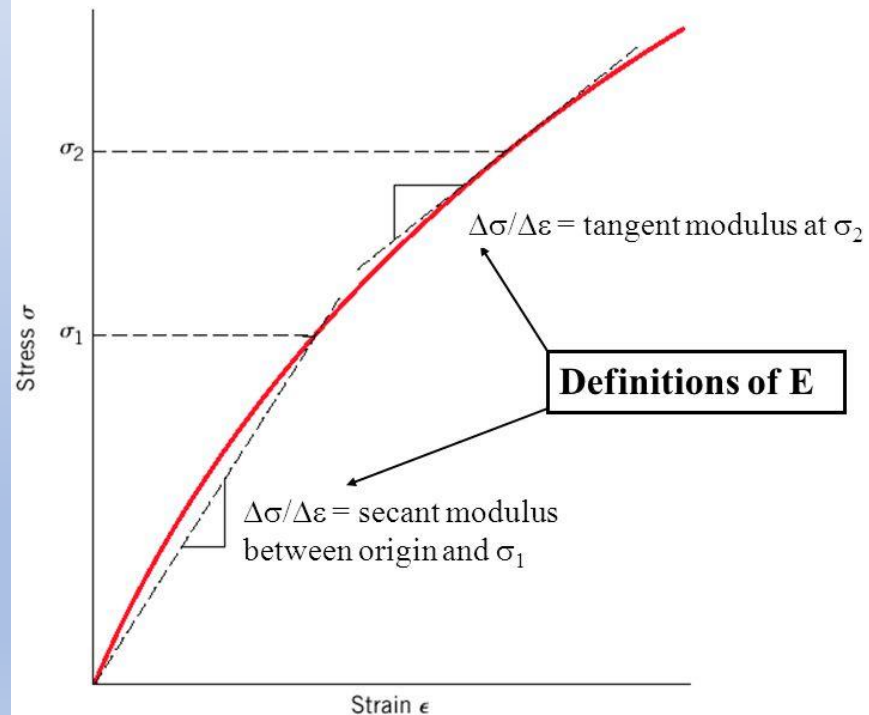
Shear modulus

Γραμμικά Ελαστική και μη-Γραμμικά Ελαστική Συμπεριφορά

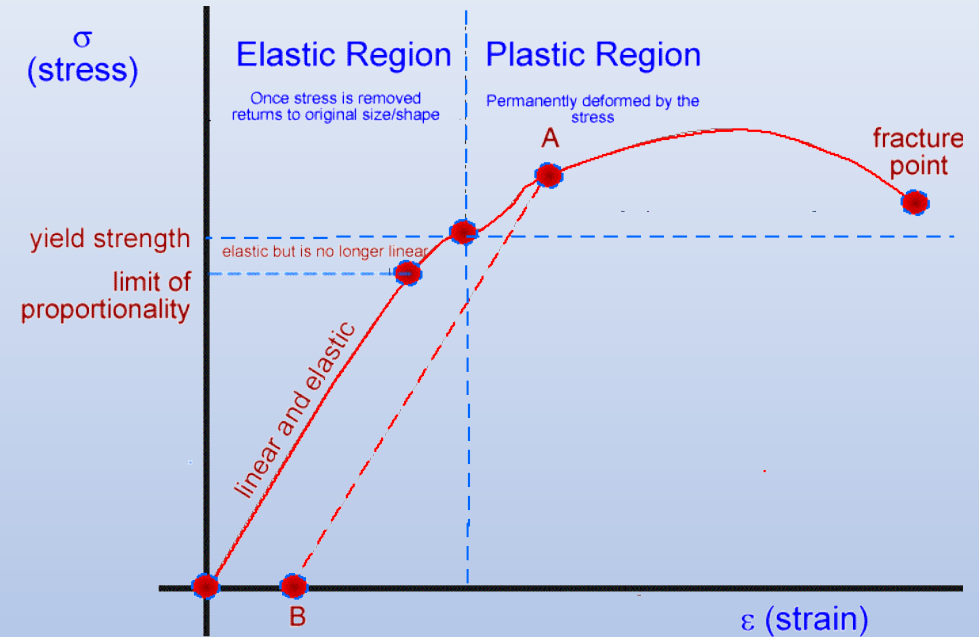
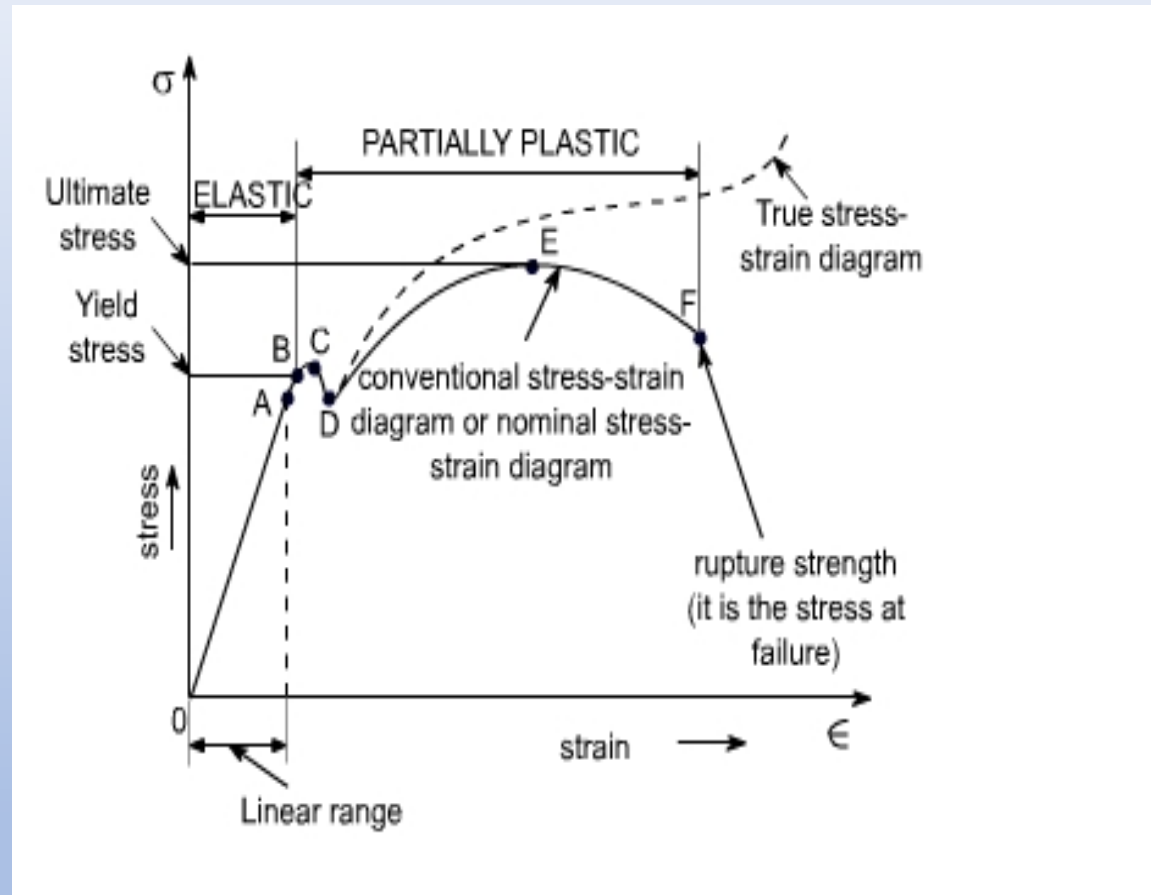
Introduction To Materials Science, Chapter 6, Mechanical Properties of Metals

Nonlinear elastic behavior

In some materials (many polymers, concrete...), elastic deformation is not linear, but it is still reversible.



Καμπύλες $\sigma - \epsilon$



σ_A = Όριο Αναλογίας

σ_B = Όριο Ελαστικότητας

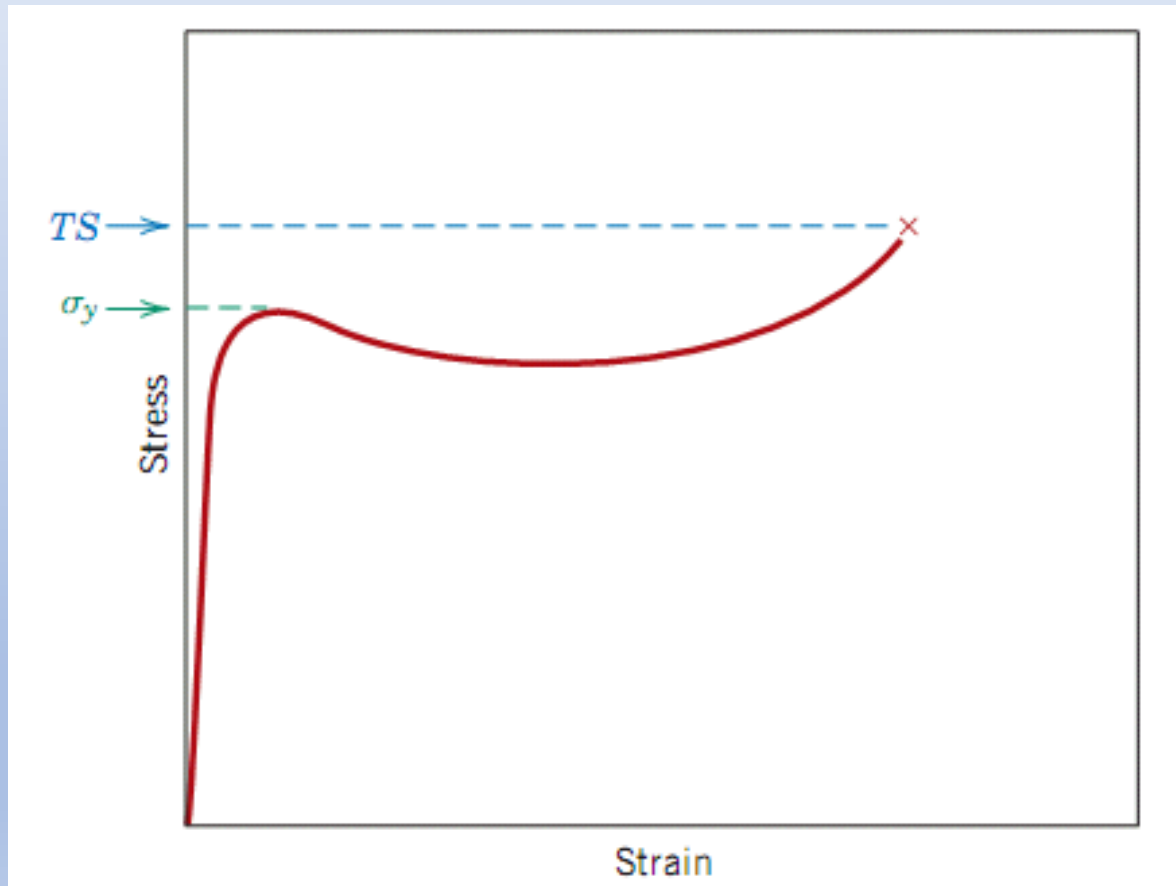
σ_C = Άνω Όριο Διαρροής

σ_D = Κάτω Όριο Διαρροής

σ_E = Αντοχή σε Εφελκυσμό

σ_F = Τάση Θραύσεως

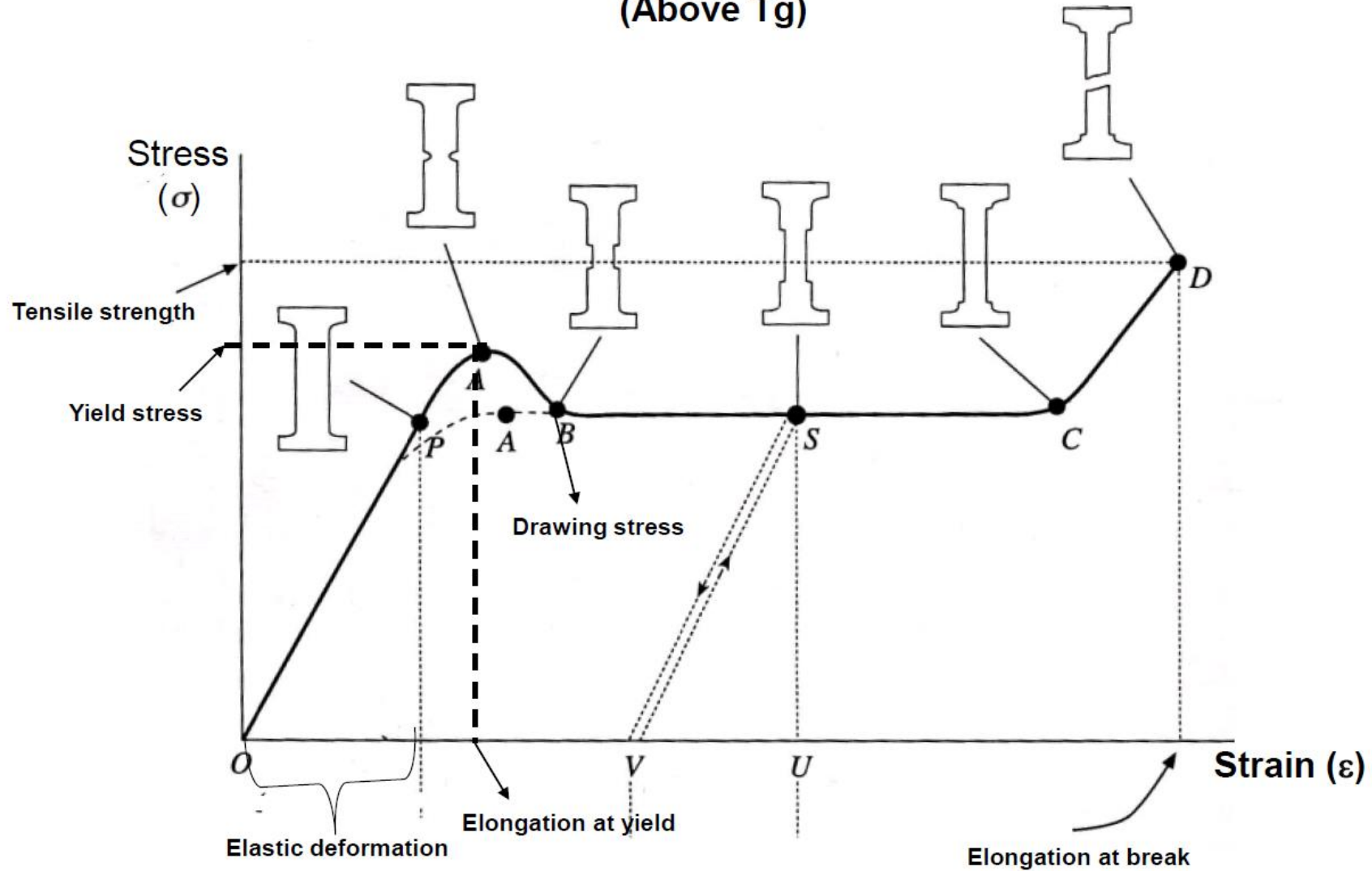
Καμπύλη $\sigma - \epsilon$ πολυμερούς



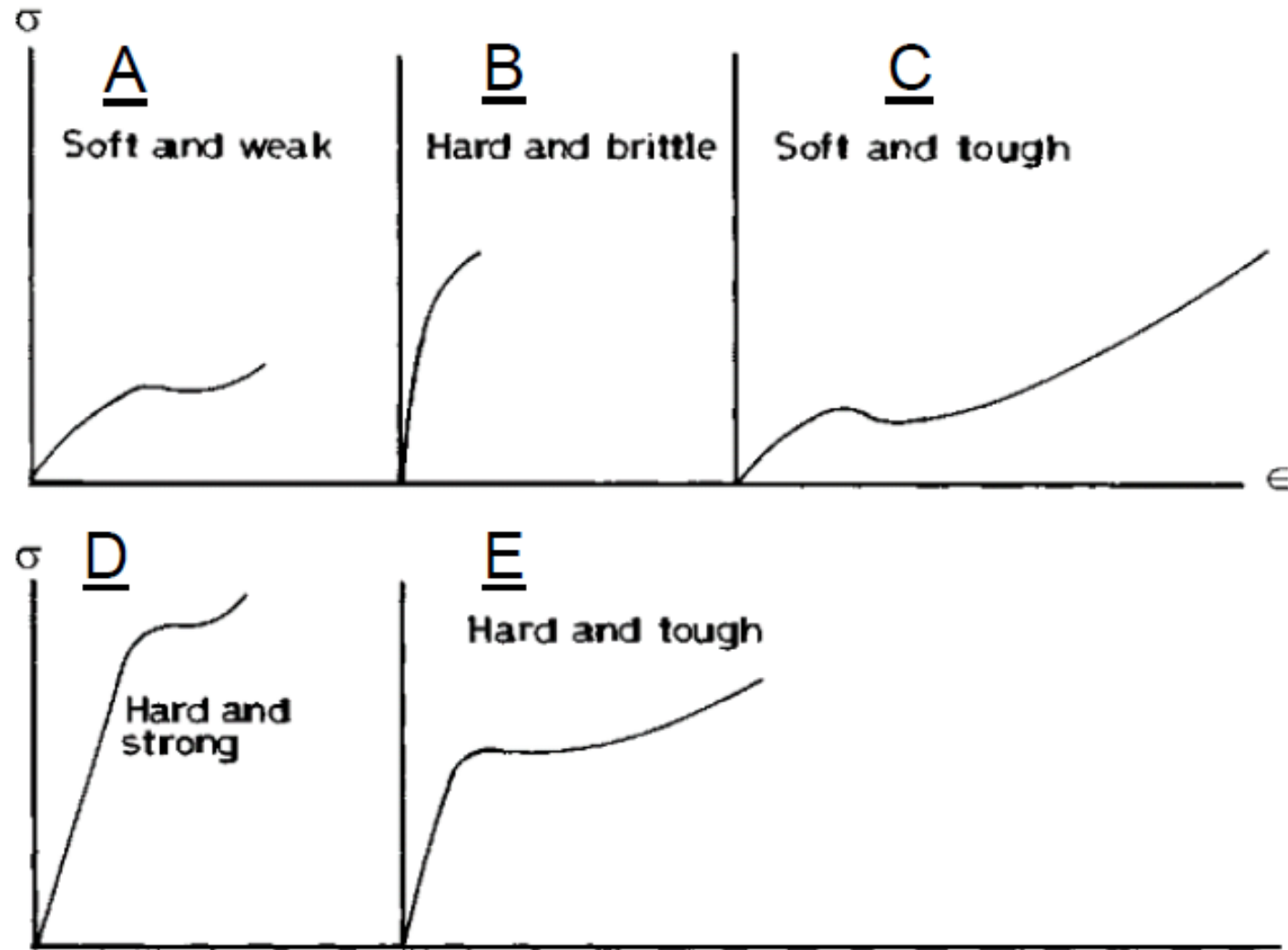
Αυτή είναι μία γενική μορφή καμπύλης σ - ϵ ενός πολυμερούς. Με TS συμβολίζεται η αντοχή σε εφελκυσμό (Tensile Strength) και με σ_y η τάση διαρροής (Yield Stress) του πολυμερούς.

Όπως θα δούμε, υπάρχουν καμπύλες σ - ϵ διαφορετικής μορφής. Η μορφή των καμπυλών σ - ϵ εξαρτάται από την φύση του πολυμερούς, καθώς και από τις πειραματικές συνθήκες.

**Schematic tensile stress–strain curve for a semicrystalline polymer.
(Above T_g)**



Διάφοροι τύποι καμπυλών σ-ε πολυμερών

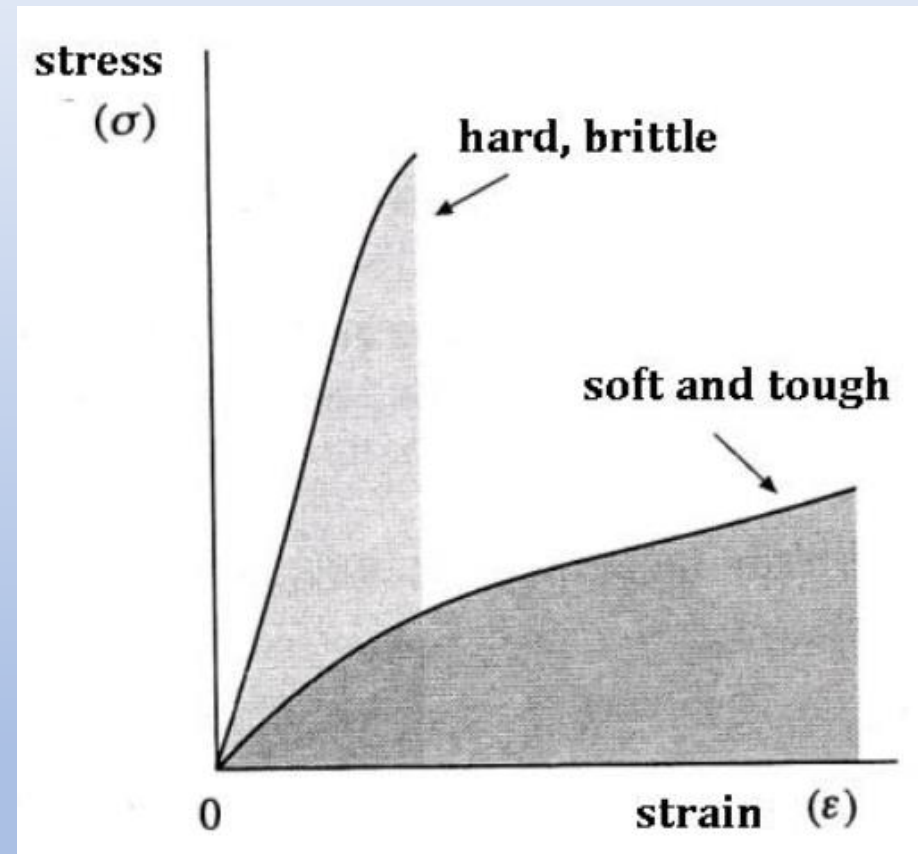
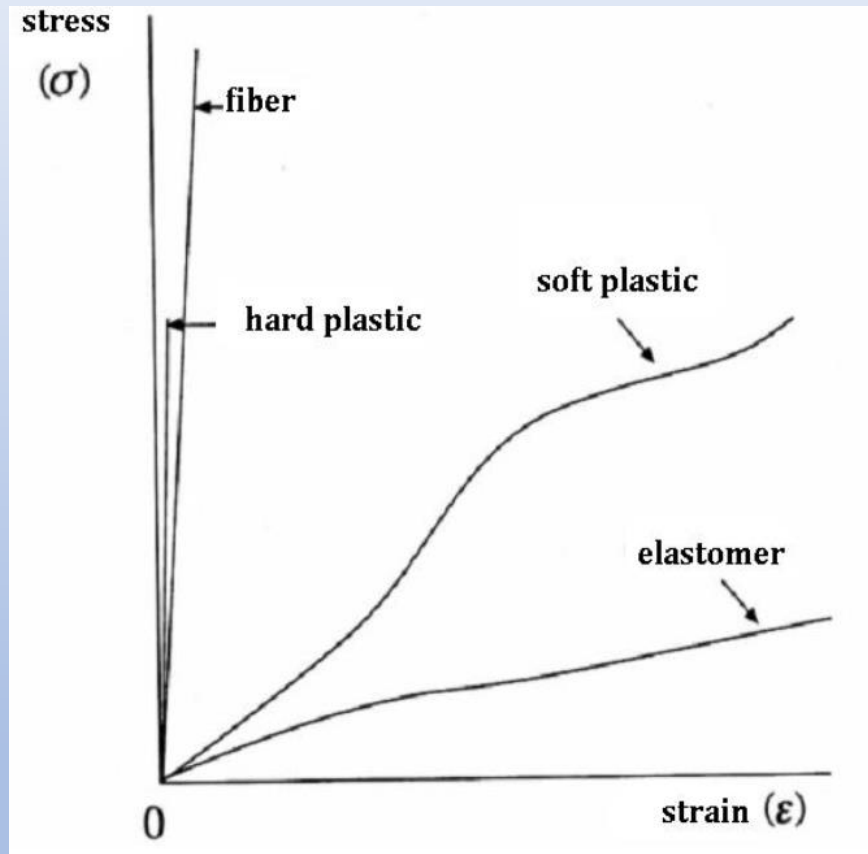


Μηχανική Συμπεριφορά των Πολυμερών

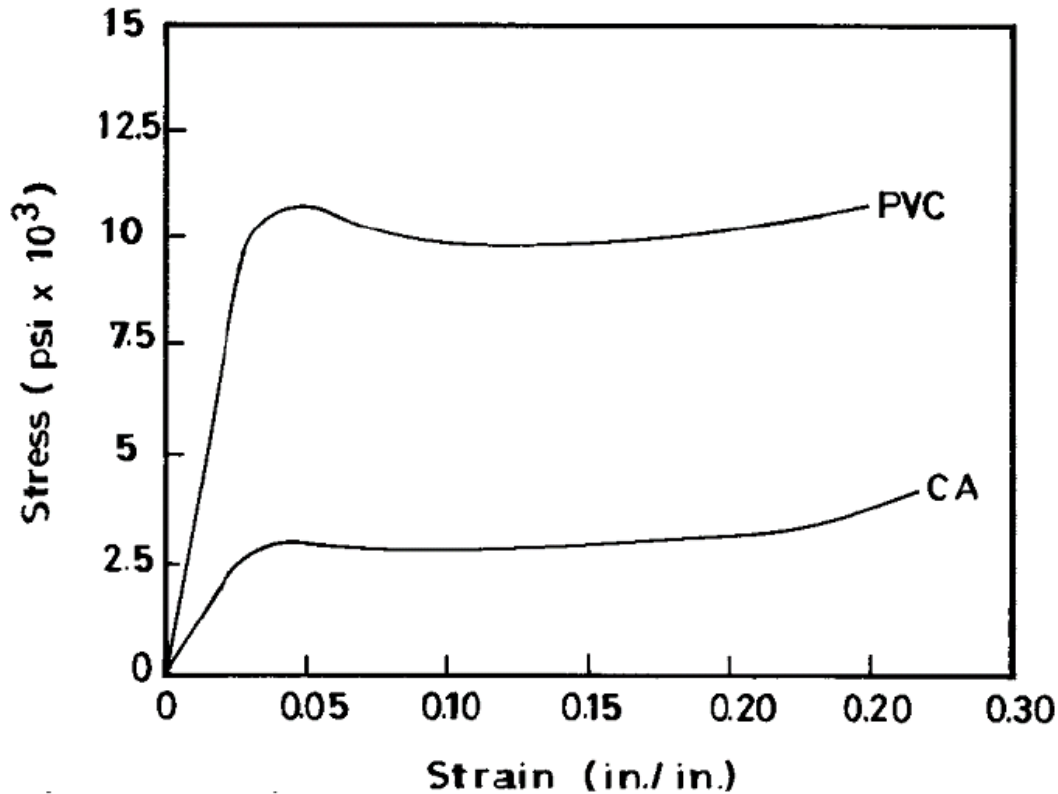
Characteristic Features of Polymer Stress–Strain Behavior

Material Stress-Strain Behavior	Elastic Modulus	Yield Point	Tensile Strength	Elongation at Break
Soft and weak (polymer gels)	Low	Low	Low	Moderate
Hard and brittle (PS)	High	Practically nonexistent	High	Low
Hard and strong (PVC)	High	High	High	Moderate
Soft and tough (rubbers and plasticized PVC)	Low	Low	Moderate	High
Hard and tough (cellulose acetate, nylon)	High	High	High	High

Μηχανική Συμπεριφορά Πολυμερών

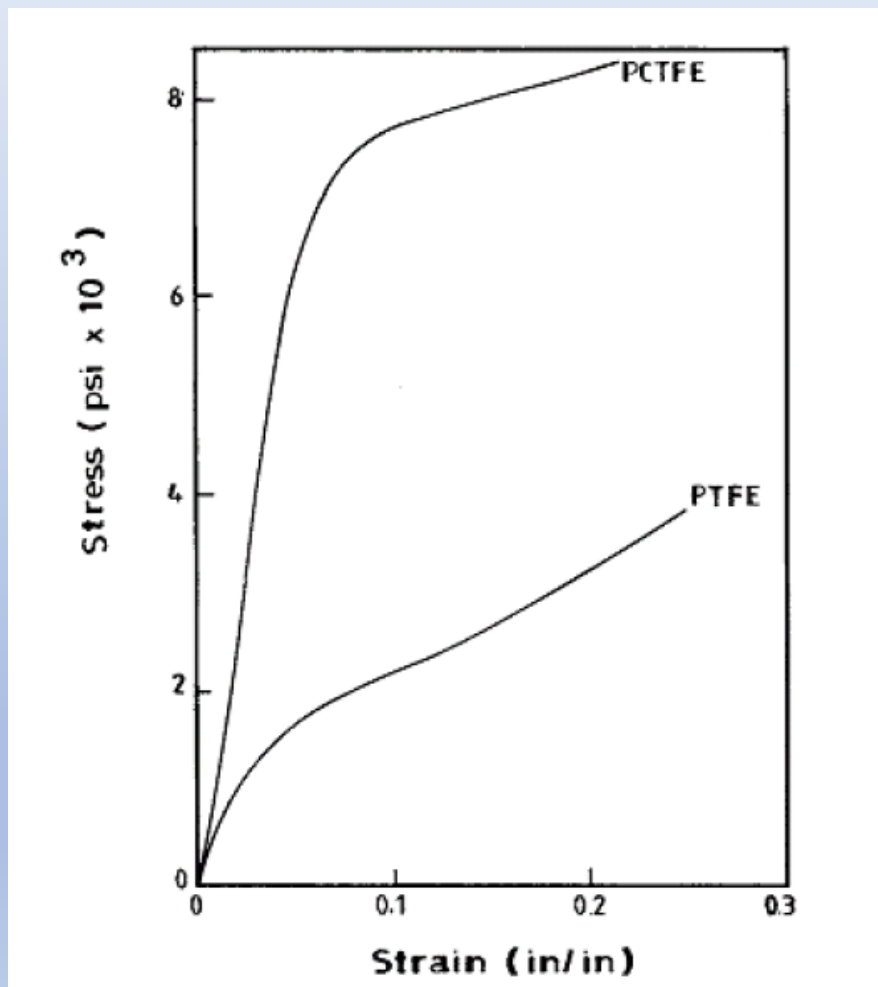


Συμπεριφορά σε θλίψη των άμορφων πολυμερών



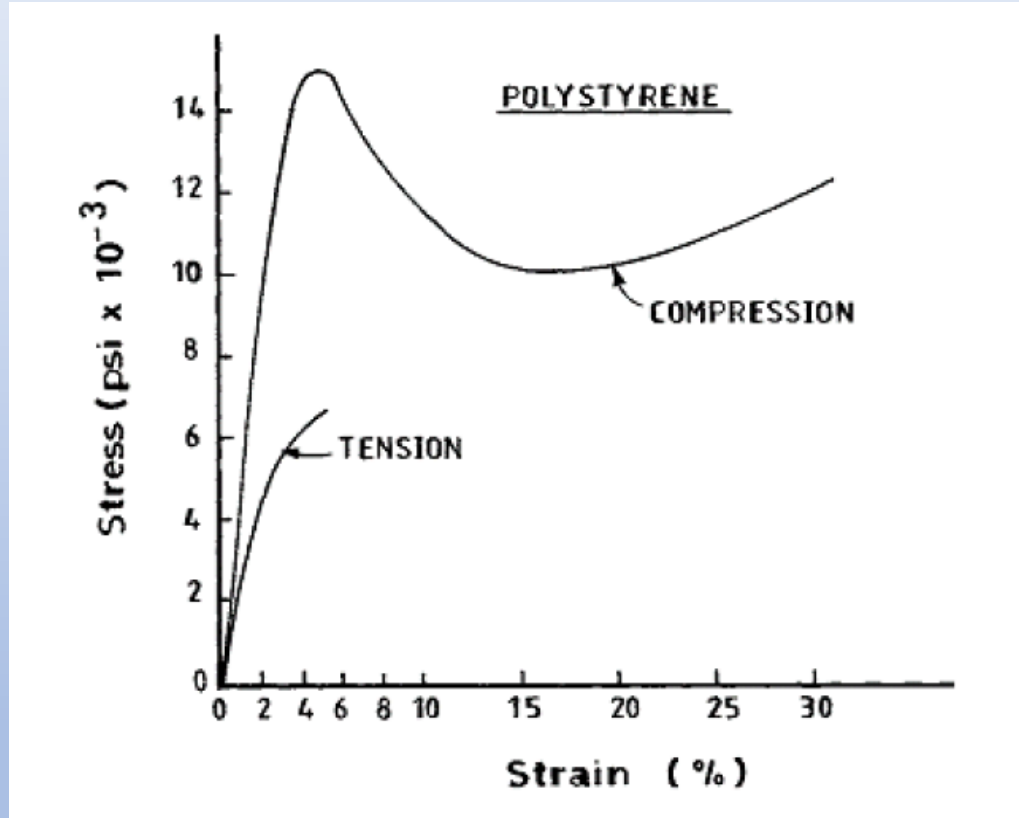
Το κύριο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς σε θλίψη των άμορφων πολυμερών είναι οι μεγάλες παραμορφώσεις που αναπτύσσουν.

Συμπεριφορά σε θλίψη Κρυσταλλικών πολυμερών



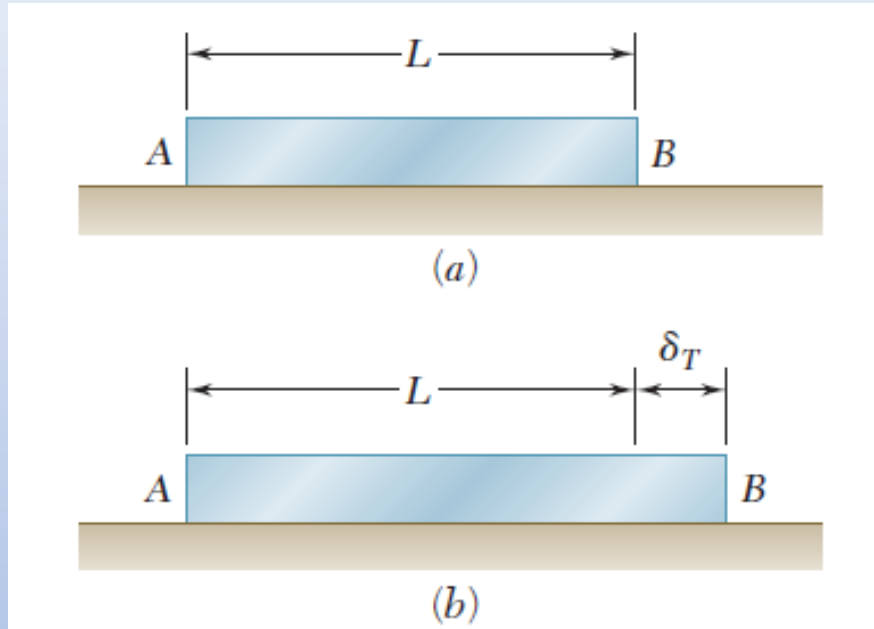
Δεν παρουσιάζουν ένα εμφανές όριο διαρροής.

Συμπεριφορά του PS σε θλίψη και σε εφελκυσμό.



- Σε εφελκυσμό το PS παρουσιάζει ψαθυρή συμπεριφορά, ενώ σε θλίψη, όλκιμη.
- Το μέτρο και η αντοχή του PS σε θλίψη είναι πολύ μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα μεγέθη σε εφελκυσμό.

Θερμικές τάσεις και παραμορφώσεις



Free Thermal Expansion
Ελεύθερη θερμική διαστολή

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Thermal deformation
Θερμική επιμήκυνση

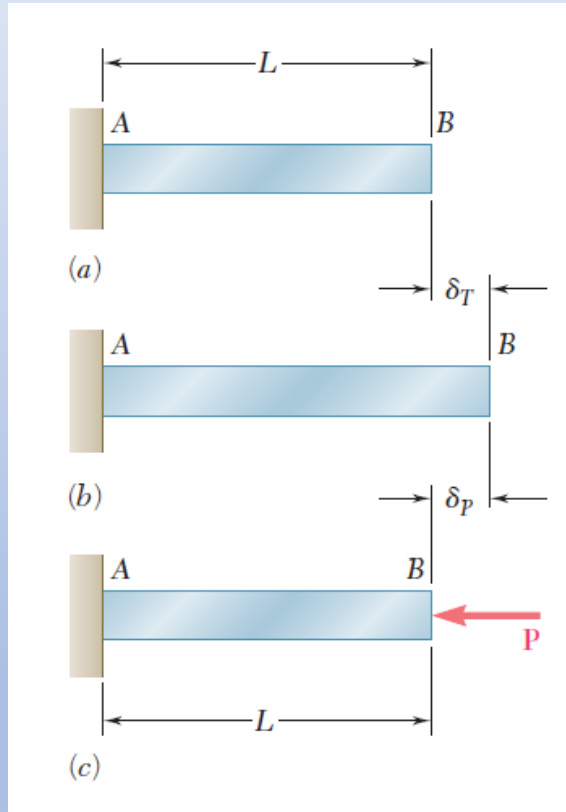
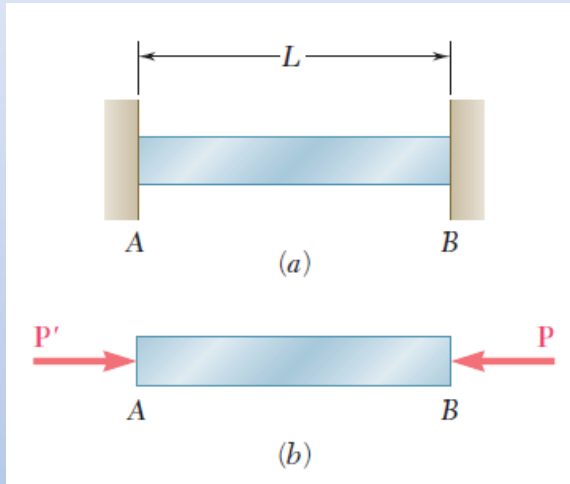
$$\epsilon_T = \delta_T/L$$

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

Thermal strain
Θερμική παραμόρφωση

α = Γραμμικός συντελεστής θερμικής διαστολής
 α = Linear Coefficient of Thermal Expansion (LCTE)

Θερμικές τάσεις και παραμορφώσεις



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

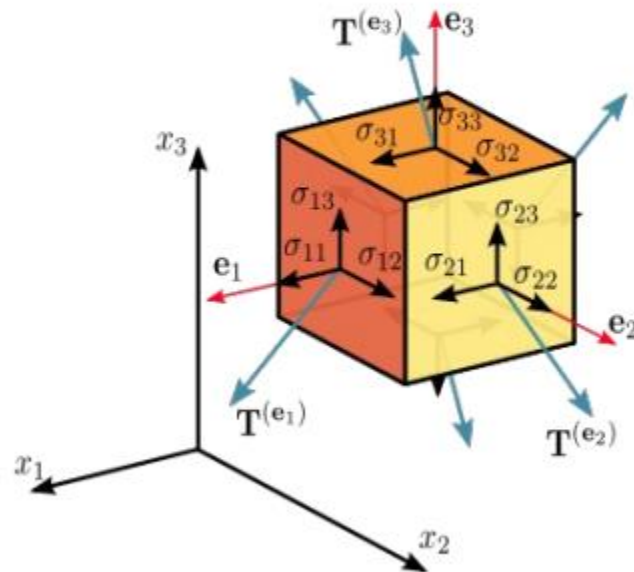
$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

Παράρτημα: Εισαγωγή στους Τανυστές Ο Τανυστής των Τάσεων

Cauchy Stress Tensor



$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \text{ or, } T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j, \text{ where}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}^{(n)}$: Stress vector on the cube surface perpendicular to $\mathbf{n}$

$\mathbf{n}$: A unit-length director vector

“Stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ describes the state of stress ($\mathbf{T}^{(n)}$), at a specific point described by the unit vector $\mathbf{n}$.”

Εισαγωγή

- Σε αυτό το Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μία ανασκόπηση της γραμμικής άλγεβρας και ιδιαίτερα της Θεωρίας των Τανυστών που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των επόμενων Κεφαλαίων.
- Δεδομένου ότι θα περιοριστούμε σε τανυστικούς μετασχηματισμούς που αφορούν σε δεξιόστροφα ορθογώνια Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων, η ανασκόπηση δεν θα επεκταθεί πέρα από αυτούς τους μετασχηματισμούς.
- Πριν ασχοληθούμε με τους τανυστές θα υπενθυμίσουμε μερικά στοιχεία που αφορούν στην Άλγεβρα των Πινάκων και την στροφή συστήματος συντεταγμένων.

Υπενθυμίσεις από τους Πίνακες

ΟΡΙΣΜΟΙ:

- Αν τα στοιχεία ενός πίνακα είναι σε μία στήλη, τότε λέγεται **«πίνακας στήλη»** ή **«πίνακας διάνυσμα»**.
- **Τετραγωνικός Πίνακας** λέγεται ο πίνακας που έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών.
- **Μοναδιαίος Πίνακας [J]** είναι ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου οι διαγώνιοι όροι είναι μονάδες και οι εκτός διαγωνίου όροι είναι μηδέν. Τα στοιχεία του πίνακα [J] πολλές φορές συμβολίζονται με το

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \text{ αν } i=j \\ \delta_{ij} &= 0 \text{ αν } i \neq j \end{aligned} \quad [J] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει την γραμμή και ο δεύτερος την στήλη.
- Το δ_{ij} ονομάζεται **δέλτα του Kronecker** και είναι ένας τελεστής.

Υπενθυμίσεις από τους Πίνακες

- **Ανάστροφος Πίνακας** $[A]^T$ ενός τετραγωνικού πίνακα $[A]$ ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον $[A]$ αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές.

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow [A]^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $[A]$ λέγεται “**συμμετρικός**” αν

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \text{ή} \quad [A] = [A]^T$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $[A]$ λέγεται “**αντισυμμετρικός**” αν

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \quad \text{ή} \quad [A] = -[A]^T$$

- Είναι σαφές ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν.
- Ονομάζουμε **Ίχνος** ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα $[A]$, το άθροισμα των όρων της κύριας διαγωνίου:

$$\text{Ίχνος } [A] = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$$

Παραδείγματα

Ανάστροφος Πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & -9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Συμμετρικός Πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Αντισυμμετρικός Πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Άλγεβρα Πινάκων

Δύο πίνακες $[A](m \times n)$ και $[B](m \times n)$ είναι **ίσοι** αν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών (m) και τον ίδιο αριθμό στηλών (n) και αν τα αντίστοιχα στοιχεία a_{ij} και b_{ij} είναι ίσα:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Το Άθροισμα δύο πινάκων $[A]$ και $[B]$ ορίζεται μόνον αν οι $[A]$ και $[B]$ έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών m και τον ίδιο αριθμό στηλών n . Το άθροισμα $[A]+[B]$ είναι τότε ένας πίνακας $[C]$ με τον ίδιο αριθμό γραμμών m και στηλών n όπως οι πίνακες $[A]$ και $[B]$, ενώ για τα στοιχεία του πίνακα $[C]$ ισχύει:

$$[C] = [A] + [B] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Η Διαφορά δύο πινάκων $[A]$ και $[B]$ ορίζεται μόνον αν οι $[A]$ και $[B]$ έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών m και τον ίδιο αριθμό στηλών n . Η Διαφορά $[A]-[B]$ είναι τότε ένας πίνακας $[C]$ με τον ίδιο αριθμό γραμμών m και στηλών n όπως οι πίνακες $[A]$ και $[B]$, ενώ για τα στοιχεία του πίνακα $[C]$ ισχύει:

$$[C] = [A] - [B] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Μία Χρήσιμη Ιδιότητα των Τετραγωνικών Πινάκων

“Κάθε τετραγωνικός πίνακας $[A]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα $[B]$ και ενός αντισυμμετρικού πίνακα $[C]$ ”.

Πράγματι, αν ορίσουμε:

$$[B] = \frac{([A] + [A]^T)}{2}, \quad \text{και} \quad [C] = \frac{([A] - [A]^T)}{2}$$

Τότε, $[A] = [B] + [C]$

Όπου, $[B] = [B]^T$ και $[C] = -[C]^T$

Πολλαπλασιασμός

Πολλαπλασιασμός ενός πίνακα $[A]$ με μία σταθερά c δίνει έναν πίνακα $[B]$ τα στοιχεία του οποίου είναι:

$$[B] = c.[A] \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = c.\alpha_{ij}$$

Το **γινόμενο δύο πινάκων** $[A]$ ($n \times m$) και $[B]$ ($m \times l$) υπάρχει, αν ο αριθμός m των στηλών του $[A]$ είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του $[B]$. Το γινόμενο $[A].[B]$ είναι τότε ένας πίνακας $[C]$ τα στοιχεία του οποίου υπολογίζονται αν πολλαπλασιαστούν τα στοιχεία της i γραμμής του $[A]$ με τα στοιχεία της j στήλης του $[B]$ και τα γινόμενα προστεθούν. Δηλαδή:

$$[C] = [A].[B] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, n) , \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

Είναι προφανές ότι:

$$[C].[J] = [C] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m c_{ik} \delta_{kj}$$

Ανάστροφος γινομένου πινάκων:

$$([A].[B].[C].[D])^T = [D]^T . [C]^T . [B]^T . [A]^T$$

Παραδείγματα Γινομένων Πινάκων

(2 x 3)

(3 x 2)

(2 x 2)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 1 \\ 42 & 46 \end{bmatrix}.$$

(2 x 2)

(2 x 3)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6(0) + 0(2) & 6(1) + 0(8) & 6(-3) + 0(-9) \\ 4(0) - 7(2) & 4(1) - 7(8) & 4(-3) - 7(-9) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -18 \\ -14 & -52 & 51 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2 x 3)

Αντίστροφος Πίνακα

$$[A]^{-1} = [\mathbf{A}]^T / \det[A]$$

Όπου $[\mathbf{A}]^T$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα του οποίου τα στοιχεία (i,j) είναι τα Αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων a_{ij} του $[A]$ και $\det[A]$ είναι η ορίζουσα του $[A]$.

Ισχύει ότι:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [J]$$

Αν

$$[C] = [A] \cdot [B] \quad \Rightarrow \quad [C]^{-1} = [B]^{-1} \cdot [A]^{-1}$$

Παραδείγματα αντιστροφής πινάκων

1. Έστω πίνακας: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $ad - bc \neq 0$ τότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Έστω πίνακας:

$$[A] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [A]^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -5/4 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες Πινάκων

$$[A^T]^T = [A]$$

$$([A] + [B])^T = [A]^T + [B]^T$$

$$(c \cdot [A])^T = c[A]^T$$

$$([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$$

$$([A]^{-1})^T = ([A]^T)^{-1}$$

Αν οι πίνακες $[A]$ και $[B]$ είναι $m \times n$

Αν ο $[A]$ είναι $m \times p$ και ο $[B]$ $p \times n$

Αν ο $[A]$ είναι αντιστρέψιμος και $n \times n$

Παράγωγος Πίνακα

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial [A]}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial \alpha} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial \alpha} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial \alpha} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

Ορθογώνιοι Πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $[Q]$ ($n \times n$) είναι ορθογώνιος, αν

$$[Q] \cdot [Q]^T = [Q]^T \cdot [Q] = [J]$$

$$\text{δηλαδή, αν } [Q]^T = [Q]^{-1}$$

Παράδειγμα:

Ο πίνακας $[Q] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ Είναι **ορθογώνιος** γιατί

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv [J] \end{aligned}$$

Γραφή με δείκτες – Σύμβαση Άθροισης Einstein

Αν ένας δίκτης εμφανίζεται δύο φορές στον ίδιο όρο, αυτό σημαίνει άθροισμα των όρων που προκύπτουν όταν ο επαναλαμβανόμενος δείκτης που λέγεται «άεργος δείκτης» πάρει διαδοχικά τις τιμές 1,2,3, ...,m.

Έτσι, το γινόμενο δύο πινάκων γράφεται:

$$[C]=[A].[B] \quad \Rightarrow \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} b_{kj} \quad \text{ή} \quad c_{ij}=\alpha_{ik} b_{kj}$$

Ο δείκτης k είναι ο **άεργος δείκτης** ως προς τον οποίο γίνεται η άθροιση, ενώ οι δείκτες i , j είναι οι **ελεύθεροι δείκτες** που παίρνουν μία συγκεκριμένη τιμή. Το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο αν τον δείκτη k τον αντικαθιστούσαμε με το λ ή το μ ή με οποιοδήποτε άλλο γράμμα του αλφαβήτου.

Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης μπορεί να υπάρχει και στο ίδιο σύμβολο, οπότε έχουμε:

$$\alpha_{ii} \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \dots + \alpha_{mm} \equiv \alpha_{jj} \equiv \alpha_{kk}$$

Γραφή με δείκτες – Σύμβαση Άθροισης Einstein

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

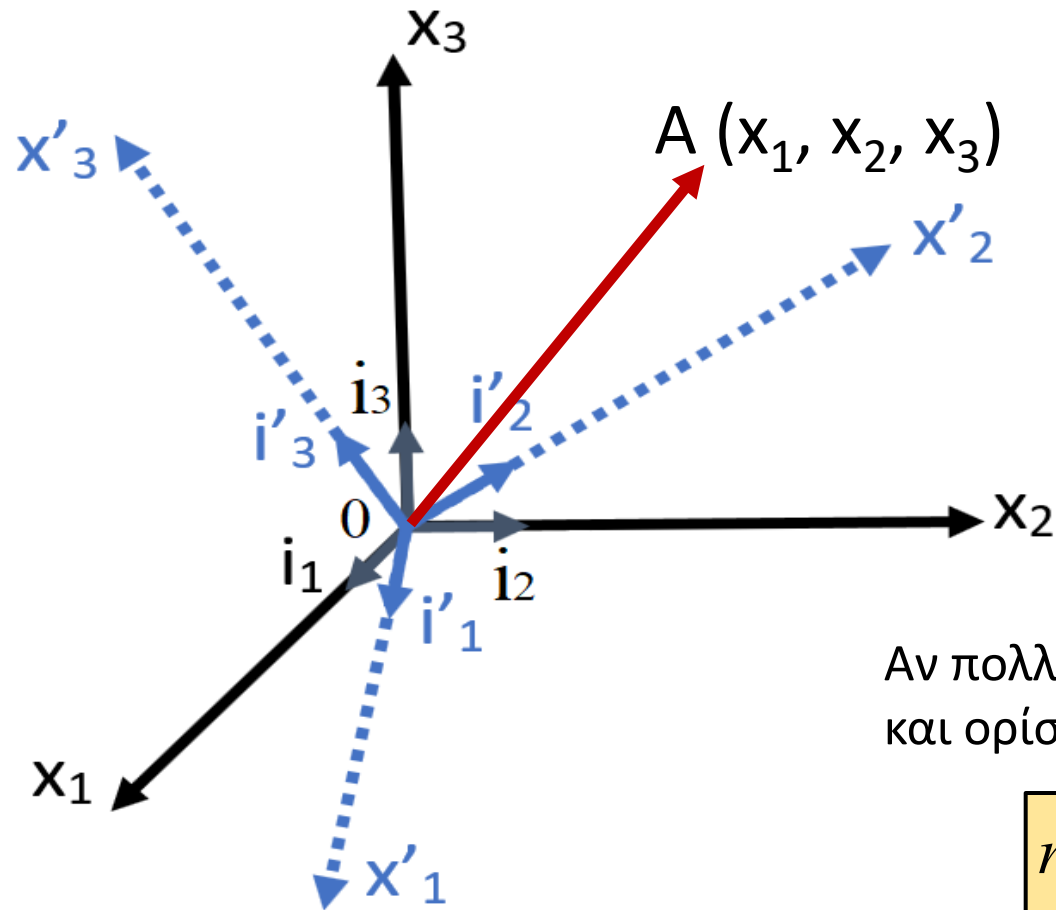
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv a_i b_i$$

Ομοίως,

$$[C] \cdot [J] = [C] \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m c_{ik} \delta_{kj} \quad \text{ή} \quad \boxed{c_{ij} = c_{ik} \delta_{kj}}$$

Η σχέση αυτή λέγεται και «**πράξη αντικατάστασης**», επειδή το γινόμενο επί το δέλτα προκαλεί αντικατάσταση του άεργου δείκτη k με τον ελεύθερο δείκτη j του δέλτα.

Στροφή Συστήματος Αναφοράς



$Ox_1x_2x_3 =$ Αρχικό Σύστημα Αναφοράς

$Ox'_1x'_2x'_3 =$ Τελικό Σύστημα Αναφοράς

$$O\vec{A} = (x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$$

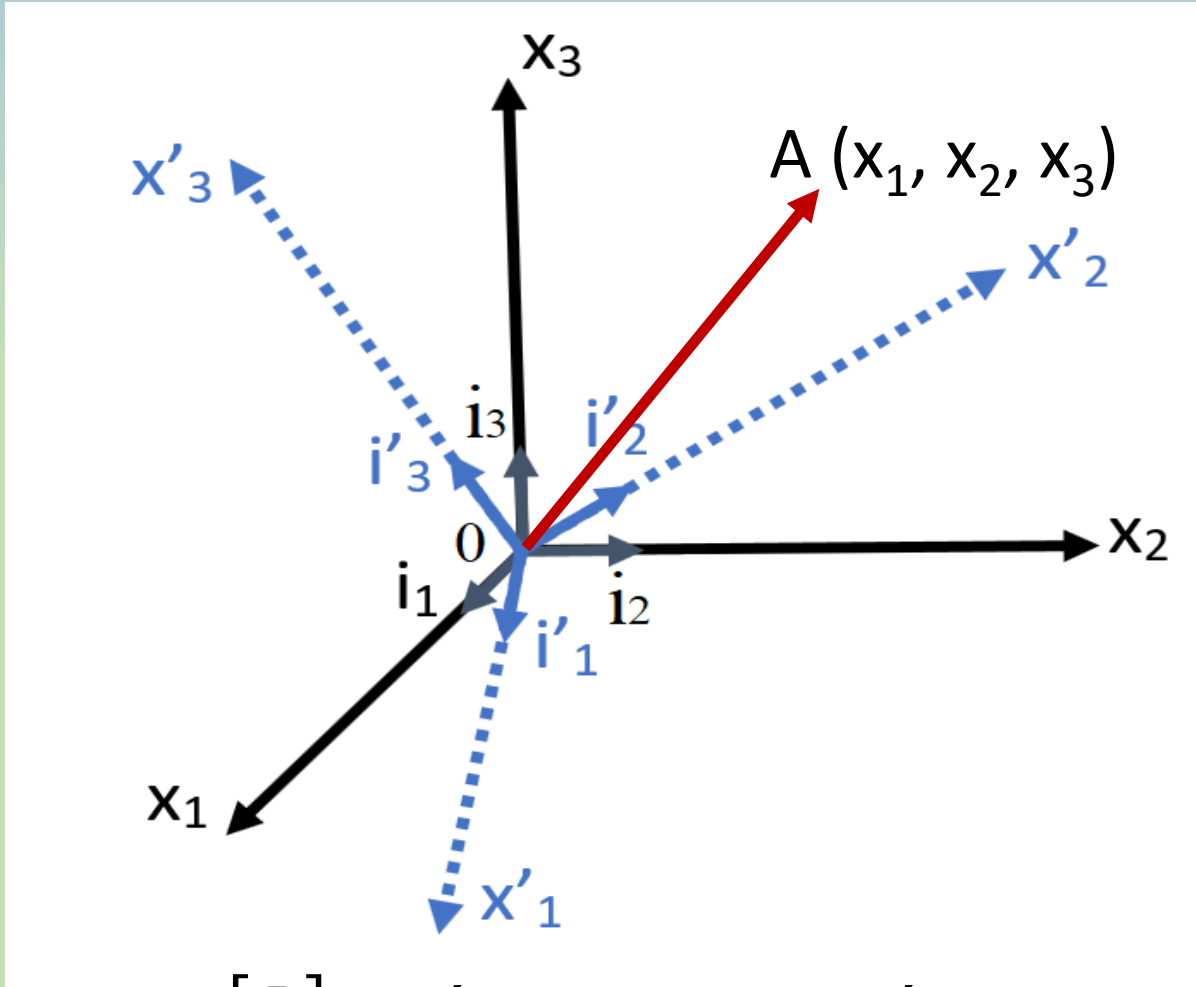
$$O\vec{A} = x_1\vec{i}_1 + x_2\vec{i}_2 + x_3\vec{i}_3 = x'_1\vec{i}'_1 + x'_2\vec{i}'_2 + x'_3\vec{i}'_3$$

Αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά και διαδοχικά με $\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{i}'_3$ και ορίσουμε :

$$r_{jm} \equiv \vec{i}'_j \cdot \vec{i}_m = \cos(x'_j, x_m)$$

τότε

Στροφή Συστήματος Αναφοράς



$[R] = \text{πίνακας στροφής}$

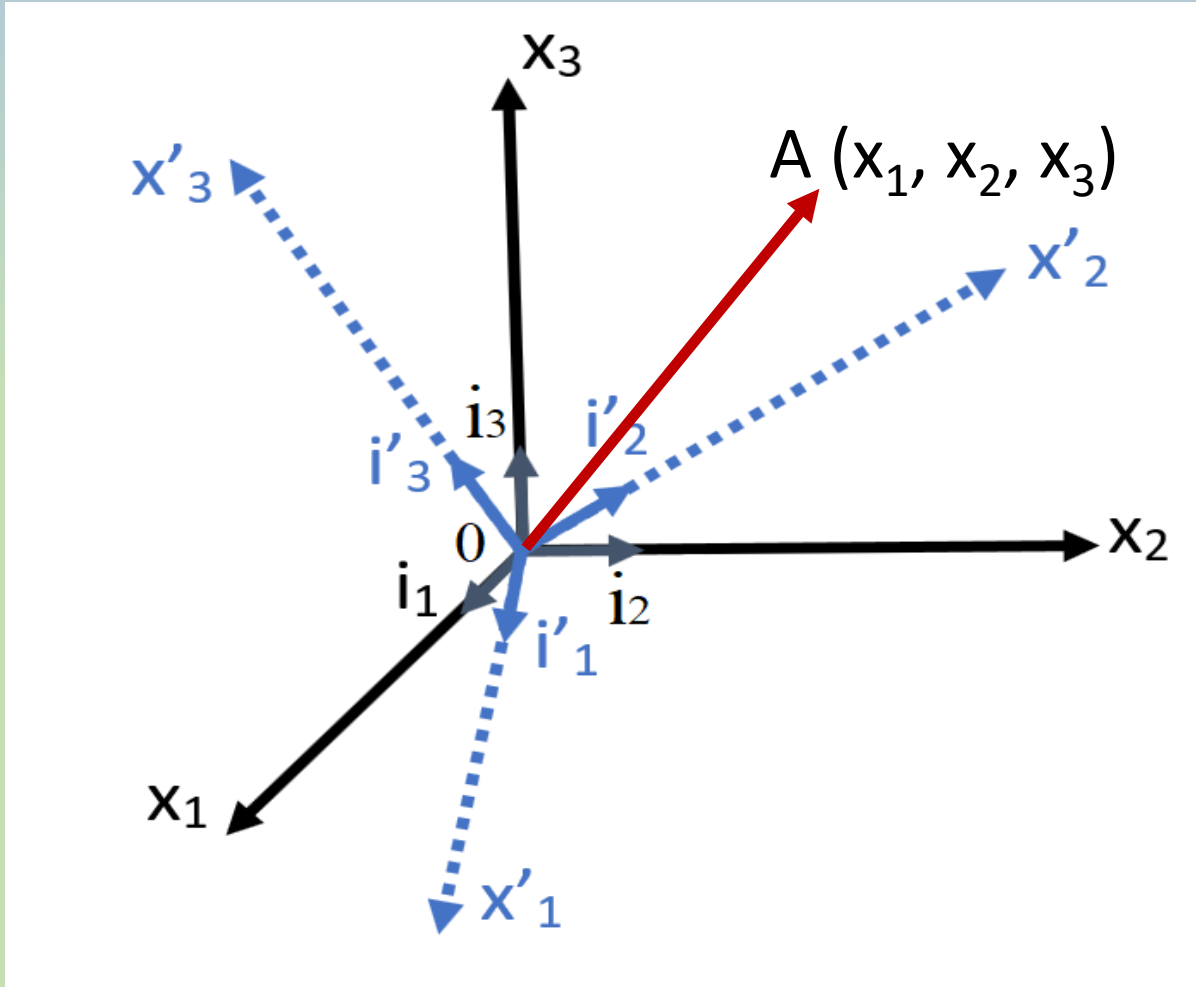
$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \\ x'_2 &= r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \\ x'_3 &= r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \end{aligned} \right\}$$

ή $\boxed{x'_i = r_{ij}x_j} \quad (i=1,2,3)$

ή $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

ή $\boxed{[X'] = [R][X]}$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς



$0x_1x_2x_3 =$ Αρχικό Σύστημα Αναφοράς

$0x'_1x'_2x'_3 =$ Τελικό Σύστημα Αναφοράς

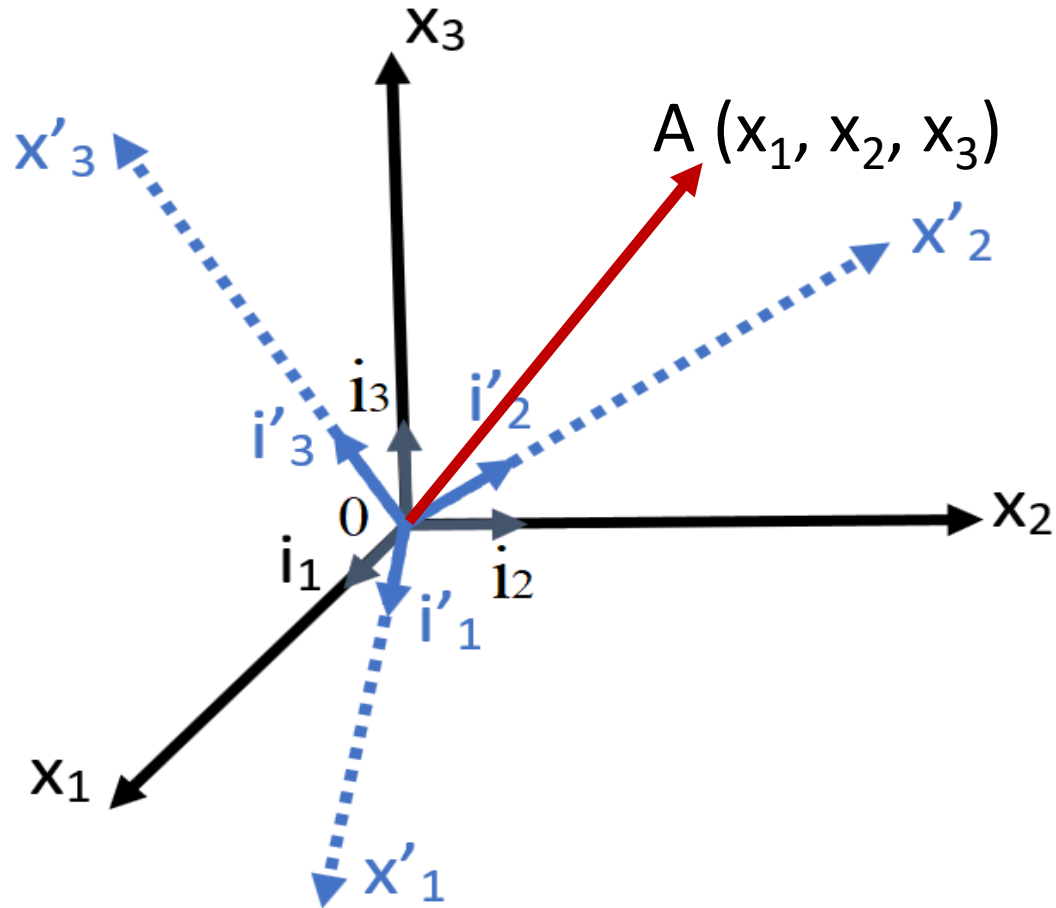
$$O\vec{A} = (x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$O\vec{A} = x_1\vec{i}_1 + x_2\vec{i}_2 + x_3\vec{i}_3 = x'_1\vec{i}'_1 + x'_2\vec{i}'_2 + x'_3\vec{i}'_3$$

Αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά και διαδοχικά με $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ και ορίσουμε :

$$r_{jm} \equiv \vec{i}'_j \cdot \vec{i}_m = \cos(x'_j, x_m) \quad \text{τότε}$$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{11}x'_1 + r_{21}x'_2 + r_{31}x'_3 \\ x_2 &= r_{12}x'_1 + r_{22}x'_2 + r_{32}x'_3 \\ x_3 &= r_{13}x'_1 + r_{23}x'_2 + r_{33}x'_3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_j = r_{kj}x'_k$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$[X] = [R]^T [X']$$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Από } \boxed{x'_i = r_{ij} x_j} & \text{και} & \boxed{x_j = r_{kj} x'_k} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \text{Από } \boxed{x'_k = r_{kj} x_j} & \text{και} & \boxed{x_i = r_{ki} x'_k}
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{lcl}
 \cancel{x'_i} = r_{ij} r_{kj} x'_k & \Rightarrow & \delta_{ik} x'_k - r_{ij} r_{kj} x'_k = 0 \\
 \cancel{r_{ij} r_{kj}} = \delta_{ik} & \Rightarrow & \boxed{r_{ik} r_{jk} = \delta_{ij}} \\
 \cancel{x_i} = r_{ki} r_{kj} x_j & \Rightarrow & \delta_{ij} x_j - r_{ki} r_{kj} x_j = 0 \\
 & \Rightarrow & \boxed{r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}}
 \end{array}$$

Επομένως:

$$\boxed{r_{ik} r_{jk} = r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}}$$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς

Από

$$r_{ik}r_{jk} = r_{ki}r_{kj} = \delta_{ij}$$

προκύπτουν οι σχέσεις:

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1$$

$$r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1$$

$$r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} = 0$$

$$r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0$$

$$r_{31}r_{11} + r_{32}r_{12} + r_{33}r_{13} = 0$$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς

Από τις σχέσεις: $[X'] = [R][X]$ και $[X] = [R]^T [X'] \implies$

$$[X'] = [R][R]^T [X'] \quad \text{και} \quad [X] = [R]^T [R][X]$$

Επομένως: $[R][R]^T = [R]^T [R] = [J]$

$$r_{ik} r_{jk} = r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}$$

Στροφή Συστήματος Αναφοράς

Από την σχέση: $[R]^T [R] = [J] \implies [R]^T [R] \cdot [R]^{-1} = [J] \cdot [R]^{-1}$

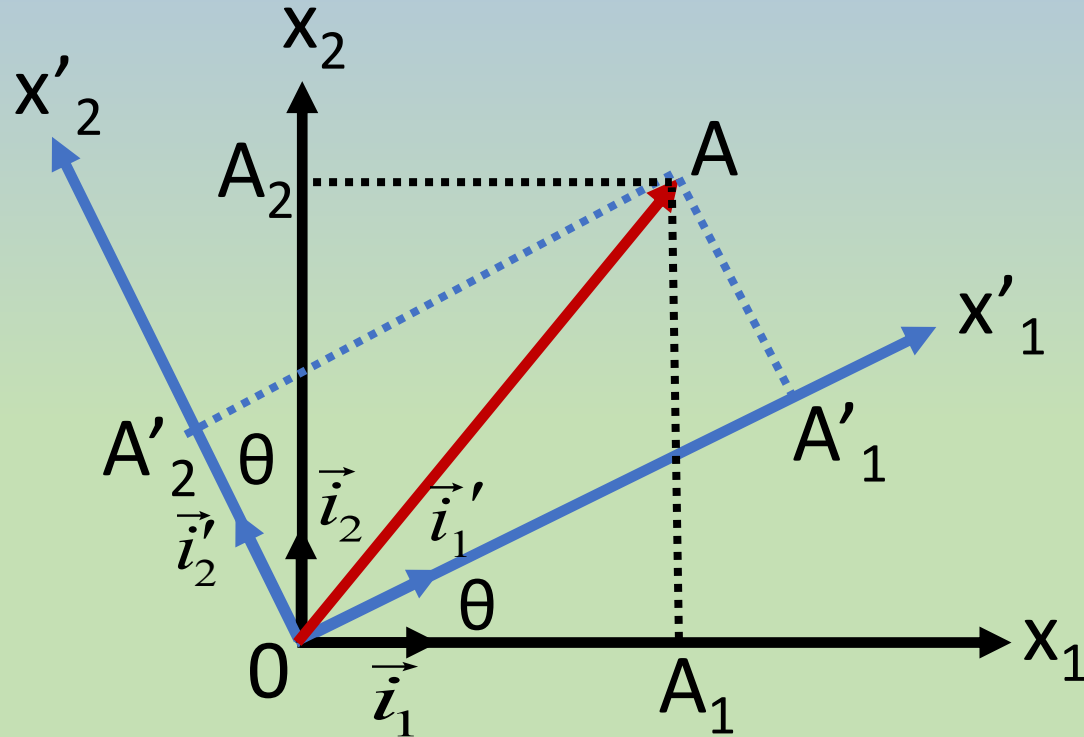
$$\implies [R]^T = [R]^{-1}$$

Αν πάρουμε την
ορίζουσα της σχέσης:

$$[R][R]^T = [R]^T [R] = [J] \implies$$

$$|R| = 1$$

Εφαρμογή στον διδιάστατο χώρο



$$OA_1 = x_1 \quad OA_2 = x_2$$

$$OA'_1 = x'_1 \quad OA'_2 = x'_2$$

$$r_{11} = \cos \theta$$

$$r_{12} = \sin \theta$$

$$r_{21} = -\sin \theta$$

$$r_{22} = \cos \theta$$

$$[X'] = [R][X]$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Τανυστές

Τανυστής Μηδενικής Τάξης:

«**Τανυστής Μηδενικής τάξης** είναι το βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή μία ποσότητα που παραμένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς του συστήματος αναφοράς».

- Μερικά παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών είναι η *θερμοκρασία*, η *πυκνότητα*, το *έργο* κλπ.
- Να σημειωθεί ότι τα βαθμωτά μεγέθη προσδιορίζονται από έναν αριθμό που παριστάνει το μέγεθος ή την τιμή του και δεν χρειάζεται καμία σύνδεση με κάποιο σύστημα αναφοράς.

Τανυστές

Τανυστής Πρώτης Τάξεως:

Τανυστής πρώτης τάξεως είναι ένα μέγεθος το οποίο κατά την στροφή του συστήματος αναφοράς υπακούει στον νόμο:

$$[T'] = [R] \cdot [T] \quad \text{ή} \quad t'_i = r_{ik} t_k$$

$$\text{Όπου:} \quad [T] = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Έτσι, ο τανυστής πρώτης τάξεως είναι το **διάνυσμα**. Για παράδειγμα, η **δύναμη**, η **ταχύτητα**, η **ορμή**, η **επιτάχυνση** και κάθε διανυσματικό μέγεθος είναι τανυστής πρώτης τάξεως.

Τανυστές

Τανυστής Δευτέρας Τάξεως:

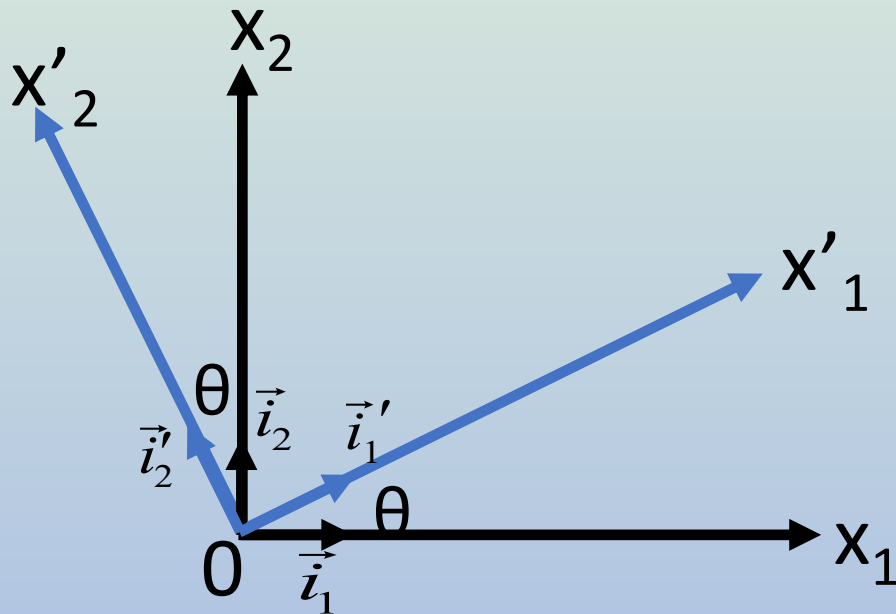
Τανυστής δευτέρας τάξεως είναι ένα μέγεθος το οποίο κατά την στροφή του συστήματος αναφοράς υπακούει στον νόμο:

$$[T'] = [R] \cdot [T] \cdot [R]^T \quad \text{ή} \quad t'_{ij} = r_{ik} r_{jm} t_{km}$$

$$\begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Τανυστές 2ας τάξεως είναι η **τάση**, η **παραμόρφωση**, η **ροπή αδράνειας**, ο **συντελεστής θερμικής διαστολής**, η **αγωγιμότητα** και άλλα.

Στροφή τανυστή 2^{ης} τάξης στον χώρο E_2



$$[T'] = [R] \cdot [T] \cdot [R]^T \quad \text{ή} \quad t'_{ij} = r_{ik} r_{jm} t_{km}$$

Νόμος Μετασχηματισμού

Πίνακας
Στροφής

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

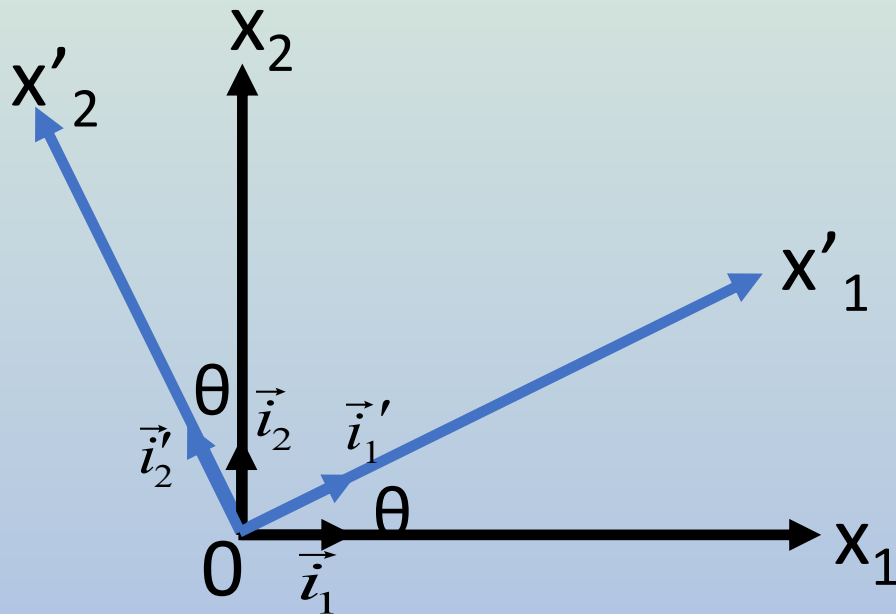
Ο τανυστής στο
αρχικό Σύστημα
Αναφοράς

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

Ο τανυστής στο τελικό
Σύστημα Αναφοράς

$$[T'] = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix}$$

Στροφή τανυστή 2^{ης} τάξης στον χώρο E_2



$$\begin{aligned}t'_{11} &= t_{11} \cos^2 \theta + (t_{12} + t_{21}) \sin \theta \cos \theta + t_{22} \sin^2 \theta \\t'_{12} &= (t_{22} - t_{11}) \sin \theta \cos \theta + t_{12} \cos^2 \theta - t_{21} \sin^2 \theta \\t'_{21} &= (t_{22} - t_{11}) \sin \theta \cos \theta - t_{12} \sin^2 \theta + t_{21} \cos^2 \theta \\t'_{22} &= t_{11} \sin^2 \theta - (t_{12} + t_{21}) \sin \theta \cos \theta + t_{22} \cos^2 \theta\end{aligned}$$

Ιδιαίτερα **στην περίπτωση συμμετρικού τανυστή** όπου $t_{ij} = t_{ji}$ οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν

$$\begin{aligned}t'_{11} &= \frac{t_{11} + t_{22}}{2} + \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta + t_{12} \sin 2\theta \\t'_{12} &= t'_{21} = -\frac{t_{11} - t_{22}}{2} \sin 2\theta + t_{12} \cos 2\theta \\t'_{22} &= \frac{t_{11} + t_{22}}{2} - \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta - t_{12} \sin 2\theta\end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός Τανυστών

Αν αναφερθούμε στον τανυστή πρώτης τάξης (το διάνυσμα), γνωρίζουμε δύο τρόπους πολλαπλασιασμού. Το εσωτερικό $\vec{A} \bullet \vec{B}$ και το εξωτερικό γινόμενο $\vec{A} \times \vec{B}$. Εδώ, θα ορίσουμε και έναν άλλο τρόπο, το τανυστικό γινόμενο $\vec{A} \otimes \vec{B}$. Το γινόμενο αυτό βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε αλγεβρικά τα διανύσματα.

$$\vec{A} = \alpha_1 \vec{i}_1 + \alpha_2 \vec{i}_2 + \alpha_3 \vec{i}_3$$

$$\vec{B} = b_1 \vec{i}_1 + b_2 \vec{i}_2 + b_3 \vec{i}_3$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \vec{C} = \vec{A} \otimes \vec{B} = & \alpha_1 b_1 (\vec{i}_1 \otimes \vec{i}_1) + \alpha_1 b_2 (\vec{i}_1 \otimes \vec{i}_2) + \alpha_1 b_3 (\vec{i}_1 \otimes \vec{i}_3) \\ & + \alpha_2 b_1 (\vec{i}_2 \otimes \vec{i}_1) + \alpha_2 b_2 (\vec{i}_2 \otimes \vec{i}_2) + \alpha_2 b_3 (\vec{i}_2 \otimes \vec{i}_3) \\ & + \alpha_3 b_1 (\vec{i}_3 \otimes \vec{i}_1) + \alpha_3 b_2 (\vec{i}_3 \otimes \vec{i}_2) + \alpha_3 b_3 (\vec{i}_3 \otimes \vec{i}_3) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός Τανυστών

Οι ποσότητες $(\vec{i}_j \otimes \vec{i}_k)$ ($i, j = 1, 2, 3$) παριστάνουν τη βάση του διανυσματικού χώρου $E_3 \times E_3$, όπως $\vec{i}_j$ ($j = 1, 2, 3$) είναι η βάση του διανυσματικού χώρου E_3 στον οποίο ορίζονται οι τανυστές πρώτης τάξης (διανύσματα). Οι συνιστώσες του $\vec{C}$, μπορούν να γραφούν, κατ'αναλογία με την γραφή των διανυσμάτων, με την μορφή πίνακα:

$$[C] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Το γινόμενο αυτό βρίσκεται από τα μητρώα - διανύσματα

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad [B] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{Με τον ακόλουθο τρόπο:} \quad [C] = [A] \cdot [B]^T$$

ή

$$c_{ij} = \alpha_i b_j$$

Μία Ενδιαφέρουσα Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού των Τανυστών

Θα αποδείξουμε ότι: Το γινόμενο δύο τανυστών πρώτης τάξης είναι τανυστής δευτέρας τάξεως.

Πράγματι,

$$\left. \begin{aligned} [C] &= [A].[B]^T \\ [A'] &= [R].[A] \\ [B'] &= [R].[B] \Rightarrow [B']^T = [B]^T.[R]^T \\ [C'] &= [A'].[B']^T \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} [C'] &= [R].[A].[B]^T.[R]^T \Rightarrow \\ [C'] &= [R].[C].[R]^T \end{aligned}$$

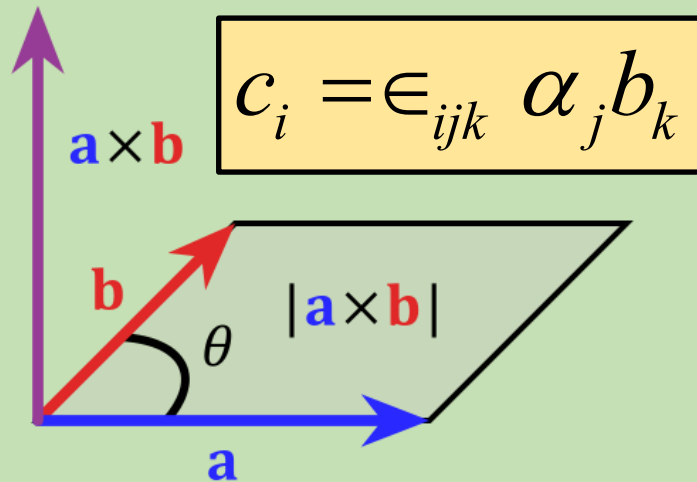
Άρα, αφού ο τανυστής C, ικανοποιεί τον μετασχηματισμό των τανυστών δευτέρας τάξεως, είναι τανυστής δευτέρας τάξεως.

Γραφή του εξωτερικού γινομένου με δείκτες

Εισάγουμε το δεύτερο σύμβολο του Kronecker ή μεταθετικό σύμβολο:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν τα } i, j, k \text{ είναι κυκλική μετάθεση των } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{αν τα } i, j, k \text{ είναι κυκλική μετάθεση των } 3, 2, 1 \\ 0 & \text{αν δύο ή και τρία από τα } i, j, k \text{ συμπίπτουν} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$ κάθετο στα A και B. Σύμφωνα με την σύμβαση, θα ισχύει:

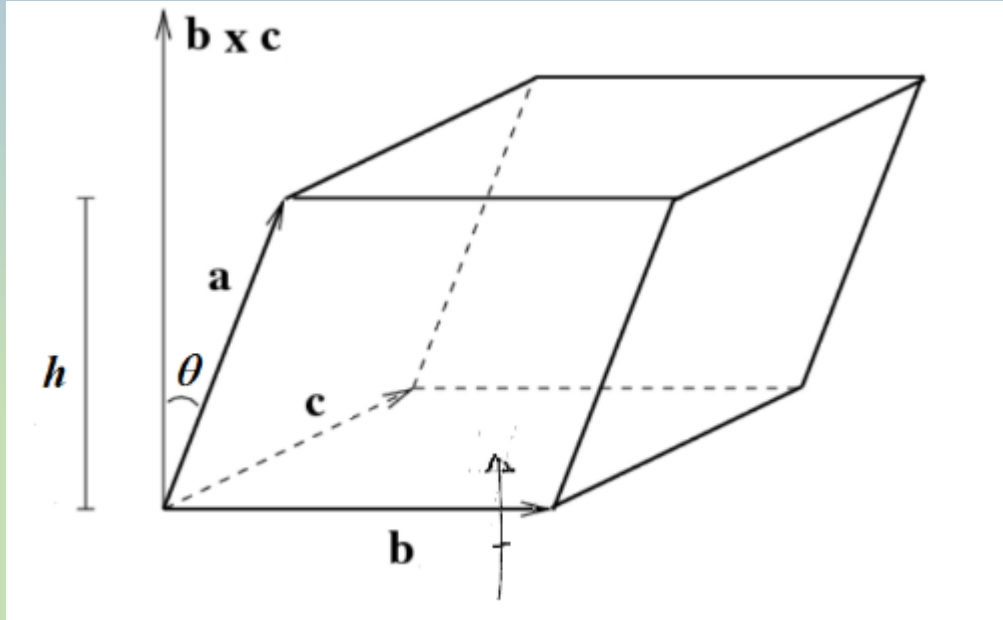


$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$[C] = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2 \\ \alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3 \\ \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Γραφή του Μικτού Γινομένου με δείκτες



$$V = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \text{εμβαδόν βάσης}$$

$$|\vec{a}| \cos \theta = \text{ύψος } h$$

$$\text{Όγκος } V = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos \theta$$

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$V = \epsilon_{ijk} \alpha_i b_j c_k$$

Διαγωνοποίηση Τριδιάστατου Συμμετρικού Τανυστή 2^{ης} Τάξης

Όπως είδαμε, με την βοήθεια των σχέσεων

$$[T'] = [R] \cdot [T] \cdot [R]^T \quad \text{ή} \quad t'_{ij} = r_{ik} r_{jm} t_{km}$$

μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες ενός τανυστή 2ας τάξεως σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιο σύστημα αναφοράς, το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί, και στο οποίο οι συμμετρικοί τανυστές έχουν συνιστώσες μόνο κατά την κύρια διαγώνιό τους, ενώ όλες οι άλλες είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$[T'] = \begin{pmatrix} t_I & 0 & 0 \\ 0 & t_{II} & 0 \\ 0 & 0 & t_{III} \end{pmatrix}$$

Οι συνιστώσες t_I, t_{II}, t_{III} αποτελούν τις **κύριες τιμές** του τανυστή, ενώ το σύστημα αναφοράς στο οποίο αυτές εμφανίζονται, ονομάζεται **κύριο σύστημα αναφοράς**.

Διαγωνοποίηση Τριδιάστατου Συμμετρικού Τανυστή 2^{ης} Τάξης

Η διαδικασία εύρεσης των κυρίων τιμών και του κύριου συστήματος, λέγεται «**διαγωνοποίηση**» του συμμετρικού τανυστή.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι:

$$[T'] = [R].[T].[R]^T \quad \text{ή} \quad t'_{ij} = r_{ik} r_{jm} t_{km}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση από αριστερά με $[R]^T$ οπότε προκύπτει η σχέση:

$$[R]^T [T'] = [T].[R]^T$$

Το γινόμενο $[T].[R]^T$ δημιουργεί έναν νέο τετραγωνικό πίνακα. Είναι σαφές ότι η πρώτη στήλη του πίνακα αυτού είναι το γινόμενο του $[T]$ επί την πρώτη στήλη του $[R]^T$, ενώ η πρώτη στήλη του πρώτου μέλους δίνεται από το $[R]^T$ επί την πρώτη στήλη του $[T']$. Δηλαδή,

Διαγωνοποίηση Τριδιάστατου Συμμετρικού Τανυστή 2^{ης} Τάξης

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t_I \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad [T] \cdot [X_I] = t_I [X_I]$$

Με την ίδια λογική, η δεύτερη στήλη είναι:

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} = t_{II} \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad [T] \cdot [X_{II}] = t_{II} [X_{II}]$$

και η τρίτη στήλη είναι:

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} = t_{III} \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad [T] \cdot [X_{III}] = t_{III} [X_{III}]$$

Διαγωνοποίηση Τριδιάστατου Συμμετρικού Τανυστή 2^{ης} Τάξης

Άρα και οι τρεις σχέσεις είναι της μορφής

$$[T] \cdot [X] = t \cdot [X] \quad \text{ή} \quad ([T] - t[J]) \cdot [X] = 0$$

Για να έχει λύση το ομογενές γραμμικό σύστημα, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδέν. Άρα τα t_I, t_{II}, t_{III} προσδιορίζονται ως οι τρεις ρίζες της **χαρακτηριστικής εξίσωσης**

$$|[T] - t[J]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} t_{11} - t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - t \end{vmatrix} = 0$$

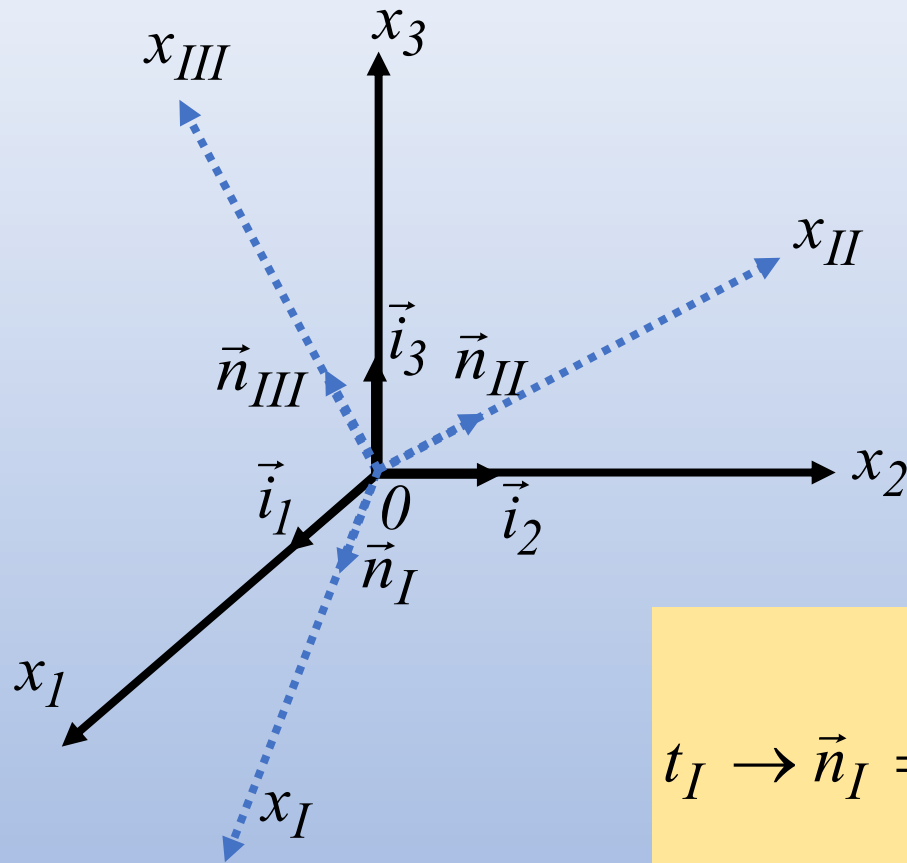
Αυτή είναι μία εξίσωση τρίτου βαθμού της οποίας οι ρίζες είναι οι **κύριες τιμές ή ιδιοτιμές** t_I, t_{II}, t_{III} του τανυστή $[T]$.

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την κάθε μία από τις ιδιοτιμές t_I, t_{II}, t_{III} μέσα στην εξίσωση

$$([T] - t[J]) \cdot [X] = 0$$

και βρίσκουμε το αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** $[X]$. Το κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα στον κύριο άξονα του κυρίου συστήματος αναφοράς. Τα ιδιοδιανύσματα τα συμβολίζουμε με $\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$

Κύριο Σύστημα Αξόνων



$0x_1x_2x_3$ = Αρχικό Σύστημα Αναφοράς

$0x_Ix_{II}x_{III}$ = **Κύριο Σύστημα** Αναφοράς

$0x_1, 0x_{II}, 0x_{III}$ = **Κύριοι Άξονες**

$\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$ = **Ιδιοδιανύσματα** ή Μοναδιαία διανύσματα πάνω στους κύριους άξονες που καθορίζουν τις **κύριες διευθύνσεις**.

t_I, t_{II}, t_{III} = **Ιδιοτιμές ή Κύριες τιμές** που βρίσκονται πάνω στους αντίστοιχους κύριους άξονες (π.χ. κύριες τάσεις ή κύριες παραμορφώσεις)

$$t_I \rightarrow \vec{n}_I = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}, \quad t_{II} \rightarrow \vec{n}_{II} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \quad t_{III} \rightarrow \vec{n}_{III} = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

Τα επίπεδα τα κάθετα στους κύριους άξονες ονομάζονται **κύρια επίπεδα**.

Το Αναλλοίωτο της Χαρακτηριστικής Εξίσωσης

Ισχύει η πρόταση: “**Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς στο οποίο εξετάζεται ο τανυστής. Δηλαδή, οι ιδιοτιμές του τανυστή είναι ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς**”.

Απόδειξη: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\left| [T] - t[J] \right| = 0$

Σε ένα νέο σύστημα αναφοράς, θα ισχύει: $\left| [T'] - t[J'] \right| = 0$

Δεδομένου ότι: $[T'] = [R][T][R]^T$ και $[J'] = [R][J][R]^T$

Θα έχουμε: $\left| [T'] - t[J'] \right| = \left| R([T] - t[J])R^T \right| = |[R]| \cdot |[T] - t[J]| \cdot |[R]^T| = |[T] - t[J]|$

Που αποδεικνύει την πρόταση.

Οι Αναλλοίωτες του Τανυστή 2ας Τάξεως

Αν αναπτύξουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $\| [T] - t[J] \| = 0$ του τανυστή 2ας τάξεως, τότε:

$$t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 = 0$$

Όπου:

$$I_1 = \text{ίχνος του } [T] = t_{ii} \equiv t_{11} + t_{22} + t_{33}$$

$$I_2 = \text{άθροισμα των ελασσόνων οριζουσών των διαγωνίων στοιχείων του } [T]$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (t_{ij} t_{ji} - t_{ii}^2)$$

$$I_3 = \text{ορίζουσα του } [T] = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \{ t_{ii}^3 + 2t_{ij} t_{jk} t_{ki} - 3t_{ii} (t_{jk} t_{kj}) \}$$

Τα τρία αυτά μεγέθη ονομάζονται, **πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτος** του τανυστή γιατί παραμένουν αναλλοίωτα κατά τους μετασχηματισμούς.

Οι Αναλλοίωτες του Τανυστή 2ας Τάξεως

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα I_1, I_2, I_3 είναι αναλλοίωτα μεγέθη, τότε και τα J_1, J_2, J_3 είναι **αναλλοίωτα μεγέθη** και αντιστρόφως.

Όπου:

$$J_1 = t_{ii}$$

$$J_2 = t_{ij} t_{ji}$$

$$J_3 = t_{ij} t_{jk} t_{ki}$$

Στο Κύριο Σύστημα όπου τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν, οι τρεις αναλλοίωτες γράφονται:

$$I_I = t_I + t_{II} + t_{III}$$

$$I_{II} = t_I t_{II} + t_{II} t_{III} + t_{III} t_I$$

$$I_{III} = t_I t_{II} t_{III}$$

Απόδειξη του Αναλλοίωτου I_1

Από τον νόμο
μετασχηματισμού των
τανυστών δευτέρας τάξεως

$$t'_{ij} = r_{ik} r_{jm} t_{km} \quad \Rightarrow \quad t'_{ii} = r_{ik} r_{im} t_{km}$$

αλλά

$$r_{ik} r_{im} = \delta_{km} \quad \Rightarrow \quad t'_{ii} = \delta_{km} t_{km} = t_{mm}$$

Μία σημαντική πρόταση είναι η εξής:

Οι ιδιοτιμές t_I, t_{II}, t_{III} είναι στάσιμες τιμές των διαγωνίων όρων του τανυστή [T].

Η πρόταση αυτή σημαίνει ότι αν $t_I \geq t_{II} \geq t_{III}$ τότε οι τιμές t_I και t_{III} αποτελούν το μέγιστο και το ελάχιστο αντίστοιχα των τιμών που μπορούν οι διαγώνιοι όροι ενός τανυστή [T] σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.

Διαγωνοποίηση Συμμετρικού Επίπεδου Τανυστή

Αν $[T] = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ τότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\begin{vmatrix} t_{11} - t & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} - t \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow t^2 - (t_{11} + t_{22})t + (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) = 0 \Rightarrow$$

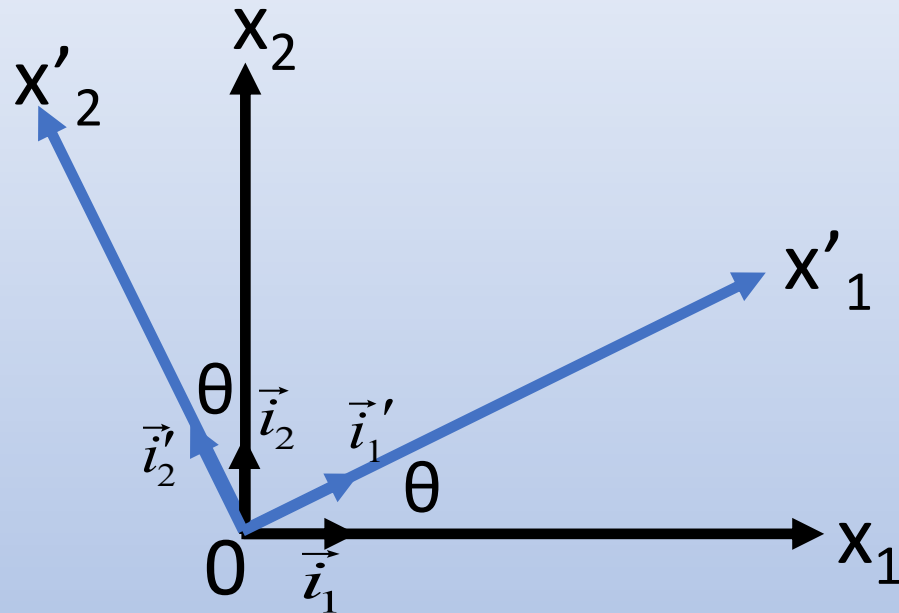
Οι Κύριες τιμές είναι:

$$t_{I,II} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t_{11} - t_{22}}{2}\right)^2 + t_{12}^2}$$

Όπου η τιμή t_I αντιστοιχεί στο πρόσημο (+) και η τιμή t_{II} στο πρόσημο (-).

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα που καθορίζουν τις κύριες διευθύνσεις με την διαδικασία που ήδη περιγράψαμε.

Διαγωνοποίηση Συμμετρικού Επίπεδου Τανυστή



Ιδιαίτερα **στην περίπτωση συμμετρικού τανυστή** όπου

$t_{ij} = t_{ji}$ είδαμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$t'_{11} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} + \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta + t_{12} \sin 2\theta$$

$$t'_{12} = t'_{21} = -\frac{t_{11} - t_{22}}{2} \sin 2\theta + t_{12} \cos 2\theta$$

$$t'_{22} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} - \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta - t_{12} \sin 2\theta$$

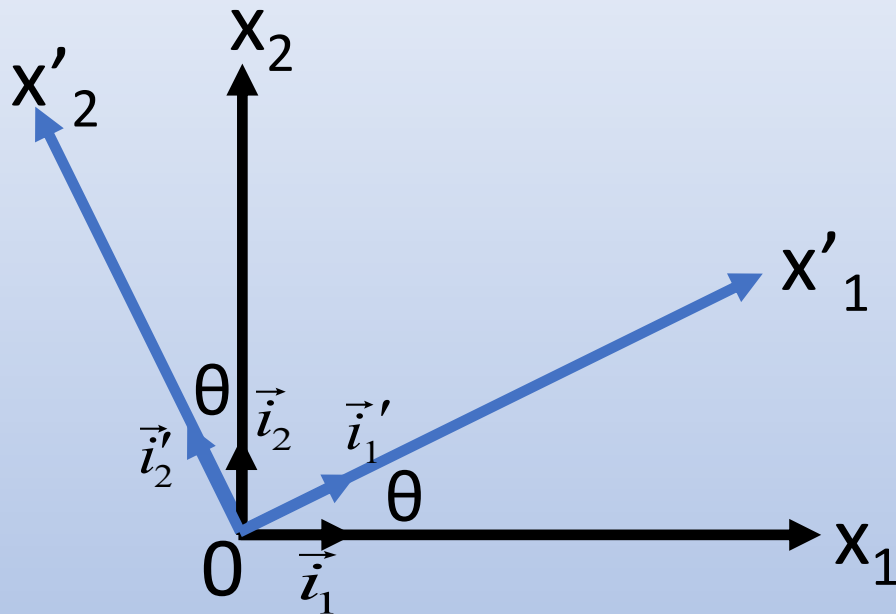
Αν το τονούμενο σύστημα είναι το κύριο σύστημα,

τότε: $t'_{12} = t'_{21} = 0 \Rightarrow$

$$t'_{12} = t'_{21} = -\frac{t_{11} - t_{22}}{2} \sin 2\theta + t_{12} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\tan 2\theta = \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}}$$

Διαγωνοποίηση Συμμετρικού Επίπεδου Τανυστή



$$t'_{11} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} + \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta + t_{12} \sin 2\theta$$

$$t'_{12} = t'_{21} = -\frac{t_{11} - t_{22}}{2} \sin 2\theta + t_{12} \cos 2\theta$$

$$t'_{22} = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} - \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \cos 2\theta - t_{12} \sin 2\theta$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε, αν αναζητούσαμε τα ακρότατα των t'_{11} , t'_{22} . Δηλαδή, αν παίρναμε

$$\frac{\partial t'_{11}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial t'_{22}}{\partial \theta} = 0$$