

ΕΥΓΕΝΙΑ Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΩΝ

Με στοιχεία θεωρίας πινάκων, ειδικών συναρτήσεων
και ολοκληρωτικών μετασχηματισμών

2η έκδοση
ΠΑΤΡΑ 2024

Τίτλος πρωτοτύπου: Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές αυτών. Με στοιχεία θεωρίας πινάκων, ειδικών συναρτήσεων και ολοκληρωτικών μετασχηματισμών.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος βιβλίου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της διεθνούς σύμβασης Βέρνης-Παρισίου που κυρώθηκε με το ν. 100/1975.

ISBN: 978-618-5560-56-0

Copyright © 2025, 2017 GOTSIS

Στοιχεία Συγγραφέα: Ευγενία Ν. Πετροπούλου
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 26504 Ρίο, Πάτρα
Τηλ.: (+30)2610962564
e-mail: jenpetr@upatras.gr
Ιστοσελίδα: <http://petropoulou.civil.upatras.gr>

*Στους γονείς μου
Νίκο και Μαρίνα*

Πρόλογος 2^{ης} έκδοσης

Σ' αυτήν τη δεύτερη έκδοση έγιναν αλλαγές στη μορφοποίηση του κειμένου, μερικές στοχευμένες μικρές παρεμβάσεις σε διάφορα σημεία και διορθώθηκαν κάποια τυπογραφικά λάθη. Επιπλέον, προστέθηκαν στο Κεφάλαιο 2 οι μεθοδολογίες που αφορούν στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων Clairaut, Lagrange, καθώς και διαφορικών εξισώσεων που ανάγονται σε χωριζομένων μεταβλητών ή ομογενείς πρώτης τάξης.

Ακόμη κρίθηκε αναγκαία η προσθήκη του πέμπτου μέρους που αφορά στη χρήση του λογισμικού *Mathematica* για την επίλυση και μελέτη θεμάτων που άπτονται των διαφορικών εξισώσεων. Το πέμπτο αυτό μέρος αποτελείται από τρία κεφάλαια, όπου περιγράφονται κάποιες χρήσιμες εντολές του *Mathematica* σχετικές με θέματα που διαπραγματεύεται το παρόν σύγγραμμα. Η παρουσίαση αυτών των εντολών γίνεται συνοπτικά και θεωρείται δεδομένη η εξοικείωση του αναγνώστη με το *Mathematica*.

Η συγγραφέας θα ήθελε και από αυτή τη θέση να εκφράσει τις ευχαριστίες της, προς όλους τους φοιτητές και όλες τις φοιτήτριες που διδάχθηκαν το παρόν σύγγραμμα την τελευταία δεκαετία περίπου. Οι εύστοχες παρατηρήσεις τους, καθώς και οι επικοινωνητικές συζητήσεις που είχαμε, συνέβαλαν σημαντικά στη βελτίωση του παρόντος συγγράμματος.

Πάτρα, 2025

Ευγενία Ν. Πετροπούλου

Πρόλογος 1^{ης} έκδοσης

Οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν ένα πολύ σημαντικό μέρος των Μαθηματικών και ειδικά των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, δεδομένου ότι με τη βοήθεια αυτών μπορούμε να περιγράψουμε τα περισσότερα φυσικά προβλήματα και στη συνέχεια να τα μελετήσουμε εκτενώς και να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες. Με λίγα λόγια, μη αυστηρά, θα λέγαμε ότι μια διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση με άγνωστη ποσότητα μια συνάρτηση, η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση μαζί με τουλάχιστον μία παράγωγό της. Οι διαφορικές εξισώσεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, ανάλογα με το αν η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μίας ή περισσότερων μεταβλητών, αντίστοιχα.

Υπάρχουν εκατοντάδες, ακόμη και χιλιάδες βιβλία, τόσο στην ελληνική όσο και στη διεθνή βιβλιογραφία, που αφορούν στις διαφορικές εξισώσεις, μερικά εκ των οποίων έχουν συμπεριληφθεί στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου, η οποία έχει κυρίως ενδεικτικό χαρακτήρα και έχει καταναμεηθεί σε πέντε τμήματα.

Αν και αρκετά από τα αναφερόμενα βιβλία θα μπορούσαν να ενσωματωθούν σε δύο από αυτά τα τμήματα, εντούτοις έχουν καταχωρηθεί μόνο σε ένα, ανάλογα με το που δίνεται περισσότερη βαρύτητα. Τα περισσότερα βιβλία εστιάζουν μόνο σε μία από τις δυο βασικές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων που αναφέραμε, κάτι που είναι απόλυτα κατανοητό, δεδομένου ότι το αντικείμενο που πρέπει να καλυφθεί είναι πραγματικά «τεράστιο». Επίσης, άλλα βιβλία εστιάζουν σε αναλυτικούς τρόπους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, άλλα σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσής τους και άλλα, στην ποιοτική μελέτη των λύσεών τους.

Το παρόν σύγγραμμα πραγματεύεται τη βασική ύλη των διαφορικών εξισώσεων, συνήθων και με μερικές παραγώγους, που καλύπτεται συνήθως σε διάφορα πανεπιστημιακά μαθήματα, κυρίως τμημάτων πολυτεχνικών σχολών και βασικός στόχος του είναι να ανταποκριθεί στις ανάγκες του μαθήματος «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ», του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, του Πανεπιστημίου Πατρών. Εντούτοις, έχει καταβληθεί προσπάθεια να συμπεριληφθούν και άλλα σχετικά θέματα που δεν εμπίπτουν στην ύλη του εν λόγω μαθήματος, τόσο για λόγους αυτοτέλειας του βιβλίου, όσο και για την καλύτερη και πιο ολοκληρωμένη παρουσίασή του.

Η ύλη του βιβλίου επιμερίζεται σε τέσσερα μέρη: Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και αποτελείται από επτά κεφάλαια. Τα πρώτα δύο κεφάλαια πραγματεύονται βασικές έννοιες, καθώς και τις κυριότερες μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στο τρίτο και πέμπτο κεφάλαιο παρατίθεται η γενική θεωρία και οι βασικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, συμπεριλαμβανομένης και της μεθόδου των δυναμοσειρών, ενώ το τέταρτο κεφάλαιο πραγματεύεται τις βασικές μεθόδους επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται τα κύρια χαρακτηριστικά των προβλημάτων συνοριακών τιμών με ταυτόχρονη αναφορά σε συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων και σειρών Fourier. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο έχουν συμπεριληφθεί στοιχεία ειδικών συναρτήσεων και ορθογωνίων πολωνύμων, που ικανοποιούν στην πλειοψηφία τους συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, αφενός μεν λόγω των πολλών εφαρμογών τους, αφετέρου δε λόγω της σύνδεσής τους με πολλές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται οι βασικές έννοιες, ενώ στα υπόλοιπα τρία οι κυριότερες μέθοδοι επίλυσής τους και συγκεκριμένα, η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών, η μέθοδος του d'Alembert, η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης και η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών.

Μια ακόμη δημοφιλής μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, ιδιαίτερα αξιοποίησιμη από μηχανικούς, είναι εκείνη που κάνει χρήση κατάλληλων ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, κυρίως μετασχηματισμών Laplace και Fourier. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί είναι πολύ χρήσιμα «εργαλεία» και για άλλους τομείς, όπως π.χ. για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων ή για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων όπου η άγνωστη ποσότητα είναι συνάρτηση και εμφανίζεται τουλάχιστον εντός ενός ολοκληρώματος. Επιπλέον, η γενική φιλοσοφία εφαρμογής ολοκληρωτικών μετασχηματισμών για την επίλυση εξισώσεων είναι η ίδια, ανεξάρτητα από το είδος της εξίσωσης. Γι' αυτό, το τρίτο μέρος του βιβλίου είναι αφιερωμένο στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς και αποτελείται από τρία κεφάλαια που πραγματεύονται τα γενικά στοιχεία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, το μετασχηματισμό Laplace και το μετασχηματισμό Fourier.

Τέλος, το τέταρτο μέρος του βιβλίου που αποτελείται από τρία κεφάλαια, είναι αφιερωμένο στις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων, των ολοκληρωτικών εξισώσεων καθώς και των ειδικών συναρτήσεων που άπτονται κυρίως προβλημάτων της επιστήμης του πολιτικού μηχανικού. Εντούτοις έχουν συμπεριληφθεί και άλλες εφαρμογές που είτε μπορούν να θεωρηθούν κλασικές είτε αρκετά ενδιαφέρουσες. Επιπλέον, αρκετές από αυτές τις εφαρμογές μπορεί να είναι ενδιαφέρουσες και για ένα μηχανόλογο μηχανικό ή χημικό μηχανικό. Για τις εφαρμογές, δίνεται περισσότερο έμφαση στον τρόπο επίλυσης των εμφανιζόμενων εξισώσεων και σε κάποιες περιπτώσεις και στις πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από τη λύση τους, και λιγότερο στο πώς καταλήγουμε σε αυτές τις εξισώσεις. Προς βοήθεια του αναγνώστη έχει συμπεριληφθεί ένα ευρετήριο εφαρμογών, όπου οι εφαρμογές έχουν κατηγοριοποιηθεί ανάλογα με τον τρόπο επίλυσής τους.

Ανεκτίμητης βοήθειας για τη συγγραφή του τέταρτου μέρους ήταν τα βιβλία του πολυαγαπημένου μου καθηγητή Παναγιώτη Δ. Σιαφάρικα, «Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων» Τόμος I και II, ο οποίος με μύησε στον κόσμο των διαφορικών εξισώσεων όταν έκανα τα πρώτα μου ερευνητικά βήματα. Εξίσου ανυπολόγιστης αξίας ήταν και τα βιβλία του ομότιμου καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Ν. Ι. Ιωακειμίδη, «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς» και «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς», ο οποίος δίδασκε επί σειρά ετών τα μαθήματα «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II» και «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III» του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Είχα τη χαρά και την τιμή να συνεργαστώ μαζί του και θα ήθελα και από αυτή τη θέση να τον ευχαριστήσω για τις πολύτιμες συζητήσεις που είχαμε.

Ο βασικός στόχος του βιβλίου είναι να βοηθήσει τον αναγνώστη να μάθει πως να λύνει αναλυτικά διαφορικές εξισώσεις, καθώς και πως να χειρίζεται τους βασικούς ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Laplace και Fourier. Γι' αυτό έχει δοθεί έμφαση περισσότερο στις μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και λιγότερο σε θέματα ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεών τους, ενώ δεν έχουν συμπεριληφθεί καθόλου θέματα που αφορούν στην αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Σε αρκετές περιπτώσεις δε, «θυσιάζεται» η μαθηματική αυστηρότητα ή παραλείπονται αποδείξεις θεωρημάτων. Επίσης, δεν εμβαθύνουμε στους μετασχηματισμούς Laplace και Fourier, αλλά περιοριζόμαστε στις βασικές τους ιδιότητες και στη χρήση τους για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και την επίλυση εξισώσεων. Τέλος, να επισημάνουμε ότι περιοριζόμαστε μόνο σε πραγματικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων. Για την καλύτερη κατανόηση της ύλης που πραγματεύεται το παρόν σύγγραμμα, υπάρχουν σε όλες τις ενότητες αρκετά λυμένα παραδείγματα, καθώς και άλυτες ασκήσεις με τις απαντήσεις τους.

Δεδομένης της ύλης του παρόντος βιβλίου, είναι επιθυμητή η εξοικείωση του αναγνώστη με τις στοιχειώδεις έννοιες του διαφορικού λογισμού των συναρτήσεων, τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και τη θεωρία πινάκων και γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων. Εντούτοις, για λόγους αυτοτέλειας έχει συμπεριληφθεί ένα εκτενές παράρτημα με τα βασικά στοιχεία της θεωρίας πινάκων και γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων, καθώς και ένα σύντομο παράρτημα με τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Heaviside και Dirac.

Η συγγραφέας θα ήθελε και από αυτή τη θέση να εκφράσει τις ευχαριστίες της στον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, κ. Π. Οικονόμου, για την πολύτιμη βοήθειά του σε θέματα που αφορούν στη στοιχειοθεσία σε LaTeX.

Πάτρα, 2017

Ευγενία Ν. Πετροπούλου

Περιεχόμενα

I	Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις	1
1	Βασικές έννοιες και ορισμοί	3
1.1	Εισαγωγή	3
1.2	Ορισμοί και χαρακτηρισμός διαφορικών εξισώσεων	8
1.3	Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων	16
2	Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	19
2.1	Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και αναγόμενες σε χωριζομένων μεταβλητών	20
2.2	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και αναγόμενες σε ομογενείς	25
2.3	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	36
2.4	Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli	44
2.5	Διαφορικές εξισώσεις Riccati	47
2.6	Ακρίβεις διαφορικές εξισώσεις και αναγόμενες σε ακρίβεις	51
2.7	Διαφορικές εξισώσεις Clairaut και Lagrange	65
2.8	Η προσεγγιστική μέθοδος Picard	68
3	Γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	77
3.1	Γενική θεωρία	77
3.2	Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	84
3.3	Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών	91
3.4	Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων	96
3.5	Διαφορικές εξισώσεις τύπου Euler	103
3.6	Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης	111
4	Συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων	119
4.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί	119
4.2	Επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο της απαλοιφής	126
4.3	Γενική θεωρία γραμμικών συστημάτων πρώτης τάξης	133
4.4	Επίλυση ομογενών συστημάτων με χρήση ιδιοτιμών και ιδοδια- νυσμάτων	145
4.5	Επίλυση ομογενών συστημάτων με τη μέθοδο διαγωνοποίησης	159

4.6	Επίλυση μη ομογενών συστημάτων	163
5	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των σειρών . . .	169
5.1	Εισαγωγικές έννοιες και βασικά στοιχεία περί σειρών	169
5.1.1	Σειρές αριθμών	172
5.1.2	Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων	177
5.1.3	Δυναμοσειρές	180
5.2	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή ενός ομαλού σημείου	183
5.3	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή ενός κανονικού ανώμαλου σημείου	195
5.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης. Ανακεφαλαίωση . . .	216
5.5	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή του α- πείρου	218
5.6	Επεκτάσεις της μεθόδου των σειρών	223
6	Προβλήματα συνοριακών τιμών και σειρές Fourier	233
6.1	Εισαγωγή	233
6.2	Προβλήματα ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων	236
6.3	Ορθογώνιες συναρτήσεις	253
6.4	Σειρές Fourier	258
6.4.1	Τριγωνομετρική μορφή των σειρών Fourier	258
6.4.2	Εκθετική μορφή των σειρών Fourier	267
6.4.3	Λίγα λόγια για το φαινόμενο Gibbs	271
6.5	Προβλήματα Sturm Liouville	275
7	Ειδικές συναρτήσεις και ορθογώνια πολυώνυμα	279
7.1	Εισαγωγή	279
7.2	Η συνάρτηση Γάμμα	280
7.3	Η συνάρτηση Βήτα	287
7.4	Η συνάρτηση σφάλματος	291
7.5	Πολυώνυμα Legendre	295
7.6	Πολυώνυμα Hermite	307
7.7	Πολυώνυμα Chebyshev	317
7.8	Πολυώνυμα Laguerre	324
7.9	Συναρτήσεις Bessel	334
II	Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους	355
8	Βασικές έννοιες και ορισμοί	357
8.1	Εισαγωγή	357
8.2	Ορισμοί και χαρακτηρισμός διαφορικών εξισώσεων	365
8.3	Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων	373

9	Απλές βασικές μεθοδολογίες για την επίλυση συγκεκριμένων κλάσεων διαφορικών εξισώσεων	375
9.1	Η λύση του d' Alembert για την κυματική εξίσωση	375
9.2	Η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης	378
10	Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών	383
10.1	Γεωμετρική ερμηνεία ημιγραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης	383
10.2	Επίλυση ημιγραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης	385
11	Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών	395
11.1	Γενική «φιλοσοφία» της μεθόδου	395
11.2	Εφαρμογή για ομογενείς εξισώσεις με ομογενείς συνοριακές συνθήκες	398
11.3	Επεκτάσεις της μεθόδου	421
11.3.1	Επέκταση για ομογενείς ΜΔΕ με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες	421
11.3.2	Επέκταση για μη ομογενείς ΜΔΕ	425
11.4	Εφαρμογή της μεθόδου για εξισώσεις με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές	428
III	Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί	441
12	Εισαγωγικά στοιχεία	443
12.1	Γενικές έννοιες και ορισμοί	443
12.2	Γενικεύσεις	446
12.3	Περιγραφή εφαρμογής ολοκληρωτικών μετασχηματισμών	447
13	Μετασχηματισμός Laplace	449
13.1	Ορισμός και ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace	449
13.2	Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace	465
13.2.1	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	465
13.2.2	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων	466
13.2.3	Επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων	479
13.2.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	484
14	Μετασχηματισμός Fourier	495
14.1	Ορισμός και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier	495
14.2	Εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier	507
14.2.1	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	507
14.2.2	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων	511
14.2.3	Επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων	513
14.2.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	515

IV Εφαρμογές	521
15 Εφαρμογές συνήθων διαφορικών εξισώσεων	523
15.1 Βέλος κάμψης συνήθους δοκού	523
15.2 Μετατόπιση καλωδίου	526
15.3 Κίνηση υλικού σημείου	527
15.4 Νόμος ψύξης θέρμανσης του Νεύτωνα	532
15.5 Ροή νερού σε μη κορεσμένο πορώδες μέσο	535
15.6 Ορθογώνιες τροχιές	538
15.7 Συγκέντρωση ρύπου σε υδατόρρευμα	544
15.8 Ταλαντώσεις μονώροφων κτιρίων	549
15.9 Βέλος κάμψης ορθογωνικής πλάκας	575
15.10 Βέλος κάμψης κυκλικής πλάκας	577
15.11 Βέλος κάμψης κυλινδρικού κελύφους	580
15.12 Περισταλτική ροή ρευστού σε σωλήνες	583
15.13 Προσομοίωση κυμάτων	584
15.14 Ταλαντώσεις πολυώροφων κτιρίων	590
15.15 Περιστροφική κίνηση δίσκων	600
15.16 Οικιακή θέρμανση	602
15.17 Προβλήματα μίξης	606
15.18 Ροή οριακού στρώματος. Το πρόβλημα του Blasius	611
15.19 Μη γραμμικές ταλαντώσεις	615
15.19.1 Η εξίσωση Duffing	615
15.19.2 Το σύστημα FitzHugh-Nagumo	619
15.20 Λυγισμός στύλου	624
15.21 Καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού	626
15.22 Ο κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής	628
15.23 Προβλήματα όπου εμφανίζονται ΣΔΕ Bessel	629
15.23.1 Ταλαντώσεις απλού εκκρεμούς με αυξανόμενο μήκος νήματος	629
15.23.2 Μικρές ταλαντώσεις ομοιόμορφης αλυσίδας αναρτημέ- νης από το ένα άκρο της	631
15.23.3 Ταλαντώσεις κυλινδρικών μεμβρανών	632
15.23.4 Λυγισμός ομοιόμορφου στύλου υπό το βάρος του	633
15.23.5 Υδάτινα κύματα σε κανάλια	634
16 Εφαρμογές διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	637
16.1 Το πρόβλημα της ταλαντούμενης χορδής	637

16.2	Προβλήματα ροών που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	643
16.2.1	Κυκλοφοριακή ροή οχημάτων	643
16.2.2	Παλιρροϊκά κύματα σε ποτάμια μεγάλου μήκους	645
16.3	Συγκέντρωση ρύπου σε υδατόρρευμα	645
16.4	Αξονικές ταλαντώσεις ομοιογενούς ράβδου	649
16.5	Αξονικές ταλαντώσεις ανομοιογενούς ράβδου	659
16.6	Αξονικές ταλαντώσεις ομοιογενούς ράβδου με απόσβεση	663
16.7	Εξαναγκασμένες αξονικές ταλαντώσεις ράβδου	666
16.8	Καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού	669
16.9	Ταλαντώσεις κυκλικών μεμβρανών	672
16.10	Θερμότητα σταθερής κατάστασης σε μια σφαίρα	677
16.11	Δυναμικό ταχύτητας ασυμπίεστου ιδεατού ρευστού	682
16.12	Διάδοση θερμότητας κατά μήκος μιας ράβδου	685
16.13	Ψύξη κυλινδρικής δεξαμενής	698
16.14	Διάχυση νετρονίων σ' έναν πυρηνικό αντιδραστήρα	701
17	Εφαρμογές ολοκληρωτικών εξισώσεων και ειδικών συναρτήσεων	709
17.1	Μήκος λημνίσκου	709
17.2	Μάζα αστεροειδούς πλάκας	711
17.3	Κατανομή ταχυτήτων ιδανικού αερίου	712
17.4	Εστίαση ήχου	713
17.5	Μετάδοση ισχύος μαγνητικού κύματος	715
17.6	Προβλήματα πλακών	716
17.6.1	Ορθογωνική πλάκα με απλή στήριξη	716
17.6.2	Κυκλική πλάκα επί ελαστικής βάσης	717
17.7	Φράγμα ποταμού	718
17.8	Προβλήματα ισοελαστικότητας	719
V	Επίλυση και Μελέτη Διαφορικών Εξισώσεων Με Χρήση Mathematica	721
18	Εισαγωγικά στοιχεία	723
18.1	Λίγα λόγια για το Mathematica	723
18.2	Βασικά στοιχεία για το περιβάλλον εργασίας	724
18.3	Βασικές εντολές	725
19	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων	747
19.1	Αναλυτική επίλυση ΣΔΕ, ΣΣΔΕ, ΜΔΕ	747
19.2	Αριθμητική επίλυση ΣΔΕ, ΣΣΔΕ, ΜΔΕ	761
20	Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί	769
20.1	Μετασχηματισμός Laplace	769
20.2	Μετασχηματισμός Fourier	775

Παράρτημα 1: Συναρτήσεις Heaviside και Dirac	781
Π1.1. Η συνάρτηση Heaviside	781
Π1.2. Η συνάρτηση Dirac	783
Παράρτημα 2: Πίνακες, ορίζουσες, συστήματα	785
Π2.1. Ορισμοί, πράξεις και είδη πινάκων	785
Π2.2. Ορίζουσες	795
Π2.3. Επίλυση γραμμικών συστημάτων	801
Π2.3.1 Η μέθοδος Cramer	802
Π2.3.1 Η μέθοδος Gauss	804
Π2.4. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα	811
Π2.5. Διαγωνοποίηση πινάκων	820
Βιβλιογραφία	825
Απαντήσεις των ασκήσεων	839
Ευρετήριο εφαρμογών	852
Ευρετήριο	855