

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 6

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Ομογενείς εξισώσεις Euler): Με χρήση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι ομογενών διαφορικών εξισώσεων τύπου Euler:

- (i) $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 x + c_2 x^3$
- (ii) $(x+3)^2 y''(x) + 3(x+3)y'(x) + y(x) = 0$, Απ. $y(x) = (x+3)^{-1} (c_1 + c_2 \ln(x+3))$
 $x+3 > 0$
- (iii) $x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = 0$, $x \neq 0$ Απ. $y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-1}$
- (iv) $x^3 y'''(x) + 4x^2 y''(x) - 8xy'(x) + 8y(x) = 0$, Απ. $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-4}$
 $x \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μη ομογενείς εξισώσεις Euler): Με χρήση της αλλαγής ανεξάρτητης μεταβλητής $x = e^t$ ή $x+3 = e^t$ ή $x-1 = e^t$, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων τύπου Euler:

- (i) $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^4$, $x > 0$ Απ. $y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x + \frac{x^4}{15}$
- (ii) $(x-1)^2 y''(x) - 4(x-1)y'(x) - 14y(x) = \frac{1}{x-1}$, Απ. $y(x) = c_1 (x-1)^7 + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{1-9x}{72(x-1)^2}$
 $x-1 > 0$
- (iii) $(x+3)^2 y''(x) - (x+3)y'(x) + y(x) = x+3$, Απ.
 $x+3 > 0$ $y(x) = (x+3) \left[c_1 + c_2 \ln(x+3) + \frac{\ln^2(x+3)}{2} \right]$
- (iv) $x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = x^4$, $x > 0$ Απ.
 $y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-1} + \frac{x^4}{5} \ln x - \frac{x^4}{25}$
- (v) $2(x-1)^2 y''(x) - 3(x-1)y'(x) - 3y(x) = 0$, Απ. $y(x) = c_1 (x-1)^3 + \frac{c_2}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{10} [\cos \ln(x-1) - \sin \ln(x-1)]$
 $x-1 > 0$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μέθοδος υποβιβασμού τάξης): Αφού πρώτα ελεγχθεί ότι η $y_1(x)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι εξισώσεων με χρήση της μεθόδου υποβιβασμού τάξης:

(i) $x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = x^4 \sin x$, Απ. $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 - x^2 \sin x$

$y_1(x) = x^2$

(ii) $x(x+1)y''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 1$, Απ. $y(x) = -1 + c_1 \frac{1}{1+x} + c_2 \frac{x^2}{2(1+x)}$

$y_1(x) = (x+1)^{-1}$

(iii) $x^2 y''(x) - 2y(x) = 2x^2$, $y_1(x) = x^2$, Απ. $y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} + \frac{2}{3} x^2 \ln x$

$x > 0$

(iv) $(2x^2 + 1)y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 0$, Απ. $y(x) = c_1 x + c_2 (2x^2 - 1)$

$y_1(x) = x$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Προβλήματα συνοριακών τιμών): Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ Απ. $y(x) = 0$

(ii) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 9x$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$

Απ. $y(x) = \frac{(3e-5)e^{-3x} + (5+9e^{-3})}{e+3e^{-3}} e^x - 3x - 2$

(iii) $y''(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 7$ Απ. $y(x) = 7 \sin(2x)$

(iv) $y''(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 4$, $y(\pi) = 4$ Απ. $y(x) = 4 \cos(2x) + c \sin(2x)$

(v) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$ Απ. $y(x) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Προβλήματα ιδιοτιμών): Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις των κάτωθι προβλημάτων συνοριακών τιμών:

(i) $y''(x) - 4\lambda y'(x) + 4\lambda^2 y(x) = 0$, Απ. Ιδιοτιμή -1 ,
 $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$ Ιδιοσυνάρτηση $x e^{-2x}$

(ii) $y''(x) + \lambda y'(x) = 0$, Απ. Δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις
 $y(0) + y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$

(iii) $y''(x) + 2y'(x) + (1-\lambda)y(x) = 0$, Απ. Ιδιοτιμές $-n^2 \pi^2$,
 $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ Ιδιοσυναρτήσεις $e^{-x} \sin(n\pi x)$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(iv) $x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0$, $x > 0$ Απ. Ιδιοτιμές $n^2 \pi^2$,
 $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ Ιδιοσυναρτήσεις $\sin(n\pi \ln x)$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(v) $y^{(4)}(x) - \lambda y(x) = 0$, Απ. Ιδιοτιμές n^4 ,
 $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$ Ιδιοσυναρτήσεις $\sin(nx)$, $n = 1, 2, 3, \dots$