

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 3**

**ΑΣΚΗΣΗ 1 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων Riccati):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ), με δεδομένο ότι η εκάστοτε  $y_1(x)$  είναι λύση της προς επίλυση ΣΔΕ:

(i)  $y' = 1 + x - (1 + 2x)y + xy^2, y_1(x) = 1$

Απ.  $\frac{1}{1-y} = -x - 1 + ce^x$

(ii)  $y' + xy^2 = -x^{-3}, y_1(x) = x^{-2}$

Απ.  $\frac{1}{x^2y-1} = -\ln x + c$

(iii)  $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}, y_1(x) = x$

Απ.  $\frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2x} + cx$

**ΑΣΚΗΣΗ 2 (Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις):** Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = 0$

(ii)  $e^{xy} dx + \frac{x}{y} e^{-xy} dy = 0$

(iii)  $y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy = 0$

(iv)  $y \sin(2x) dx - (\sqrt{y} + \cos(2x)) dy = 0$

(v)  $(e^{2x} + y) dx - (e^y - x) dy = 0$

(vi)  $3xy^2 dy + y^3 dx = 0$

(vii)  $(x - y \sin x) dx + (y^6 + \cos x) dy = 0$

(viii)  $(y + x) dy + (x - y) dx = 0$

(ix)  $\sqrt{x} dy - xy dx = 0$

(x)  $(y + x) dy + (y - x) dx = 0$

**ΑΣΚΗΣΗ 3 (Επίλυση ακριβών διαφορικών εξισώσεων):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $(2x + y^3) dx + (3xy^2 + 4) dy = 0$

Απ.  $x^2 + xy^3 + 4y = c$

(ii)  $-\frac{1}{y} dx + \left(\frac{x}{y^2} + 3y^2\right) dy = 0$

Απ.  $-\frac{x}{y} + y^3 = c$

(iii)  $(\sin y)^2 dx + x \sin(2y) dy = 0$

Απ.  $x \sin^2 y = c$

(iv)  $(e^y - 2xy) dx + (xe^y - x^2) dy = 0$

Απ.  $xe^y - x^2 y = c$

(v)  $\left(\frac{2x}{1+x^2} + y\right) dx + (e^y + x) dy = 0$

Απ.  $e^y + xy + \ln(1+x^2) = c$

**ΑΣΚΗΣΗ 4 (Ολοκληρωτικοί παράγοντες):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ), αφού πρώτα επαληθευτεί ότι η εκάστοτε συνάρτηση  $\mu$ , είναι ολοκληρωτικός παράγοντας για την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση:

(i)  $y(2e^x + 4x)dx + 3(e^x + x^2)dy = 0$ , Απ.  $2e^x y^{3/2} + 2x^2 y^{3/2} = c$

$$\mu(y) = y^{1/2}$$

(ii)  $(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ , Απ.  $x^5 y + x^4 y^2 + \frac{x^4}{4} = c$

$$\mu(x) = x^3$$

(iii)  $(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0$  Απ.  $(x + y)^3 (x^2 + y^3) = c$

$$\mu(x + y) = (x + y)^2$$

(iv)  $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$ , Απ.  $e^{xy} (x + y) = c$

$$\mu(xy) = e^{xy}$$

(v)  $ydx - (y^2 + x^2 + x)dy = 0$ , Απ.  $\arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{1}{y} -$

$$\mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$-y - \arctan y = c$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5 (Ορθογώνιες τροχιές):** Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των κάτωθι μονοπαραμετρικών οικογενειών καμπυλών (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $y + 2x = c$  Απ.  $y = k + x / 2$

(ii)  $y^2 = x^2 + cx$  Απ.  $x^2 y + \frac{y^3}{3} = k$

(iii)  $y = e^{cx}$  Απ.  $y^2 \ln y - \frac{y^2}{2} + x^2 = k$

(iv)  $y = ce^x$  Απ.  $\frac{y^2}{2} + x = k$

(v)  $y = c \cdot \cos x$  Απ.  $\frac{y^2}{2} = \ln |\sin x| + k$