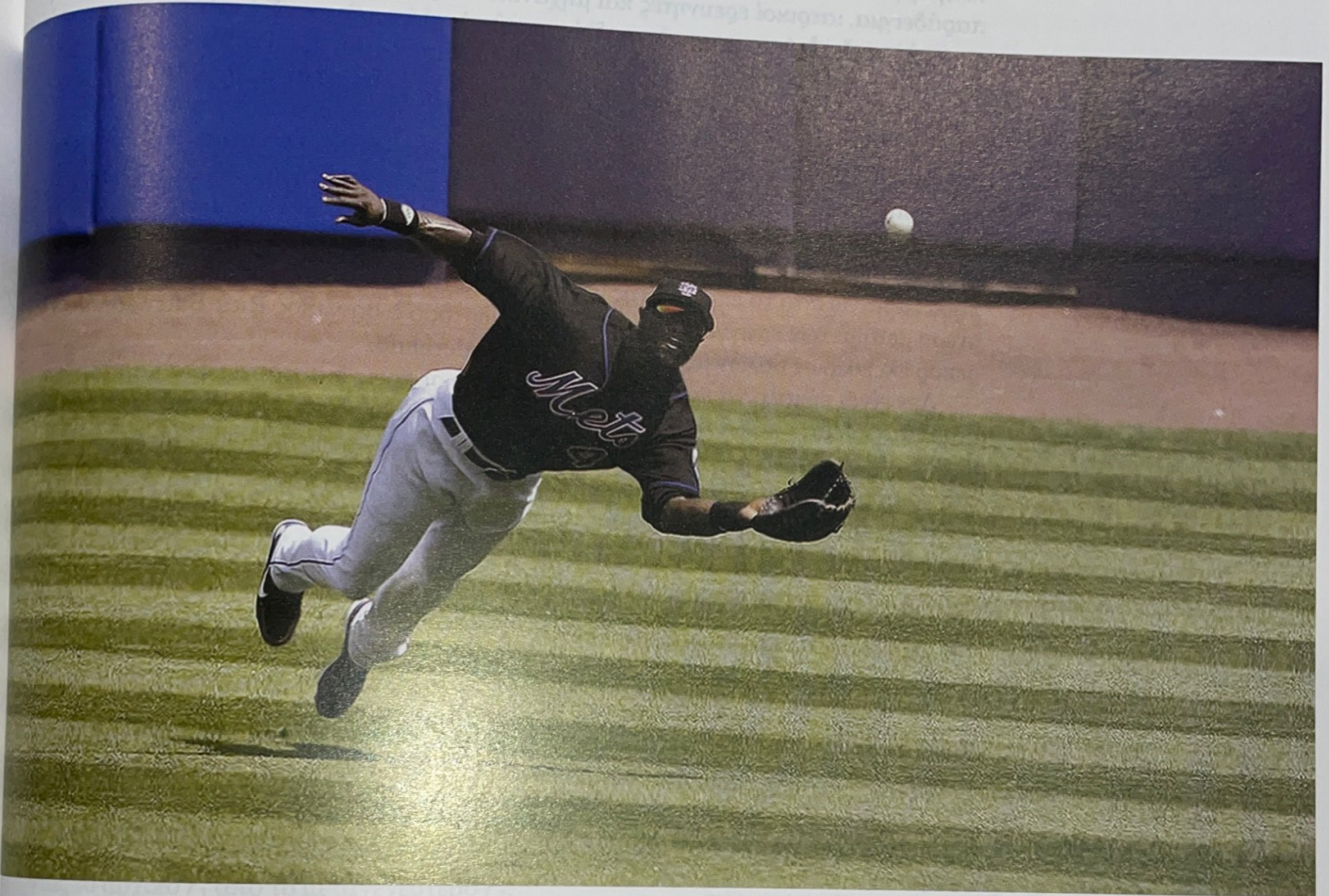


Κίνηση σε Δύο και Τρεις Διαστάσεις

4



Rob Tringali/Sports Chrome Inc.

Όταν η μπάλα του μπέιζμπολ ρίχνεται προς την εξωτερική περιοχή του γηπέδου, πώς ξέρει ο παίκτης που βρίσκεται εκεί πού να σταθεί για να την πιάσει; Συχνά, ο παίκτης θα κάνει μερικές δρασκελιές ή θα τρέξει με συγκεκριμένο ρυθμό προς το σημείο που κατευθύνεται η μπάλα, φτάνοντας ταυτόχρονα μ' αυτή. Η εμπειρία του παιχνιδιού σίγουρα βοηθάει, ωστόσο φαίνεται πως εμπλέκονται και άλλοι παράγοντες.

**Τι κρύβεται
πίσω
από την κίνηση
της μπάλας;**

Η απάντηση βρίσκεται σ' αυτό
το κεφάλαιο.

4-1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΦΥΣΙΚΗ;

Στο παρόν κεφάλαιο συνεχίζουμε με εκείνο το κομμάτι της Φυσικής που αναλύει την κίνηση, μόνο που τώρα η κίνηση μπορεί να είναι στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις. Για παράδειγμα, ιατρικοί ερευνητές και μηχανικοί αεροσκαφών μπορεί να εστιάσουν στη φυσική των δισδιάστατων και τρισδιάστατων ελιγμών που εκτελεί πιλότος μαχητικού αεροπλάνου στη διάρκεια αερομαχίας, διότι ένα σύγχρονο, τελευταίας τεχνολογίας μαχητικό μπορεί να στρίψει τόσο γρήγορα, που ο πιλότος χάνει τις αισθήσεις του ακαριαία. Στον αθλητισμό κάποιος μπορεί να εστιάσει στη φυσική του μπάσκετ. Για παράδειγμα, στην ελεύθερη βολή (όπου ο παίκτης κερδίζει ένα ελεύθερο σουτ από απόσταση περίπου 4.3 m από το καλάθι), ο παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει την τεχνική του «overhand push» κατά την οποία η μπάλα έρχεται στο ύψος του ώμου και ρίχνεται από εκεί, ή την τεχνική του «underhand loop», κατά την οποία η μπάλα ρίχνεται προς τα πάνω από το επίπεδο της μέσης. Η πρώτη τεχνική είναι μακράν η δημοσιφιέστερη μεταξύ των επαγγελματιών αθλητών, ωστόσο ο θρυλικός Rick Barry έσπασε το ρεκόρ ελευθέρων βολών με την τεχνική του underhand.

Δεν είναι εύκολο να καταλάβετε την κίνηση σε τρεις διαστάσεις. Για παράδειγμα, πιθανότατα είστε καλοί στην οδήγηση αυτοκινήτου σε αυτοκινητόδρομο (κίνηση σε μία διάσταση), αλλά μάλλον θα σας ήταν αδύνατον να προσγειώσετε ένα αεροπλάνο στον διάδρομο προσγείωσης (κίνηση σε τρεις διαστάσεις), χωρίς πολλή εκπαίδευση.

Ξεκινάμε τη μελέτη της κίνησης σε δύο και τρεις διαστάσεις με τη θέση και τη μετατόπιση.

4-2 Θέση και Μετατόπιση

Ένας γενικός τρόπος για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου (ή σημειακού αντικειμένου) είναι με το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}$, το οποίο είναι ένα διάνυσμα που εκτείνεται από το σημείο αναφοράς (συνήθως η αρχή των αξόνων) έως το σωματίδιο. Στον συμβολισμό των μοναδιαίων διανυσμάτων της Ενότητας 3-5 το $\vec{r}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (4-1)$$

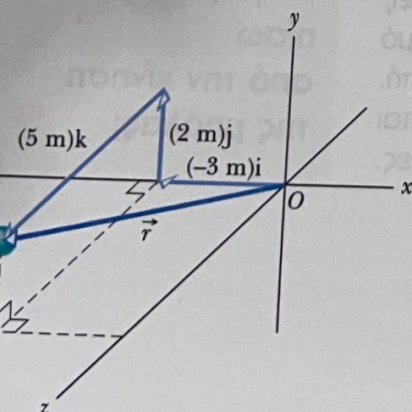
όπου $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ και $z\hat{k}$ είναι οι συνιστώσες του $\vec{r}$ ενώ οι συντελεστές x , y και z είναι οι βαθμωτές συνιστώσες του.

Οι συντελεστές x , y και z δίνουν τη θέση του σωματιδίου κατά μήκος των αξόνων και ως προς την αρχή· δηλαδή το σωματίδιο έχει ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y, z) . Για παράδειγμα, το Σχ. 4-1 δείχνει ένα σωματίδιο με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = (-3 \text{ m})\hat{i} + (2 \text{ m})\hat{j} + (5 \text{ m})\hat{k}$$

και ορθογώνιες συντεταγμένες $(-3 \text{ m}, 2 \text{ m}, 5 \text{ m})$. Κατά τον άξονα x το σωματίδιο βρίσκεται 3 m από την αρχή, προς την $-\hat{i}$ κατεύθυνση. Κατά τον άξονα y βρίσκεται 2 m από την αρχή, προς την $+\hat{j}$ κατεύθυνση. Κατά τον άξονα z βρίσκεται 5 m από την αρχή, προς την $+\hat{k}$ κατεύθυνση.

Καθώς το σωματίδιο κινείται, το διάνυσμα θέσης του μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εκτείνεται πάντοτε από το σημείο αναφοράς (την αρχή) στο σωματίδιο. Αν το διάνυσμα θέσης μεταβάλλεται –για παράδειγμα από $\vec{r}_1$ σε $\vec{r}_2$ σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα– τότε η μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ του σωματιδίου σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι



ΣΧΗΜΑ 4-1 Για ένα σωματίδιο, το διάνυσμα θέσης είναι το διανυσματικό ποσοστό των συνιστωσών του.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4-2)$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων της Εξ. 4-1, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη μετατόπιση ως

$$\Delta \vec{r} = (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})$$

ή ως

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k}, \quad (4-3)$$

όπου οι συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) αντιστοιχούν στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}_1$ και οι συντεταγμένες (x_2, y_2, z_2) αντιστοιχούν στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}_2$. Μπορούμε επίσης να ξαναγράψουμε τη μετατόπιση αντικαθιστώντας το $(x_2 - x_1)$ με Δx , το $(y_2 - y_1)$ με Δy και το $(z_2 - z_1)$ με Δz :

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}. \quad (4-4)$$

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-1

Στο Σχ. 4-2, το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου αρχικά είναι

$$\vec{r}_1 = (-3.0 \text{ m}) \hat{i} + (2.0 \text{ m}) \hat{j} + (5.0 \text{ m}) \hat{k}$$

και αργότερα γίνεται

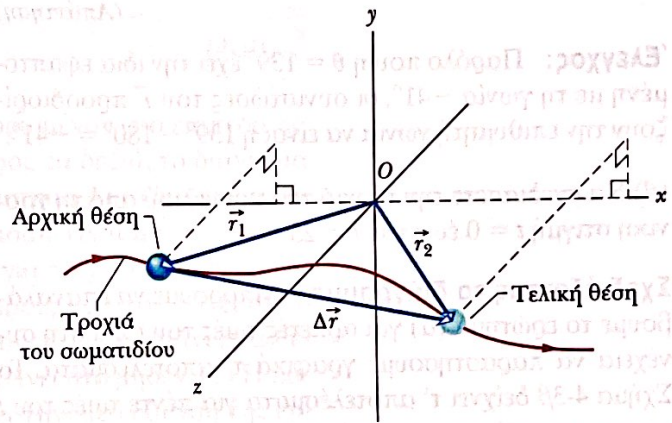
$$\vec{r}_2 = (9.0 \text{ m}) \hat{i} + (2.0 \text{ m}) \hat{j} + (8.0 \text{ m}) \hat{k}.$$

Πόση είναι η μετατόπιση $\Delta \vec{r}$ του σωματιδίου από το $\vec{r}_1$ στο $\vec{r}_2$;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Η μετατόπιση $\Delta \vec{r}$ υπολογίζεται αφαιρώντας το αρχικό $\vec{r}_1$ από το μεταγενέστερο $\vec{r}_2$.

Υπολογισμός: Η αφαίρεση μας δίνει

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= [9.0 - (-3.0)] \hat{i} + [2.0 - 2.0] \hat{j} + [8.0 - 5.0] \hat{k} \\ &= (12 \text{ m}) \hat{i} + (3.0 \text{ m}) \hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$



ΣΧΗΜΑ 4-2 Η μετατόπιση $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ εκτείνεται από το πέρας (τέλος) του αρχικού διανύσματος θέσης $\vec{r}_1$ ως το πέρας (τέλος) του τελικού διανύσματος θέσης $\vec{r}_2$.

Το συγκεκριμένο διάνυσμα μετατόπισης είναι παράλληλο στο επίπεδο xz διότι δεν έχει συνιστώσα y .

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-2

Ένα κουνέλι τρέχει μέσα από ένα πάρκινγκ, στο οποίο, παραδόξως, έχει σχεδιαστεί ένα σύστημα συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες (σε μέτρα) της θέσης του κουνελιού ως συναρτήσεις του χρόνου t (σε δευτερόλεπτα) δίνονται από τις σχέσεις

$$x = -0.31t^2 + 7.2t + 28 \quad (4-5)$$

$$y = 0.22t^2 - 9.1t + 30. \quad (4-6)$$

(α) Τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$, πόσο είναι το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του κουνελιού, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και σε συμβολισμό μέτρου-γωνίας;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Οι συντεταγμένες x και y της θέσης του κουνελιού, όπως δίνονται από τις Εξ. 4-5 και 4-6, είναι οι βαθμωτές συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\vec{r}$.

Υπολογισμοί: Μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \quad (4-7)$$

(Γράφουμε $\vec{r}(t)$ αντί για $\vec{r}$ διότι οι συνιστώσες είναι συναρτήσεις του t , συνεπώς είναι και το $\vec{r}$.)

Τη χρονική στιγμή $t = 15$ s οι βαθμωτές συνιστώσες είναι

$$x = (-0.31)(15)^2 + (7.2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

$$\text{και } y = (0.22)(15)^2 - (9.1)(15) + 30 = -57 \text{ m},$$

$$\text{οπότε } \vec{r} = (66 \text{ m})\hat{i} - (57 \text{ m})\hat{j}, \quad (\text{Απάντηση})$$

το οποίο παριστάνεται στο Σχ. 4-3α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο και τη γωνία του $\vec{r}$ χρησιμοποιούμε την Εξ. 3-6:

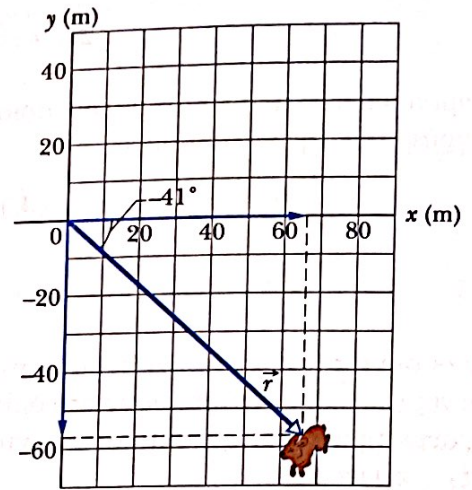
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2} = 87 \text{ m}, \quad (\text{Απάντηση})$$

$$\text{και } \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(\frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}} \right) = -41^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

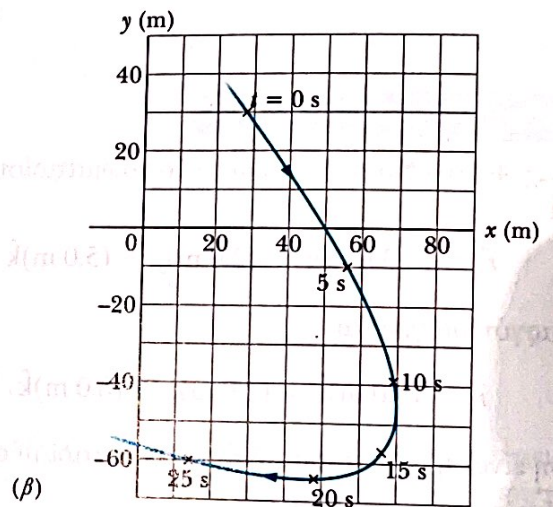
Έλεγχος: Παρόλο που η $\theta = 139^\circ$ έχει την ίδια εφαπτομένη με τη γωνία -41° , οι συνιστώσες του $\vec{r}$ προσδιορίζουν την επιθυμητή γωνία να είναι η $139^\circ - 180^\circ = -41^\circ$.

(β) Να σχεδιάσετε την τροχιά του κουνελιού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως την $t = 25$ s.

Σχεδιάζοντας το διάγραμμα: Μπορούμε να επαναλάβουμε το ερώτημα (α) για αρκετές τιμές του t και στη συνέχεια να παραστήσουμε γραφικά τ' αποτελέσματα. Το Σχήμα 4-3β δείχνει τ' αποτελέσματα για πέντε τιμές του t και την καμπύλη που τα ενώνει. Μπορούμε επίσης να παραστήσουμε γραφικά τις Εξ. 4-5 και 4-6 με αριθμομηχανή.



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 4-3 (α) Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του κουνελιού τη χρονική στιγμή $t = 15$ s. Φαίνονται οι βαθμωτές συνιστώσες κατά τους άξονες. (β) Η τροχιά του κουνελιού και η θέση του για πέντε τιμές του t .

4-3 Μέση Ταχύτητα και Στιγμιαία Ταχύτητα

Αν ένα σωματίδιο κινείται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, θα θέλουμε να ξέρουμε πόσο γρήγορα κινήθηκε. Όπως ακριβώς και στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να ορίσουμε δύο μεγέθη που να αντιμετωπίζουν το «πόσο γρήγορα»: τη **μέση ταχύτητα** και τη **στιγμιαία ταχύτητα**. Ωστόσο, εδώ θα πρέπει να θεωρήσουμε αυτά τα μεγέθη ως διανύσματα και να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικό συμβολισμό.

Αν ένα σωματίδιο μετατοπίζεται κατά $\Delta \vec{r}$ σε χρονικό διάστημα Δt , τότε η **μέση ταχύτητα** $\vec{v}_{\text{avg}}$ είναι

$$\text{μέση ταχύτητα} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρονικό διάστημα}},$$

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (4-8)$$

Αυτή μας λέει ότι η κατεύθυνση της $\vec{v}_{avg}$ (το διάνυσμα στο αριστερό μέλος της Εξ. 4-8) πρέπει να είναι ίδια με αυτή της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$ (το διάνυσμα στο δεξί μέλος). Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-4 μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 4-8 με τις συνιστώσες των διανυσμάτων ως

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}. \quad (4-9)$$

Για παράδειγμα, αν το σωματίδιο του Ενδεικτικού Προβλήματος 4-1 κινείται από την αρχική του θέση στην τελική σε 2.0 s, τότε η μέση ταχύτητά του κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης είναι

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12 \text{ m})\hat{i} + (3.0 \text{ m})\hat{k}}{2.0 \text{ s}} = (6.0 \text{ m/s})\hat{i} + (1.5 \text{ m/s})\hat{k}.$$

Δηλαδή, η μέση ταχύτητα (διανυσματικό μέγεθος) έχει συνιστώσα 6.0 m/s κατά τον άξονα x και συνιστώσα 1.5 m/s κατά τον άξονα z.

Όταν μιλάμε για την ταχύτητα ενός σωματιδίου, συνήθως εννοούμε τη στιγμιαία ταχύτητά του $\vec{v}$ σε κάποια χρονική στιγμή. Αυτή η $\vec{v}$ είναι το όριο στο οποίο τείνει η $\vec{v}_{avg}$ όταν το χρονικό διάστημα Δt τείνει στο 0, γύρω από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα του διαφορικού λογισμού, μπορούμε να γράψουμε την $\vec{v}$ ως την παράγωγο

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4-10)$$

Το Σχήμα 4-4 δείχνει την τροχιά ενός σωματιδίου περιορισμένου στο επίπεδο xy. Καθώς το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης προς τα δεξιά, το διάνυσμα θέσης του «σαρώνει» επίσης προς τα δεξιά. Στο χρονικό διάστημα Δt το διάνυσμα θέσης μεταβάλλεται από $\vec{r}_1$ σε $\vec{r}_2$ και η μετατόπιση του σωματιδίου είναι $\Delta\vec{r}$.

Για να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου, για παράδειγμα τη χρονική στιγμή t_1 (όταν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση 1), θεωρούμε Δt που τείνει στο 0 γύρω από το t_1 . Τρία πράγματα συμβαίνουν καθώς το κάνουμε. (1) Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_2$ στο Σχ. 4-4 πλησιάζει προς το $\vec{r}_1$ έτσι ώστε το $\Delta\vec{r}$ να τείνει στο μηδέν. (2) Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (και συνεπώς και της $\vec{v}_{avg}$) προσεγγίζει την κατεύθυνση της ευθείας που εφάπτεται στην τροχιά του σωματιδίου στη θέση 1. (3) Η μέση ταχύτητα $\vec{v}_{avg}$ προσεγγίζει τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$ τη χρονική στιγμή t_1 .

Στο όριο, καθώς $\Delta t \rightarrow 0$, έχουμε $\vec{v}_{avg} \rightarrow \vec{v}$ και, το πιο σημαντικό εδώ, η $\vec{v}_{avg}$ παίρνει την κατεύθυνση της εφαπτομένης ευθείας. Συνεπώς η $\vec{v}$ έχει επίσης την ίδια κατεύθυνση:

➔ Η κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}$ ενός σωματιδίου είναι πάντοτε εφαπτόμενη της τροχιάς του σωματιδίου στη θέση στην οποία βρίσκεται.

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο στις τρεις διαστάσεις: η $\vec{v}$ είναι πάντοτε εφαπτόμενη στην τροχιά του σωματιδίου.

Για να γράψουμε την Εξ. 4-10 σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, αντικαθιστούμε το $\vec{r}$ από την Εξ. 4-1:

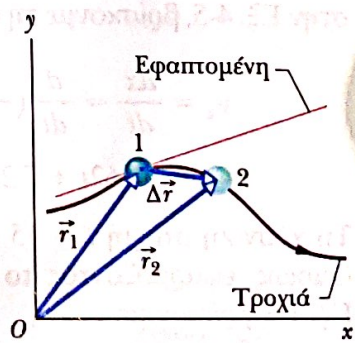
$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}.$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί κάπως, γράφοντάς την

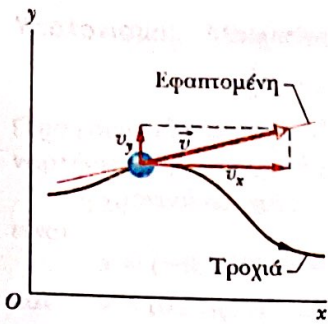
$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (4-11)$$

όπου οι βαθμωτές συνιστώσες της $\vec{v}$ είναι

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{και} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4-12)$$



ΣΧΗΜΑ 4-4 Η μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ ενός σωματιδίου κατά το χρονικό διάστημα Δt , από τη θέση 1 με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_1$ τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση 2 με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_2$ τη χρονική στιγμή t_2 . Φαίνεται η εφαπτομένη της τροχιάς του σωματιδίου στη θέση 1.



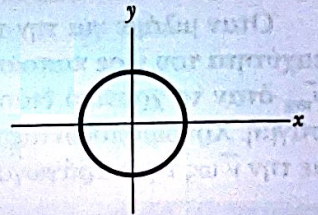
ΣΧΗΜΑ 4-5 Η ταχύτητα $\vec{v}$ ενός σωματιδίου και οι συνιστώσες της.

Για παράδειγμα, dx/dt είναι η βαθμωτή συνιστώσα της $\vec{v}$ κατά τον άξονα x . Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε τις βαθμωτές συνιστώσες της $\vec{v}$ παραγωγίζοντας τις βαθμωτές συνιστώσες του $\vec{r}$.

Το Σχήμα 4-5 δείχνει ένα διάνυσμα ταχύτητας και τις βαθμωτές συνιστώσες του κατά τους άξονες x και y . Σημειώστε ότι η $\vec{v}$ είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του σωματιδίου στο σημείο που βρίσκεται αυτό. **Προσοχή:** όταν σχεδιάζεται ένα διάνυσμα θέτιδίου στο σημείο που βρίσκεται αυτό, όπως στα Σχ. 4-1 έως 4-4, αυτό είναι ένα βέλος που εκτείνεται από ένα σημείο («εδώ») σε κάποιο άλλο σημείο («εκεί»). Ωστόσο, όταν σχεδιάζεται ένα διάνυσμα ταχύτητας, όπως στο Σχ. 4-5, αυτό δεν εκτείνεται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Αντιθέτως, δείχνει τη στιγμιαία κατεύθυνση κίνησης του σωματιδίου στην αρχή του και το μήκος του (που αντικατοπτρίζει το μέτρο της ταχύτητας) μπορεί να σχεδιαστεί υπό οποιαδήποτε κλίμακα.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1 Το σχήμα δείχνει την κυκλική τροχιά που ακολουθεί ένα σωματίδιο. Αν η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} - (2 \text{ m/s})\hat{j}$, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σωματίδιο τη δεδομένη χρονική στιγμή, αν κινείται (α) αριστερόστροφα και (β) δεξιόστροφα; Να σχεδιάσετε την $\vec{v}$ στο σχήμα και για τις δύο περιπτώσεις.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-3

Να βρείτε την ταχύτητα $\vec{v}$ τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ για το κουνέλι του Ενδεικτικού Προβλήματος 4-2.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Μπορούμε να βρούμε τη $\vec{v}$ παίρνοντας τις παραγώγους των συνιστωσών του διανύσματος θέσης του κουνελιού.

Υπολογισμοί: Εφαρμόζοντας το v_x μέρος της Εξ. 4-12 στην Εξ. 4-5, βρίσκουμε τη συνιστώσα x της $\vec{v}$ να είναι

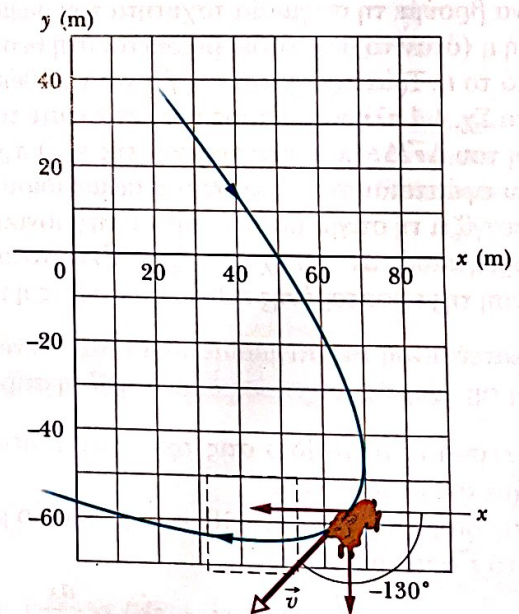
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0.31t^2 + 7.2t + 28) \\ &= -0.62t + 7.2. \end{aligned} \quad (4-13)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ αυτή δίνει $v_x = -2.1 \text{ m/s}$. Ομοίως, εφαρμόζοντας το v_y μέρος της Εξ. 4-12 στην Εξ. 4-6, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0.22t^2 - 9.1t + 30) \\ &= 0.44t - 9.1. \end{aligned} \quad (4-14)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ αυτή δίνει $v_y = -2.5 \text{ m/s}$. Τότε η Εξίσωση 4-11 δίνει

$$\vec{v} = (-2.1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2.5 \text{ m/s})\hat{j}, \quad (\text{Απάντηση})$$



ΣΧΗΜΑ 4-6 Η ταχύτητα του κουνελιού τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$.

η οποία φαίνεται στο Σχ. 4-6, εφαπτόμενη στην τροχιά και προς την κατεύθυνση που κινείται το κουνέλι τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$.

Για να βρούμε το μέτρο και τη γωνία της $\vec{v}$, είτε χρησιμοποιούμε αριθμομηχανή ικανή να χειρίζεται διανύ-

σματα, είτε χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 3-6 για να γράψουμε

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2.1 \text{ m/s})^2 + (-2.5 \text{ m/s})^2} = 3.3 \text{ m/s}$$

(Απάντηση)

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \left(\frac{-2.5 \text{ m/s}}{-2.1 \text{ m/s}} \right) = \tan^{-1} 1.19 = -130^\circ \quad (\text{Απάντηση})$$

Έλεγχος: Η γωνία είναι -130° ή $-130^\circ + 180^\circ = 50^\circ$;

4-4 Μέση Επιτάχυνση και Στιγμαία Επιτάχυνση

Όταν η ταχύτητα ενός σωματιδίου μεταβάλλεται από $\vec{v}_1$ σε $\vec{v}_2$ σε χρονικό διάστημα Δt , η μέση επιτάχυνσή του $\vec{a}_{\text{avg}}$ κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι

$$\text{μέση επιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή της ταχύτητας}}{\text{χρονικό διάστημα}},$$

$$\text{ή} \quad \vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4-15)$$

Αν θεωρήσουμε ότι το Δt τείνει στο μηδέν γύρω από κάποια χρονική στιγμή, τότε στο όριο η $\vec{a}_{\text{avg}}$ προσεγγίζει τη **στιγμαία επιτάχυνση** (ή **επιτάχυνση**) $\vec{a}$ εκείνη τη χρονική στιγμή, δηλαδή,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4-16)$$

Αν μεταβάλλεται είτε το μέτρο είτε η κατεύθυνση της ταχύτητας (ή και τα δύο), το σωματίδιο πρέπει να έχει επιτάχυνση.

Μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 4-16 σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων αντικαθιστώντας το $\vec{v}$ από την Εξ. 4-11 ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}. \end{aligned}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή τη σχέση ως

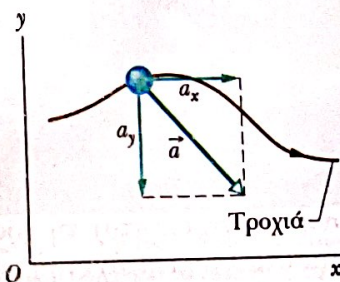
$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (4-17)$$

όπου οι βαθμωτές συνιστώσες του $\vec{a}$ είναι

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{και} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4-18)$$

Για να βρούμε τις βαθμωτές συνιστώσες του $\vec{a}$ παραγωγίζουμε τις βαθμωτές συνιστώσες του $\vec{v}$.

Το Σχήμα 4-7 δείχνει ένα διάνυσμα επιτάχυνσης $\vec{a}$ και τις βαθμωτές συνιστώσες του για σωματίδιο που κινείται στις δύο διαστάσεις. Προσοχή: όταν σχεδιάζεται ένα διάνυσμα επιτάχυνσης, όπως στο Σχ. 4-7, αυτό δεν εκτείνεται από μία θέση σε κάποια άλλη. Αντιθέτως, δείχνει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης ενός σωματιδίου που βρίσκεται στην αρχή του διανύσματος, ενώ το μήκος του (που αντικατοπτρίζει το μέτρο της επιτάχυνσης) μπορεί να σχεδιαστεί υπό οποιαδήποτε κλίμακα.



ΣΧΗΜΑ 4-7 Η επιτάχυνση $\vec{a}$ ενός σωματιδίου και οι βαθμωτές συνιστώσες της.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2 Εδώ δίνονται τέσσερις περιγραφές της θέσης (σε μέτρα) μιας μπάλας του χόκεϊ καθώς αυτή κινείται στο επίπεδο xy :

$$(1) x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ και } y = 6t^2 - 4t \quad (3) \vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$$

$$(2) x = -3t^3 - 4t \text{ και } y = -5t^2 + 6 \quad (4) \vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$$

Είναι οι συνιστώσες x και y της επιτάχυνσης $\vec{a}$ σταθερές; Είναι η επιτάχυνση $\vec{a}$ σταθερή;

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-4

Να βρείτε την επιτάχυνση $\vec{a}$ τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$ για το κουνέλι των Ενδεικτικών Προβλημάτων 4-2 και 4-3.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Μπορούμε να βρούμε την $\vec{a}$ παίρνοντας τις παραγώγους των συνιστωσών της ταχύτητας του κουνελιού.

Υπολογισμοί: Εφαρμόζοντας το a_x μέρος της Εξ. 4-18 στην Εξ. 4-13, βρίσκουμε την συνιστώσα x της $\vec{a}$ να είναι

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0.62t + 7.2) = -0.62 \text{ m/s}^2.$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας το a_y μέρος της Εξ. 4-18 στην Εξ. 4-14 μας δίνει την συνιστώσα y να είναι

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0.44t - 9.1) = 0.44 \text{ m/s}^2.$$

Βλέπουμε ότι η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τον χρόνο (είναι μια σταθερά) γιατί η μεταβλητή του χρόνου t δεν εμφανίζεται σε καμία συνιστώσα της επιτάχυνσης. Η Εξίσωση 4-17 μας δίνει τότε

$$\vec{a} = (-0.62 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (0.44 \text{ m/s}^2)\hat{j}, (\text{Απάντηση})$$

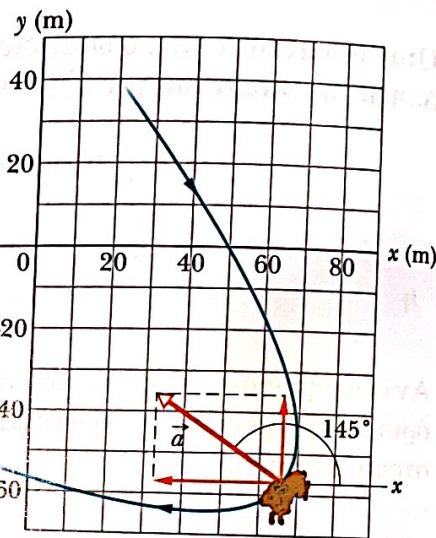
η οποία υπερτίθεται στην τροχιά του κουνελιού στο Σχ. 4-8.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο και τη γωνία της $\vec{a}$, είτε χρησιμοποιούμε αριθμομηχανή ικανή να χειρίζεται διανύσματα, είτε χρησιμοποιούμε την Εξ. 3-6. Για το μέτρο έχουμε

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.62 \text{ m/s}^2)^2 + (0.44 \text{ m/s}^2)^2} = 0.76 \text{ m/s}^2. (\text{Απάντηση})$$

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-5

Ένα σωματίδιο με ταχύτητα $\vec{v}_0 = -2.0\hat{i} + 4.0\hat{j}$ (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο) τη χρονική στιγμή $t = 0$ υφίσταται σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 3.0 \text{ m/s}^2$ σε γωνία $\theta = 130^\circ$ ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Πόση είναι η ταχύτητα $\vec{v}$ του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 5.0 \text{ s}$;



ΣΧΗΜΑ 4-8 Η επιτάχυνση $\vec{a}$ του κουνελιού τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$. Το κουνέλι έχει την ίδια επιτάχυνση σε όλα τα σημεία της τροχιάς του.

Για την γωνία έχουμε

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1} \left(\frac{0.44 \text{ m/s}^2}{-0.62 \text{ m/s}^2} \right) = -35^\circ.$$

Ωστόσο, αυτή η γωνία που είναι το αποτέλεσμα της αριθμομηχανής, σημαίνει ότι στο Σχ. 4-8 η $\vec{a}$ κατευθύνεται δεξιά και προς τα κάτω. Αλλά, εμείς γνωρίζουμε από τις συνιστώσες ότι η $\vec{a}$ θα πρέπει να κατευθύνεται αριστερά και προς τα πάνω. Για να βρούμε την άλλη γωνία που έχει την ίδια εφαπτομένη με αυτή των -35° , αλλά δεν δίνεται από την αριθμομηχανή, προσθέτουμε 180° :

$$-35^\circ + 180^\circ = 145^\circ. (\text{Απάντηση})$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι συνεπές με τις συνιστώσες του $\vec{a}$. Σημειώστε ότι η $\vec{a}$ έχει το ίδιο μέτρο και κατεύθυνση σε κάθε σημείο της τροχιάς του κουνελιού επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή, εφαρμόζεται η Εξ. 2-11 ($v = v_0 + at$), αλλά θα πρέπει να τη χρησιμοποιήσουμε ξεχωριστά για κίνηση παράλληλη στον άξονα x και για κίνηση παράλληλη στον άξονα y .

υπολογισμοί: Βρίσκουμε τις συνιστώσες v_x και v_y της ταχύτητας από τις εξισώσεις

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{και} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Στις εξισώσεις αυτές, $v_{0x} (= -2.0 \text{ m/s})$ και $v_{0y} (= 4.0 \text{ m/s})$, είναι οι συνιστώσες x και y του $\vec{v}_0$, και a_x και a_y είναι οι συνιστώσες x και y του $\vec{a}$. Για να βρούμε τις a_x και a_y , αναλύουμε το $\vec{a}$ είτε με αριθμομηχανή είτε με την Εξ. 3-5:

$$a_x = a \cos \theta = (3.0 \text{ m/s}^2)(\cos 130^\circ) = -1.93 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = a \sin \theta = (3.0 \text{ m/s}^2)(\sin 130^\circ) = +2.30 \text{ m/s}^2.$$

Όταν αυτές οι τιμές εισαχθούν στις εξισώσεις για τις v_x και v_y βρίσκουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 5.0 \text{ s}$

$$v_x = -2.0 \text{ m/s} + (-1.93 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s}) = -11.65 \text{ m/s},$$

$$v_y = 4.0 \text{ m/s} + (2.30 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s}) = 15.50 \text{ m/s}.$$

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή $t = 5.0 \text{ s}$, έχουμε, μετά από στρογγυλοποίηση,

$$\vec{v} = (-12 \text{ m/s})\hat{i} + (16 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{Απάντηση})$$

Είτε χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή είτε την Εξ. 3-6, βρίσκουμε το μέτρο και τη γωνία του $\vec{v}$ να είναι

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19.4 \approx 19 \text{ m/s} \quad (\text{Απάντηση})$$

$$\text{και} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 127^\circ \approx 130^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

Έλεγχος: Στην οθόνη της αριθμομηχανής σας εμφανίζεται η γωνία 127° ή η -53° ; Τώρα σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{v}$ με τις συνιστώσες του για να δείτε ποια γωνία είναι η λογική απάντηση.

4-5 Πλάγια Βολή

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε μια ειδική περίπτωση κίνησης σε δύο διαστάσεις: ένα σωματίδιο κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο με κάποια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, αλλά η επιτάχυνσή του είναι πάντοτε η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης $\vec{g}$, η οποία έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Ένα τέτοιο σωματίδιο ονομάζεται **βλήμα** (με την έννοια ότι εκτοξεύεται), και η κίνησή του ονομάζεται **πλάγια βολή**. Βλήμα μπορεί να είναι μια μπάλα του τένις (Σχ. 4-9) ή του μπέιζμπολ, αλλά όχι ένα αεροπλάνο ή μια πάπια που πετάει. Πολλά σπορ (από το γκολφ και το ποδόσφαιρο έως το λακρός και το racquetball) περιλαμβάνουν τη βολή κάποιας μπάλας και καταβάλλεται μεγάλη προσπάθεια να ελεγχθεί αυτή η κίνηση, ώστε ο παίκτης να έχει το πλεονέκτημα. Για παράδειγμα, ο παίκτης του racquetball που επινόησε το Z-shot τη δεκαετία του 1970 κέρδιζε εύκολα τα παιχνίδια του γιατί η παράξενη πτήση της μπάλας προς το πίσω μέρος του γηπέδου πάντα μπερδευε τους αντιπάλους του.

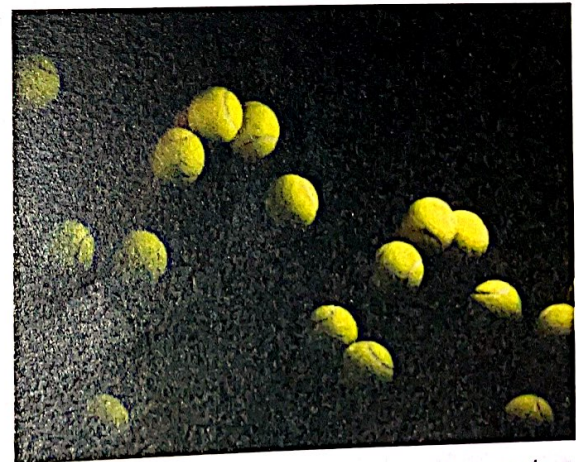
Σκοπός μας εδώ είναι να αναλύσουμε την κίνηση του βλήματος χρησιμοποιώντας τα εργαλεία για την διδιάστατη κίνηση που περιγράψαμε στις Παραγράφους 4-2 έως 4-4 και υποθέτοντας ότι ο αέρας δεν έχει καμία επίδραση στο βλήμα. Το Σχήμα 4-10, το οποίο αναλύεται στην επόμενη παράγραφο, δείχνει την τροχιά που ακολουθεί ένα βλήμα όταν ο αέρας δεν έχει καμία επίδραση. Το βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ που μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \quad (4-19)$$

Στη συνέχεια οι συνιστώσες v_{0x} και v_{0y} μπορούν να υπολογιστούν αν γνωρίζουμε τη γωνία θ_0 μεταξύ της $\vec{v}_0$ και της θετικής κατεύθυνσης του x :

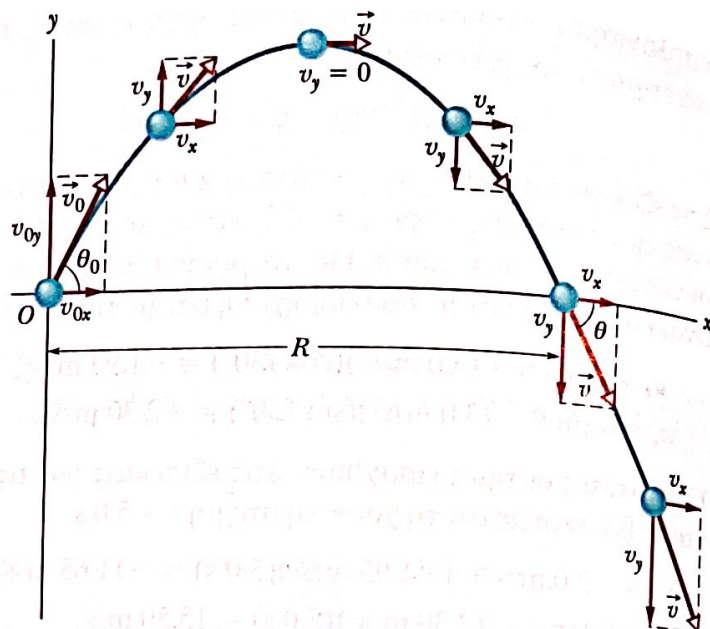
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{και} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (4-20)$$

Κατά τη διάρκεια της διδιάστατης κίνησης του βλήματος, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και το διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v}$ μεταβάλλονται συνεχώς, αλλά το διάνυσμα επιτάχυνσης $\vec{a}$ παραμένει σταθερό και κατευθύνεται πάντοτε κατακόρυφα προς τα κάτω. Το βλήμα δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση.



ΣΧΗΜΑ 4-9 Στροβοσκοπική φωτογραφία μιας κίτρινης μπάλας του τένις που αναπηδά σε σκληρή επιφάνεια. Η μπάλα εκτελεί πλάγια βολή μεταξύ των προσκρούσεων. Πηγή: Richard Megna/Fundamental Photographs.

ΣΧΗΜΑ 4-10 Η τροχιά ενός βλήματος που εκτοξεύεται από το $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$. Φαίνονται η αρχική ταχύτητα, οι ταχύτητες σε διάφορα σημεία της τροχιάς του βλήματος, καθώς και οι συνιστώσες τους. Σημειώστε ότι η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερή ωστόσο η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας μεταβάλλεται διαρκώς. Το βεληνεκές R είναι η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει το βλήμα όταν επιστρέφει στο ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε.



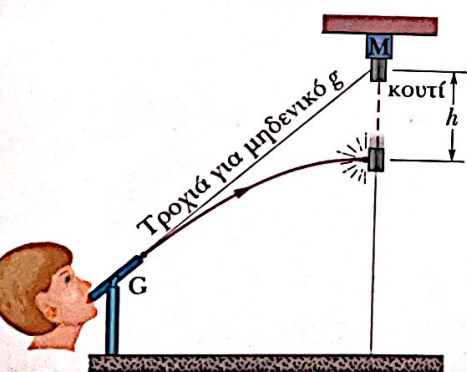
Η κίνηση ενός βλήματος, όπως αυτή στα Σχήματα 4-9 και 4-10, φαίνεται πολύπλοκη, αλλά υπάρχει το εξής χαρακτηριστικό (γνωστό από το πείραμα) που απλοποιεί την κατάσταση:

➔ Στην πλάγια βολή, η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη, δηλαδή η μία κίνηση δεν επηρεάζει την άλλη.

Αυτό το χαρακτηριστικό μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε ένα πρόβλημα διδιάστατης κίνησης σε δύο ξεχωριστά και ευκολότερα προβλήματα μονοδιάστατης κίνησης, ένα για την οριζόντια (με μηδενική επιτάχυνση) κι ένα για την κατακόρυφη (με σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω). Παρουσιάζουμε δύο πειράματα που δείχνουν ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι ανεξάρτητες.

Δύο Μπάλες του Γκολφ

Το Σχήμα 4-11 δείχνει μια στροβοσκοπική φωτογραφία με δύο μπάλες του γκολφ, μιας που απλά αφήνεται και μιας που εκτοξεύεται οριζόντια με ένα ελατήριο. Οι μπάλες έχουν την ίδια κατακόρυφη κίνηση, πέφτοντας και οι δύο κατά την ίδια κατακόρυφη απόσταση στο ίδιο χρονικό διάστημα. Το γεγονός ότι η μια μπάλα κινείται οριζόντια καθώς πέφτει δεν επηρεάζει την κατακόρυφη κίνησή της. Δηλαδή, η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη.



ΣΧΗΜΑ 4-12 Η μπίλια-βλήμα χτυπά πάντα το κουτί που πέφτει. Και οι δύο πέφτουν διανύοντας απόσταση h από εκεί που θα βρισκόνταν αν δεν υπήρχε η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης.

Κάτι που Εξάπτει τους Φοιτητές

Το Σχήμα 4-12 παρουσιάζει μια επίδειξη που έχει ζωντανέψει πολλές διαλέξεις φυσικής. Περιλαμβάνει ένα φουσητήρα G που χρησιμοποιεί μια μπίλια τη M και ο σωλήνας του φουσητήρα στοχεύει απευθείας στο κουτί. Το πείραμα ρυθμίζεται έτσι ώστε ο μαγνήτης να ελευθερώνει το κουτί μόλις η μπίλια φύγει από τον φουσητήρα.

Αν το g (το μέτρο της επιτάχυνσης της ελεύθερης πτώσης) ήταν μηδέν, η μπίλια θα ακολουθούσε την ευθύγραμμη διαδρομή που φαίνεται στο Σχ. 4-12

και το κουτί θα αιωρούνταν στη θέση του αφότου το ελευθέρωσε ο μαγνήτης. Η μπίλια θα χτυπούσε σίγουρα το κουτί.

Ωστόσο, το g δεν είναι μηδέν, αλλά η μπίλια χτυπά και πάλι το κουτί! Όπως δείχνει το Σχ. 4-12, κατά τη διάρκεια της κίνησης της μπίλιας, τόσο η μπίλια, όσο και το κουτί, διανύουν την ίδια απόσταση h από τις θέσεις που θα είχαν για μηδενικό g . Όσο πιο δυνατά φυσάει αυτός που εκτελεί το πείραμα, τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα της μπίλιας, τόσο μικρότερη η διάρκεια της κίνησης και τόσο μικρότερη είναι η τιμή του h .



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3

Κάποια χρονική στιγμή, μια μπάλα του μπέιζμπολ έχει ταχύτητα $\vec{v} = 25\hat{i} - 4.9\hat{j}$ (ο άξονας x είναι οριζόντιος, ο άξονας y είναι προς τα πάνω και η $\vec{v}$ είναι σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Έχει περάσει η μπάλα από το υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

4-6 Ανάλυση της Πλάγιας Βολής

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αναλύσουμε την κίνηση ενός βλήματος, τόσο την οριζόντια, όσο και την κατακόρυφη.

Οριζόντια Κίνηση

Επειδή δεν υπάρχει επιτάχυνση στην οριζόντια κατεύθυνση, η οριζόντια συνιστώσα v_x της ταχύτητας του βλήματος παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική της τιμή v_{0x} καθόλη τη διάρκεια της κίνησης, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-13. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t η οριζόντια μετατόπιση του βλήματος $x - x_0$ από την αρχική θέση x_0 δίνεται από την Εξ. 2-15 με $a = 0$, την οποία γράφουμε ως

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Επειδή $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-21)$$

Κατακόρυφη Κίνηση

Η κατακόρυφη κίνηση είναι η κίνηση που μελετήσαμε στην Παρ. 2-9 για σωματίδιο σε ελεύθερη πτώση. Το πιο σημαντικό είναι ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή. Συνεπώς, εφαρμόζονται οι εξισώσεις του Πίνακα 2-1 εφόσον αντικαταστήσουμε με $-g$ το a και αλλάξουμε τον συμβολισμό σε y . Τότε, για παράδειγμα, η Εξ. 2-15 γίνεται

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \quad (4-22)$$

όπου η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας v_{0y} αντικαθίσταται με την ισοδύναμη $v_0 \sin \theta_0$. Παρομοίως, οι Εξισώσεις 2-11 και 2-16 γίνονται

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (4-23)$$

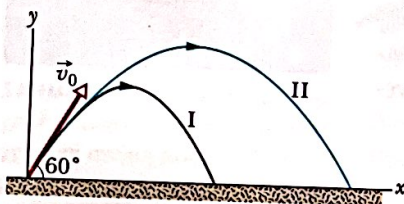
και

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-24)$$

Όπως φαίνεται στο Σχ. 4-10 και από την Εξ. 4-23, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας συμπεριφέρεται όπως ακριβώς κι εκείνη μιας μπάλας που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Κατευθύνεται αρχικά προς τα πάνω και το μέτρο της μειώνεται σταθερά μέχρι να μηδενιστεί, το οποίο συμβαίνει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς. Τότε, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας αλλάζει κατεύθυνση ενώ το μέτρο της αυξάνει με την πάροδο του χρόνου.



ΣΧΗΜΑ 4-13 Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας αυτού του σκέιτερ αλλάζει αλλά όχι η οριζόντια συνιστώσα, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα του σκέιτμπορντ. Συνεπώς η σανίδα του σκέιτμπορντ μένει από κάτω του, επιτρέποντάς του να προσγειωθεί πάνω της. Πηγή: *Jamie Budge/Liaison/Getty Images, Inc.*



ΣΧΗΜΑ 4-14 (I) Η τροχιά μιας μπάλας του μπίτζμπολ υπολογιζόμενη λαμβάνοντας υπόψη την αντίσταση του αέρα. (II) Η τροχιά που θα ακολουθούσε η μπάλα στο κενό, υπολογιζόμενη με τις μεθόδους αυτού του κεφαλαίου. Βλ. Πίνακα 4-1 για τα αντίστοιχα δεδομένα. (Προσαρμοσμένο από το «The Trajectory of a Fly Ball» του Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1

Δύο Μπάλες του Μπίτζμπολ*

	Διαδρομή I (Αέρας)	Διαδρομή II (Κενό)
Βεληνικές	98.5 m	177 m
Μέγιστο ύψος	53.0 m	76.8 m
Χρόνος Πτήσης	6.6 s	7.9 s

* Βλ. Σχ. 4-14. Η γωνία εκτόξευσης είναι 60° και η ταχύτητα βολής 44.7 m/s.

Η Εξίσωση της Τροχιάς

Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση του δρόμου που ακολουθεί το βλήμα (της τροχιάς του) απαλείφοντας τον χρόνο t μεταξύ των Εξισώσεων 4-21 και 4-22. Επιλύοντας την Εξ. 4-21 ως προς t και αντικαθιστώντας στην Εξ. 4-22, παίρνουμε, μετά από μια μικρή αναδιάταξη,

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad (\text{τροχιά}). \quad (4-25)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της τροχιάς, που φαίνεται στο Σχ. 4-10. Κατά την απόδειξη αυτής της εξίσωσης για απλότητα θέσαμε $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$ στις Εξισώσεις 4-21 και 4-22, αντίστοιχα. Επειδή τα g , θ_0 και v_0 είναι σταθερά, η Εξ. 4-25 είναι της μορφής $y = ax + bx^2$, όπου a και b σταθερές. Αυτή δεν είναι παρά η εξίσωση παραβολής, συνεπώς η τροχιά είναι παραβολική.

Βεληνικές

Το βεληνικές R του βλήματος, όπως δείχνει το Σχ. 4-10, είναι η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει το βλήμα όταν επιστρέφει στο αρχικό του ύψος (ύψος εκτόξευσης). Για να βρούμε το βεληνικές R , ας θέσουμε $x - x_0 = R$ στην Εξ. 4-21 και $y - y_0 = 0$ στην Εξ. 4-22, παίρνοντας

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

και

$$0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t μεταξύ αυτών των δύο εξισώσεων, έχουμε

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$ (βλ. Παράρτημα E), παίρνουμε

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4-26)$$

Προσοχή: η εξίσωση αυτή δεν δίνει την οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα όταν το τελικό ύψος δεν είναι το ύψος εκτόξευσης.

Σημειώστε ότι το R στην Εξ. 4-26 παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν $\sin 2\theta_0 = 1$, το οποίο αντιστοιχεί σε $2\theta_0 = 90^\circ$ ή $\theta_0 = 45^\circ$.

➔ Το βεληνικές R είναι μέγιστο για γωνία βολής ίση με 45° .

Ωστόσο, όταν το ύψος εκτόξευσης και προσγείωσης διαφέρουν, όπως στη σφαιροβολία, τη σφυροβολία και το μάσκατ, γωνία εκτόξευσης 45° δεν οδηγεί στη μέγιστη οριζόντια απόσταση.

Η Επίδραση του Αέρα

Έχουμε υποθέσει ότι ο αέρας μέσα στον οποίο κινείται το βλήμα δεν έχει επίδραση στην κίνησή του. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, η ασυμφωνία μεταξύ των υπολογισμών μας και της πραγματικής κίνησης του βλήματος μπορεί να είναι μεγάλη γιατί ο αέρας αντιστέκεται (αντιτίθεται) στην κίνηση. Το Σχήμα 4-14, για παράδειγμα, δείχνει δύο τροχιές μιας μπάλας του

μπέιζμπολ που αφήνει το ρόπαλο υπό γωνία 60° ως προς την οριζόντια κατεύθυνση και αρχική ταχύτητα 44.7 m/s . Η τροχιά I (η τροχιά της μπάλας από τον παίκτη του μπέιζμπολ) έχει υπολογιστεί να είναι τέτοια ώστε να προσεγγίζει τις κανονικές συνθήκες του παιχνιδιού, στον αέρα. Η τροχιά II (η τροχιά της μπάλας από τον καθηγητή φυσικής) είναι η τροχιά που θ' ακολουθούσε η μπάλα στο κενό.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4 Μια μπάλα του μπέιζμπολ προσκρούει στο εξωτερικό τμήμα του γηπέδου. Κατά την πτήση της (αγνοήστε την επίδραση του αέρα), τι συμβαίνει (α) στην οριζόντια και (β) στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς της; Πόση είναι (γ) η οριζόντια και (δ) η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσής της, κατά την κάθοδο και στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-6 Αναπτύξτε τις ικανότητές σας

Στο Σχ. 4-15, ένα αεροπλάνο διάσωσης πετά με 198 km/h ($= 55.0 \text{ m/s}$) σε σταθερό ύψος $h = 500 \text{ m}$ προς ένα σημείο ακριβώς πάνω από τον ναυαγό, όπου και πρόκειται να προσγειωθεί κάψουλα με εξοπλισμό διάσωσης.

(α) Πόση πρέπει να είναι η γωνία ϕ της ευθείας οπτικής επαφής του πιλότου με τον ναυαγό όταν ελευθερώνεται η κάψουλα;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Όταν ελευθερωθεί, η κάψουλα είναι ένα βλήμα και συνεπώς η οριζόντια και κατακόρυφη κίνησή της μπορούν να εξεταστούν ξεχωριστά (δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε την ακριβή καμπύλη τροχιά της κάψουλας).

Υπολογισμοί: Στο Σχ. 4-15 βλέπουμε ότι η ϕ δίνεται από τη σχέση

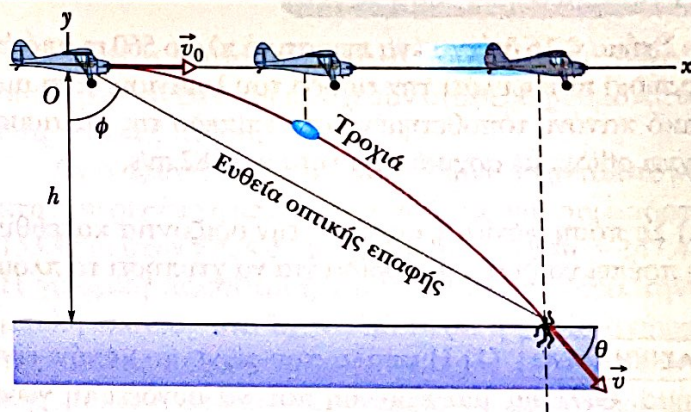
$$\phi = \tan^{-1} \frac{x}{h}, \quad (4-27)$$

όπου x είναι η οριζόντια συντεταγμένη του ναυαγού (και της κάψουλας όταν αυτή προσκρούει το νερό) και $h = 500 \text{ m}$. Πρέπει να μπορούμε να βρούμε το x με την Εξ. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-28)$$

Εδώ γνωρίζουμε ότι $x_0 = 0$ γιατί η αρχή των αξόνων τοποθετείται στο σημείο ελευθέρωσης της κάψουλας. Επειδή η κάψουλα αφήνεται και δεν εκτοξεύεται από το αεροπλάνο, η αρχική της ταχύτητα $\vec{v}_0$ είναι ίση με την ταχύτητα του αεροπλάνου. Συνεπώς, γνωρίζουμε επίσης ότι η αρχική ταχύτητα έχει μέτρο $v_0 = 55.0 \text{ m/s}$ και γωνία $\theta_0 = 0^\circ$ (μετρημένη ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x). Οστόσο, δεν ξέρουμε τον χρόνο t που απαιτείται για να φτάσει η κάψουλα από το αεροπλάνο στον ναυαγό.

Επομένως, για να βρούμε τον χρόνο t , θεωρούμε



ΣΧΗΜΑ 4-15 Ένα αεροπλάνο ρίχνει κάψουλα με εξοπλισμό διάσωσης καθώς κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σταθερό ύψος. Καθώς πέφτει, η κάψουλα παραμένει ακριβώς κάτω από το αεροπλάνο.

την κατακόρυφη κίνηση και ειδικότερα την Εξ. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4-29)$$

Εδώ, η κατακόρυφη μετατόπιση $y - y_0$ της κάψουλας είναι -500 m (η αρνητική τιμή σημαίνει ότι η κάψουλα κινείται προς τα κάτω). Συνεπώς,

$$-500 \text{ m} = (55.0 \text{ m/s})(\sin 0^\circ)t - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Επιλύοντας ως προς t , βρίσκουμε $t = 10.1 \text{ s}$. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή στην Εξ. 4-28 έχουμε

$$x - 0 = (55.0 \text{ m/s})(\cos 0^\circ)(10.1 \text{ s}),$$

$$\text{ή} \quad x = 555.5 \text{ m}.$$

Τότε η Εξ. 4-27 μας δίνει

$$\phi = \tan^{-1} \frac{555.5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 48.0^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

(β) Όταν η κάψουλα φτάνει στο νερό, πόση είναι η ταχύτητά της $\vec{v}$, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και σε συμβολισμό μέτρου-γωνίας;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: (1) Η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της κάψουλας είναι ανεξάρτητες. (2) Η συνιστώσα v_x δεν μεταβάλλεται από την αρχική της τιμή $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ γιατί δεν υπάρχει οριζόντια επιτάχυνση. (3) Η συνιστώσα v_y αλλάζει από την αρχική της τιμή $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$ γιατί υπάρχει κατακόρυφη επιτάχυνση.

Υπολογισμοί: Όταν η κάψουλα φτάνει στο νερό,

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (55.0 \text{ m/s})(\cos 0^\circ) = 55.0 \text{ m/s}.$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-23 και το χρόνο πτώσης

της κάψουλας $t = 10.1 \text{ s}$, βρίσκουμε ότι όταν η κάψουλα φτάνει στο νερό,

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt \\ &= (55.0 \text{ m/s})(\sin 0^\circ) - (9.8 \text{ m/s}^2)(10.1 \text{ s}) \\ &= -99.0 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (4-30)$$

Συνεπώς, στο νερό

$$\vec{v} = (55.0 \text{ m/s})\hat{i} - (99.0 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{Απάντηση})$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. 3-6, βρίσκουμε ότι το μέτρο και η γωνία της $\vec{v}$ είναι

$$v = 113 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad \theta = -60.9^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-7

Το Σχήμα 4-16 δείχνει ένα πειρατικό πλοίο 560 m από ένα φρούριο που φυλάει την είσοδο του λιμανιού. Ένα αμυντικό κανόνι, τοποθετημένο στο επίπεδο της θάλασσας, ρίχνει οβίδες με αρχική ταχύτητα $v_0 = 82 \text{ m/s}$.

(α) Σε πόση γωνία θ_0 ως προς την οριζόντια κατεύθυνση πρέπει να ριχτεί μια οβίδα για να χτυπήσει το πλοίο;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: (1) Η μπάλα που ρίχνει το κανόνι είναι βλήμα. Θέλουμε μια εξίσωση που να συνδέει τη γωνία βολής θ_0 με την οριζόντια μετατόπιση της μπάλας καθώς αυτή κινείται από το κανόνι προς το πλοίο. (2) Επειδή το κανόνι και το πλοίο βρίσκονται στο ίδιο ύψος, η οριζόντια μετατόπιση είναι το βεληνεκές.

Υπολογισμοί: Μπορούμε να συνδέσουμε τη γωνία βολής θ_0 με το βεληνεκές R μέσω της Εξ. 4-26 ($R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0$), η οποία, μετά από αναδιάταξη, δίνει

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(560 \text{ m})}{(82 \text{ m/s})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sin^{-1} 0.816. \end{aligned} \quad (4-31)$$

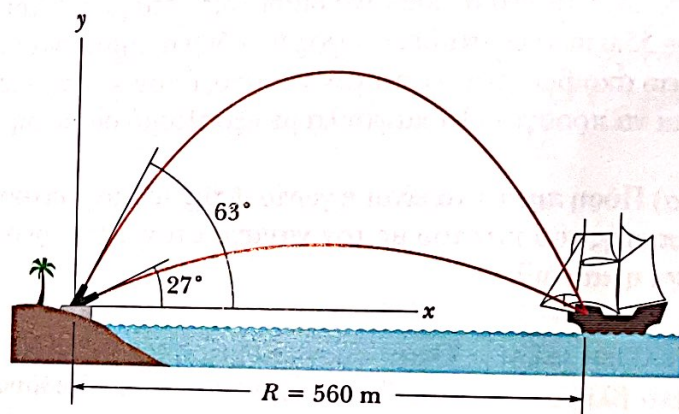
Μια λύση του $\sin^{-1} (54.7^\circ)$ δίνεται από αριθμομηχανή. Την αφαιρούμε από τις 180° για να πάρουμε την άλλη λύση (125.3°). Συνεπώς, η Εξ. 4-31 μας δίνει

$$\theta_0 = 27^\circ \quad \text{και} \quad \theta_0 = 63^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-8

Υποθέστε ότι ένας παίκτης του μπέιζμπολ B χτυπάει με το ρόπαλο τη μπάλα προς το εξωτερικό τμήμα του γηπέδου και απευθείας προς τον αμυντικό F , με ταχύτητα

βολής $v_0 = 40 \text{ m/s}$ και γωνία βολής $\theta_0 = 35^\circ$. Κατά την πτήση, η ευθεία από τον αμυντικό προς την μπάλα σχηματίζει γωνία ϕ με το έδαφος. Να κάνετε το διάγραμμα



ΣΧΗΜΑ 4-16 Κανόνι στην ξηρά βάλλει κατά πειρατικού πλοίου.

(β) Πόσο είναι το μέγιστο βεληνεκές των βλημάτων του κανονιού;

Υπολογισμοί: Έχουμε δει ότι το μέγιστο βεληνεκές αντιστοιχεί σε γωνία ανύψωσης θ_0 ίση με 45° . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(82 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} \sin (2 \times 45^\circ) \\ &= 686 \text{ m} \approx 690 \text{ m}. \end{aligned}$$

(Απάντηση)

Καθώς το πειρατικό πλοίο αποπλέει, οι δύο γωνίες ανύψωσης στις οποίες το πλοίο είναι τρωτό, σχεδιασμένες μαζί, σταδιακά συγκλίνουν στη $\theta_0 = 45^\circ$ όταν το πλοίο βρεθεί 690 m μακριά. Πέραν αυτής της απόστασης το πλοίο είναι ασφαλές.

της γωνίας ανύψωσης ϕ ως προς τον χρόνο t , υποθέτοντας ότι, ο αμυντικός βρίσκεται ήδη σε κατάλληλη θέση για να πιάσει τη μπάλα, βρίσκεται 6.0 m πλησιέστερα στον παίκτη B και τέλος βρίσκεται 6.0 m πιο μακριά.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

(1) Αν παραλείψουμε την αντίσταση του αέρα, η μπάλα είναι ένα βλήμα για το οποίο η κατακόρυφη και η οριζόντια κίνηση μπορούν να αναλυθούν χωριστά. (2) Υποθέτοντας ότι η μπάλα πιάνεται περίπου στο ύψος απ' όπου εκτοξεύεται, η οριζόντια απόσταση που διανύει η μπάλα είναι το βεληνεκές R , που δίνεται από την Εξ. 4-26 ($R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0$).

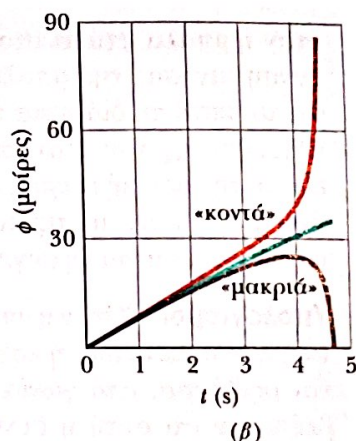
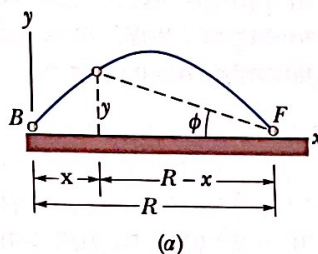
Υπολογισμοί: Η μπάλα μπορεί να πιαστεί αν η απόσταση του αμυντικού από τον παίκτη με το ρόπαλο που χτυπά τη μπάλα είναι ίση με το βεληνεκές της μπάλας. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-26, βρίσκουμε

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(40 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} \sin (70^\circ) = 153.42 \text{ m}. \quad (4-32)$$

Το Σχήμα 4-17α δείχνει ένα στιγμιότυπο της μπάλας σε πτήση, όταν η μπάλα βρίσκεται σε ύψος y και οριζόντια απόσταση x από τον παίκτη που ρίχνει τη μπάλα (ο οποίος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων). Η οριζόντια απόσταση της μπάλας από το εξωτερικό τμήμα του γηπέδου είναι $R - x$ και η γωνία ανύψωσης ϕ της μπάλας στο οπτικό πεδίο του αμυντικού δίνεται από την σχέση $\tan \phi = y/(R - x)$. Για το ύψος y χρησιμοποιούμε την Εξ. 4-22 ($y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$), θέτοντας $y_0 = 0$. Για την οριζόντια απόσταση x την αντικαθιστούμε με την Εξ. 4-21 ($x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t$), θέτοντας $x_0 = 0$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $v_0 = 40 \text{ m/s}$ και $\theta_0 = 35^\circ$, έχουμε

$$\phi = \tan^{-1} \frac{(40 \sin 35^\circ)t - 4.9t^2}{153.42 - (40 \cos 35^\circ)t}. \quad (4-33)$$

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης ως προς το χρόνο t δίνει τη μεσαία καμπύλη στο Σχ. 4-17β. Βλέ-



ΣΧΗΜΑ 4-17 Η γωνία ανύψωσης ϕ για μια μπάλα του μπέιζμπολ που ρίχνεται προς έναν αμυντικό όπως (α) ορίζεται και (β) παριστάνεται γραφικά ως προς το χρόνο t .

πουμε ότι η γωνία της μπάλας στο οπτικό πεδίο του αμυντικού αυξάνεται με σχεδόν σταθερό ρυθμό κατά τη διάρκεια της πτήσης.

Αν ο αμυντικός βρίσκεται 6.0 m πιο κοντά στον παίκτη που ρίχνει τη μπάλα, αντικαθιστούμε την απόσταση 153.42 m στην Εξ. 4-33 με $153.42 \text{ m} - 6.0 \text{ m} = 147.42 \text{ m}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνει την καμπύλη «κοντά» στο Σχ. 4-17β. Τώρα η γωνία ανύψωσης της μπάλας αυξάνεται γρήγορα προς το τέλος της πτήσης καθώς η μπάλα υψώνεται πάνω από το κεφάλι του αμυντικού. Αν ο αμυντικός βρίσκεται 6.0 m πιο μακριά από τον παίκτη που ρίχνει τη μπάλα, αντικαθιστούμε την απόσταση 153.42 m στην Εξ. 4-33 με 159.42 m. Η καμπύλη που προκύπτει σημειώνεται με την ένδειξη «μακριά» στο σχήμα: η γωνία αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται γρήγορα. Έτσι, αν μια μπάλα βάλλεται απευθείας προς ένα αμυντικό παίκτη, ο παίκτης μπορεί να αποφασίσει από την αλλαγή της γωνίας ϕ της μπάλας αν θα μείνει σταθερός, αν θα τρέξει προς το μέρος του παίκτη που πετά τη μπάλα ή αν θα απομακρυνθεί από αυτόν.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-9

Αναπτύξτε τις ικανότητές σας

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ μια μπάλα του γκολφ εκτοξεύεται από το επίπεδο του εδάφους στον αέρα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-18α. Η γωνία θ μεταξύ της κατεύθυνσης κίνησης της μπάλας και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x δίνεται στο Σχ. 4-18β ως συνάρτηση του χρόνου t . Η μπάλα προσγειώνεται την χρονική στιγμή $t = 6.00 \text{ s}$. Πόσο είναι το μέτρο v_0 της ταχύτητας εκτόξευσης της μπάλας, σε πόσο ύψος ($y - y_0$) πάνω από το επίπεδο εκτόξευσης προσγειώνεται η μπάλα και

ποια είναι η κατεύθυνση κίνησης της μπάλας τη στιγμή που προσγειώνεται;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

(1) Η μπάλα είναι ένα βλήμα, και συνεπώς η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση μπορούν να θεωρηθούν ξεχωριστά. (2) Η οριζόντια συνιστώσα $v_x (= v_0 \cos \theta_0)$ της ταχύτητας της μπάλας δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της πτήσης. (3) Η κατακόρυφη συνιστώσα v_y της ταχύτητάς της μεταβάλλεται και είναι μηδέν

όταν η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος. (4) Η κατεύθυνση κίνησης της μπάλας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της πτήσης είναι η γωνία της κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v}$ της ταχύτητάς της εκείνη τη χρονική στιγμή. Αυτή η γωνία δίνεται από τη σχέση $\theta = v_y/v_x$, με τις συνιστώσες της ταχύτητας να υπολογίζονται για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

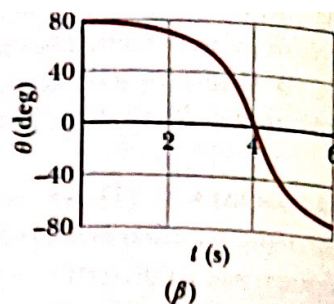
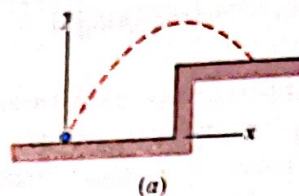
Υπολογισμοί: Όταν η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος της, $v_y = 0$. Συνεπώς, η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}$ είναι οριζόντια, υπό γωνία $\theta = 0^\circ$. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι αυτή η συνθήκη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 4.0$ s. Βλέπουμε επίσης ότι η γωνία εκτόξευσης θ_0 (τη χρονική στιγμή $t = 0$) είναι 80° . Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-23 ($v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$), με $t = 4.0$ s, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\theta_0 = 80^\circ$ και $v_y = 0$, βρίσκουμε

$$v_0 = 39.80 \approx 40 \text{ m/s.} \quad (\text{Απάντηση})$$

Η μπάλα προσγειώνεται τη χρονική στιγμή $t = 6.00$ s. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-22 ($y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$) με $t = 6.00$ s, παίρνουμε

$$y - y_0 = 58.77 \text{ m} \approx 59 \text{ m.} \quad (\text{Απάντηση})$$

Ακριβώς τη χρονική στιγμή που η μπάλα προσγειώνει-



ΣΧΗΜΑ 4-18 (α) Η τροχιά μιας μπάλας του γκολφ που εκτοξεύεται προς ένα πλάτωμα. (β) Η γωνία θ της κατεύθυνσης της κίνησης της μπάλας κατά τη διάρκεια της πτήσης ως συνάρτηση του χρόνου t .

ται, η οριζόντια ταχύτητά της είναι ακόμη $v_0 \cos \theta_0$. Η αντικατάσταση της v_0 και της θ_0 μας δίνει $v_x = 6.911 \text{ m/s}$. Βρίσκουμε την κατακόρυφη ταχύτητα αυτή τη χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας την Εξ. 4-23 ($v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$) με $t = 6.00$ s, που οδηγεί στην $v_y = -19.60 \text{ m/s}$. Συνεπώς, η γωνία της κατεύθυνσης κίνησης της μπάλας τη στιγμή της προσγείωσης είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{-19.60 \text{ m/s}}{6.911 \text{ m/s}} \approx -71^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

4-7 Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Ένα σωματίδιο εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση** όταν κινείται σε κύκλο ή κυκλικό τόξο με σταθερή (ομοιόμορφη) αριθμητική ταχύτητα. Παρόλο που το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει, το σωματίδιο επιταχύνεται γιατί αλλάζει η κατεύθυνση της ταχύτητας.

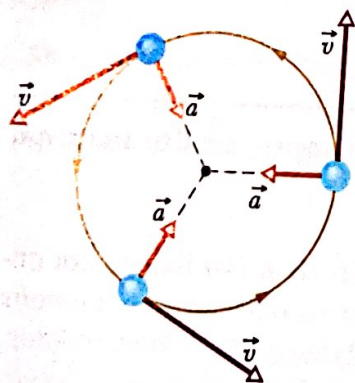
Το Σχήμα 4-19 δείχνει τη σχέση μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης σε διάφορα στάδια ομαλής κυκλικής κίνησης. Και τα δύο διανύσματα έχουν σταθερό μέτρο, αλλά η κατεύθυνσή τους μεταβάλλεται διαρκώς. Η ταχύτητα έχει πάντοτε κατεύθυνση που εφάπτεται στον κύκλο, στην κατεύθυνση της κίνησης. Η επιτάχυνση κατευθύνεται πάντοτε ακτινικά προς τα μέσα. Εξαιτίας αυτού, η επιτάχυνση που σχετίζεται με την ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται **κεντρομόλος** (που σημαίνει «από την περιφέρεια προς το κέντρο»). Όπως θ' αποδείξουμε στη συνέχεια, το μέτρο αυτής της επιτάχυνσης είναι

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (\text{κεντρομόλος επιτάχυνση}), \quad (4-34)$$

όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου και v το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Επιπρόσθετα, κατά τη διάρκεια αυτής της επιτάχυνσης με ταχύτητα σταθερού μέτρου, το σωματίδιο διαγράφει την περιφέρεια του κύκλου (απόσταση $2\pi r$) σε χρόνο

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{περίοδος}). \quad (4-35)$$



ΣΧΗΜΑ 4-19 Τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση.

Η T ονομάζεται περίοδος της περιστροφής, ή απλά περίοδος της κίνησης. Είναι, γενικά, ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελέσει το σωματίδιο ακριβώς μια πλήρη περιφορά.

Απόδειξη της Εξ. 4-34

Για να βρούμε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση, θεωρούμε το Σχ. 4-20. Στο Σχ. 4-20α, το σωματίδιο p κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v σε κύκλο ακτίνας r . Την χρονική στιγμή που φαίνεται, το p έχει συντεταγμένες x_p και y_p .

Θυμηθείτε από την Παράγραφο 4-3 ότι η ταχύτητα $\vec{v}$ ενός κινούμενου σωματιδίου είναι πάντοτε εφαπτόμενη στη τροχιά του σωματιδίου στο σημείο που βρίσκεται αυτό. Στο Σχ. 4-20α αυτό σημαίνει ότι η $\vec{v}$ είναι κάθετη στην ακτίνα r που σχεδιάζεται στη θέση του σωματιδίου. Τότε η γωνία θ που σχηματίζει η $\vec{v}$ με μία κάθετη στο p ισούται με την γωνία θ που σχηματίζει η ακτίνα r με τον άξονα x .

Οι βαθμωτές συνιστώσες της $\vec{v}$ φαίνονται στο Σχ. 4-20β. Με αυτές μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα $\vec{v}$ ως

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}. \quad (4-36)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχ. 4-20α, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sin \theta$ με y_p/r και το $\cos \theta$ με x_p/r για να γράψουμε

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r} \right) \hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r} \right) \hat{j}. \quad (4-37)$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση $\vec{a}$ του σωματιδίου p πρέπει να πάρουμε τη χρονική παράγωγο αυτής της εξίσωσης. Παρατηρώντας ότι το μέτρο της ταχύτητας v και η ακτίνα r δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, παίρνουμε

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j}. \quad (4-38)$$

Προσέξτε τώρα ότι ο ρυθμός μεταβολής dy_p/dt του y_p είναι ίσος με τη συνιστώσα v_y της ταχύτητας. Ομοίως, $dx_p/dt = v_x$ και, πάλι από το Σχ. 4-20β, βλέπουμε ότι $v_x = -v \sin \theta$ και $v_y = v \cos \theta$. Κάνοντας αυτές τις αντικαταστάσεις στην Εξ. 4-38, βρίσκουμε

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{j}. \quad (4-39)$$

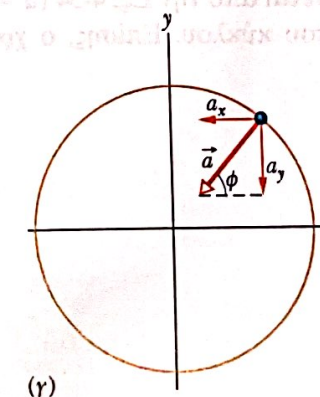
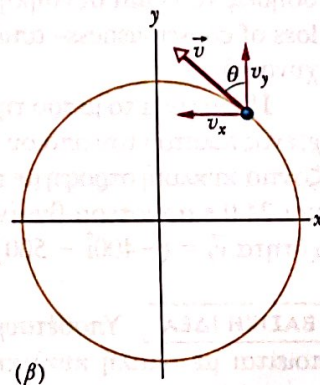
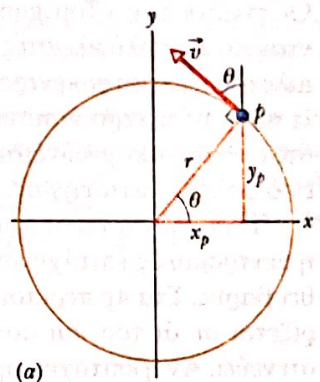
Αυτό το διάνυσμα και οι συνιστώσες του φαίνονται στο Σχ. 4-20γ. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 3-6, βρίσκουμε

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

που θέλαμε να αποδείξουμε. Για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του $\vec{a}$, βρίσκουμε τη γωνία ϕ που φαίνεται στο Σχ. 4-20γ:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \tan \theta.$$

Συνεπώς, $\phi = \theta$, που σημαίνει ότι το $\vec{a}$ έχει κατεύθυνση κατά την ακτίνα r του Σχ. 4-20α, προς το κέντρο του κύκλου, όπως θέλαμε να αποδείξουμε.



ΣΧΗΜΑ 4-20 Το σωματίδιο p κινείται δεξιόστροφα εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. (α) Η θέση του και η ταχύτητά του $\vec{v}$ σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. (β) Η ταχύτητα $\vec{v}$. (γ) Η επιτάχυνση $\vec{a}$.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 5 Ένα αντικείμενο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κυκλική τροχιά στο οριζόντιο επίπεδο xy , με το κέντρο στην αρχή των αξόνων. Όταν το αντικείμενο βρίσκεται στη θέση $x = -2 \text{ m}$, η ταχύτητά του είναι $-(4 \text{ m/s})\hat{j}$. Να δώσετε (α) την ταχύτητα και (β) την επιτάχυνση του σωματιδίου στο $y = 2 \text{ m}$.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-10

Οι πιλότοι του «Top gun» από χρόνια προβληματίζονται για τις πολύ κλειστές στροφές. Καθώς το σώμα του πιλότου υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση, με το κεφάλι προς το κέντρο καμπυλότητας, η πίεση του αίματος στον εγκέφαλο μειώνεται, οδηγώντας σε απώλεια της εγκεφαλικής λειτουργίας.

Υπάρχουν αρκετά προειδοποιητικά σημάδια. Όταν η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $2g$ ή $3g$, ο πιλότος νιώθει βαρύς. Στα $4g$ περίπου, η όραση του πιλότου περιορίζεται σε άσπρο και μαύρο και το οπτικό του πεδίο στενεύει. Αν η επιτάχυνση αυτή διατηρηθεί ή αυξηθεί, η όραση χάνεται και, αμέσως μετά, ο πιλότος χάνει τις αισθήσεις του – μια συνθήκη γνωστή ως $g\text{-LOC}$ ($g\text{-induced loss of consciousness}$ – απώλεια συνείδησης λόγω επιτάχυνσης).

Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης, σε μονάδες του g , ενός πιλότου του οποίου το αεροσκάφος μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = (400\hat{i} + 500\hat{j}) \text{ m/s}$ και 24.0 s αργότερα βγαίνει από τη στροφή με μια ταχύτητα $\vec{v}_f = (-400\hat{i} - 500\hat{j}) \text{ m/s}$;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Υποθέτουμε ότι η στροφή πραγματοποιείται με ομαλή κυκλική κίνηση. Τότε η επιτάχυνση του πιλότου είναι κεντρομόλος και έχει μέτρο που δίνεται από την Εξ. 4-34 ($a = v^2/R$), όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου. Επίσης, ο χρόνος που απαιτείται για να

ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος είναι η περίοδος που δίνεται από την Εξ. 4-35 ($T = 2\pi R/v$).

Υπολογισμοί: Επειδή δεν γνωρίζουμε την ακτίνα R , επιλύουμε την Εξ. 4-35 ως προς R και αντικαθιστούμε στην Εξ. 4-34. Βρίσκουμε

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Εδώ v είναι το (σταθερό) μέτρο της ταχύτητας κατά τη διάρκεια της στροφής. Ας αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας στην Εξ. 3-6:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640.31 \text{ m/s}.$$

Για να βρούμε την περίοδο T της κίνησης, αρχικά σημειώνουμε ότι η τελική ταχύτητα είναι η αντίθετη της αρχικής ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι το αεροσκάφος φεύγει προς την αντίθετη πλευρά του κύκλου από το αρχικό σημείο και άρα πρέπει να έχει ολοκληρώσει το μισό κύκλο στα δοσμένα 24.0 s . Συνεπώς ένας πλήρης κύκλος θα απαιτούσε $T = 48.0 \text{ s}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωσή μας για το a , βρίσκουμε

$$a = \frac{2\pi(640.31 \text{ m/s})}{48.0 \text{ s}} = 83.81 \text{ m/s}^2 \approx 8.6g. \text{ (Απάντηση)}$$

4-8 Σχετική Κίνηση σε Μία Διάσταση

Υποθέστε ότι βλέπετε μια πάπια να πετάει βόρεια με ταχύτητα 30 km/h . Σε μια άλλη πάπια που πετά δίπλα της, η πρώτη πάπια φαίνεται να είναι στάσιμη. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα ενός σωματιδίου εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς εκείνου που παρατηρεί ή μετρά την ταχύτητα. Για τους δικούς μας σκοπούς ένα σύστημα αναφοράς είναι το φυσικό αντικείμενο στο οποίο προσαρτούμε το σύστημα συντεταγμένων μας. Στην καθημερινή ζωή το αντικείμενο αυτό είναι το έδαφος. Για παράδειγμα, η ταχύτητα που αναγράφεται σε μια κλίση για υπερβολική ταχύτητα μετρείται πάντα ως προς το έδαφος. Η ταχύτητα ως προς με τον αστυνομικό θα ήταν διαφορετική αν ο αστυνομικός κινούνταν ενώ πραγματοποιούσε τη μέτρηση της ταχύτητας.

Υποθέστε ότι ο Άλεξ (στην αρχή του συστήματος αναφοράς A στο Σχ. 4-21) έχει σταθμεύσει δίπλα στον αυτοκινητόδρομο, βλέποντας το αυτοκίνητο P (το «σωματίδιο») να επιταχύνει. Η Μπάρμπαρα (στην αρχή του συστήματος αναφοράς B) οδηγεί στον αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα και βλέπει επίσης το αυτοκίνητο P . Υποθέστε ότι και οι δυο μετρούν τη θέση του αυτοκινήτου μια δεδομένη χρονική στιγμή. Από το Σχ. 4-21 βλέπουμε ότι

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \quad (4-40)$$

Η εξίσωση διαβάζεται: «Η συντεταγμένη x_{PA} του P όπως μετρείται από το A είναι ίση με τη συντεταγμένη x_{PB} του P όπως μετρείται από το B συν τη συντεταγμένη x_{BA} του B όπως μετρείται από το A .» Προσέξτε πώς αυτή η ανάλυση υποστηρίζεται από την σειρά των κάτω δεικτών.

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο της Εξ. 4-40, έχουμε

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}).$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες της ταχύτητας συνδέονται με τη σχέση

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (4-41)$$

Αυτή η εξίσωση διαβάζεται ως εξής: «Η ταχύτητα v_{PA} του P όπως μετρείται από το A είναι ίση με την ταχύτητα v_{PB} του P όπως μετρείται από το B συν την ταχύτητα v_{BA} του B όπως μετρείται από το A .» Ο όρος v_{BA} είναι η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς B ως προς το σύστημα αναφοράς A .

Εδώ θεωρούμε μόνο συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο. Στο παράδειγμά μας αυτό σημαίνει ότι η Μπάρμπαρα (σύστημα αναφοράς B) οδηγεί συνεχώς με σταθερή ταχύτητα v_{BA} ως προς τον Άλεξ (σύστημα αναφοράς A). Το αυτοκίνητο P (το κινούμενο σωματίδιο), όμως, μπορεί να αλλάξει ταχύτητα και κατεύθυνση (δηλαδή, μπορεί να επιταχυνθεί).

Για να συνδέσουμε την επιτάχυνση του P όπως μετρείται από την Μπάρμπαρα και από τον Άλεξ, παίρνουμε τη χρονική παράγωγο της Εξ. 4-41:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Επειδή η v_{BA} είναι σταθερή, ο τελευταίος όρος είναι μηδέν και έχουμε

$$a_{PA} = a_{PB}. \quad (4-42)$$

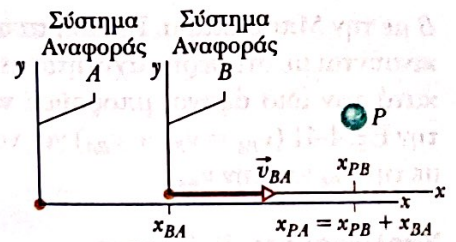
Με άλλα λόγια,

➔ **Παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα ο ένας ως προς τον άλλο θα μετρούν την ίδια επιτάχυνση για ένα κινούμενο σωματίδιο.**

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-11

Στο Σχ. 4-21 υποθέστε ότι η ταχύτητα της Μπάρμπαρα ως προς τον Άλεξ είναι σταθερή και ίση με $v_{BA} = 52$ km/h και ότι το αυτοκίνητο P κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x .

(α) Αν ο Άλεξ μετρά σταθερή ταχύτητα $v_{PA} = -78$ km/h



ΣΧΗΜΑ 4-21 Ο Άλεξ (σύστημα αναφοράς A) και η Μπάρμπαρα (σύστημα αναφοράς B) παρακολουθούν το αυτοκίνητο P καθώς τόσο το B , όσο και το P κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες στον κοινό άξονα x των δύο συστημάτων. Τη χρονική στιγμή του σχήματος, x_{BA} είναι η συντεταγμένη του B στο σύστημα αναφοράς A . Επίσης, το P βρίσκεται στη συντεταγμένη x_{PB} στο σύστημα αναφοράς B και στη συντεταγμένη $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ στο σύστημα αναφοράς A .

για το αυτοκίνητο P , τι ταχύτητα v_{PB} θα μετρήσει η Μπάρμπαρα;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα σύστημα αναφοράς A με τον Άλεξ κι ένα σύστημα αναφοράς

B με την Μπάρμπα. Επειδή τα συστήματα αναφοράς κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο κατά τον ίδιο άξονα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4-41 ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) για να συνδέσουμε την v_{PB} με την v_{PA} και την v_{BA} .

Υπολογισμός: Βρίσκουμε

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

Οπότε,

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}. \quad (\text{Απάντηση})$$

Παρατήρηση: Αν το αυτοκίνητο P συνδεόταν με το αυτοκίνητο της Μπάρμπα με σχοινί τυλιγμένο σε καρούλι, το σχοινί θα ξετυλιγόταν με ταχύτητα 130 km/h καθώς τα δύο αυτοκίνητα θ' απομακρύνονταν.

(β) Αν το αυτοκίνητο P φρενάρει ως προς τον Άλεξ (και συνεπώς ως προς το έδαφος) τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ με σταθερή επιτάχυνση και μέχρι να σταματήσει, πόση είναι η επιτάχυνσή του a_{PA} ως προς τον Άλεξ;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου P ως προς τον Άλεξ, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ταχύτητες του αυτοκινήτου ως προς τον Άλεξ. Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2-11 ($v = v_0 + at$) για να συνδέσουμε την επιτάχυνση με την αρχική και τελική ταχύτητα του P .

Υπολογισμός: Η αρχική ταχύτητα του P ως προς τον

Άλεξ είναι $v_{PA} = -78 \text{ km/h}$ και η τελική ταχύτητα είναι 0 . Συνεπώς,

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}} = 2.2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Απάντηση})$$

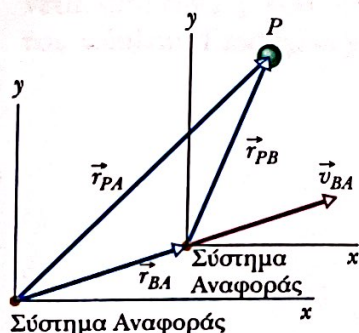
(γ) Πόση είναι η επιτάχυνση a_{PB} του αυτοκινήτου P ως προς την Μπάρμπα κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου P ως προς την Μπάρμπα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ταχύτητες του αυτοκινήτου ως προς την Μπάρμπα.

Υπολογισμός: Γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα του P ως προς την Μπάρμπα από το ερώτημα (α) ($v_{PB} = -130 \text{ km/h}$). Η τελική ταχύτητα του P ως προς την Μπάρμπα είναι -52 km/h (αυτή είναι η ταχύτητα του σταματημένου αυτοκινήτου ως προς την κινούμενη Μπάρμπα). Συνεπώς,

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}} = 2.2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Απάντηση})$$

Σχόλιο: Έπρεπε να έχουμε προβλέψει αυτό το αποτέλεσμα: επειδή ο Άλεξ και η Μπάρμπα έχουν σταθερή σχετική ταχύτητα, πρέπει να μετρήσουν την ίδια επιτάχυνση για το αυτοκίνητο.



ΣΧΗΜΑ 4-22 Το σύστημα αναφοράς B έχει σταθερή διαστάτη ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ ως προς το σύστημα αναφοράς A . Το διάνυσμα θέσης του B ως προς το A είναι $\vec{r}_{BA}$. Τα διανύσματα θέσης του σωματιδίου P είναι $\vec{r}_{PA}$ ως προς το A και $\vec{r}_{PB}$ ως προς το B .

4-9 Σχετική Κίνηση σε Δύο Διαστάσεις

Οι δυο μας παρατηρητές παρακολουθούν και πάλι από την αρχή των συστημάτων αναφοράς A και B ένα κινούμενο σωματίδιο P , καθώς το B κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ ως προς το A . (Οι αντίστοιχοι άξονες αυτών των δύο συστημάτων παρατηρούν παράλληλοι.) Το Σχήμα 4-22 αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή της κίνησης. Εκείνη τη χρονική στιγμή, το διάνυσμα θέσης της αρχής του B ως προς την αρχή του A είναι $\vec{r}_{BA}$. Επίσης, τα διανύσματα θέσης του σωματιδίου P είναι $\vec{r}_{PA}$ ως προς την αρχή του A και $\vec{r}_{PB}$ ως προς την αρχή του B . Από τη διάταξη τέλος-αρχής αυτών των τριών διανυσμάτων θέσης, μπορούμε να τα συνδέσουμε με την

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \quad (4-43)$$

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο αυτής της εξίσωσης, μπορούμε να συνδέσουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_{PA}$ και $\vec{v}_{PB}$ του σωματιδίου P ως προς τους παρατηρητές μας:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \quad (4-44)$$

Παίρνοντας τη χρονική παράγωγο αυτής της σχέσης, μπορούμε να συνδέσουμε τις επιταχύνσεις $\vec{a}_{PA}$ και $\vec{a}_{PB}$ του σωματιδίου P ως προς τους παρατηρητές μας. Ωστόσο, σημειώστε ότι επειδή η $\vec{v}_{BA}$ είναι σταθερή, η χρονική της παράγωγος είναι μηδέν. Συνεπώς, παίρνουμε

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4-45)$$

Όπως και στη μονοδιάστατη κίνηση, έχουμε τον ακόλουθο κανόνα: παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο μετρούν την ίδια επιτάχυνση για κινούμενο σωματίδιο.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-12

Στο Σχ. 4-23α, ένα αεροπλάνο κινείται ανατολικά ενώ ο πιλότος στρέφει το αεροπλάνο κάπως νότια της ανατολικής κατεύθυνσης, αντίθετα σ' έναν βορειοανατολικό άνεμο. Το αεροπλάνο έχει ταχύτητα $\vec{v}_{PW}$ ως προς τον άνεμο, με αριθμητική ταχύτητα (αριθμητική ταχύτητα ως προς τον άνεμο) 215 km/h, που κατευθύνεται σε γωνία θ βόρεια της ανατολής. Ο άνεμος έχει ταχύτητα $\vec{v}_{WG}$ ως προς το έδαφος με τιμή 65.0 km/h και κατευθύνεται 20.0° ανατολικά του βορρά. Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_{PG}$ του αεροπλάνου ως προς το έδαφος και πόση είναι η θ ;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Το πρόβλημα είναι σαν αυτό του Σχ. 4-22. Εδώ το κινούμενο σωματίδιο P είναι το αεροπλάνο, το σύστημα αναφοράς A αντιστοιχεί στο έδαφος (το ονομάζουμε G) και το σύστημα αναφοράς B «αντιστοιχεί» στον άνεμο (το ονομάζουμε W). Χρειαζόμαστε ένα διανυσματικό διάγραμμα όπως αυτό του Σχ. 4-22 αλλά με τρία διανύσματα ταχύτητας.

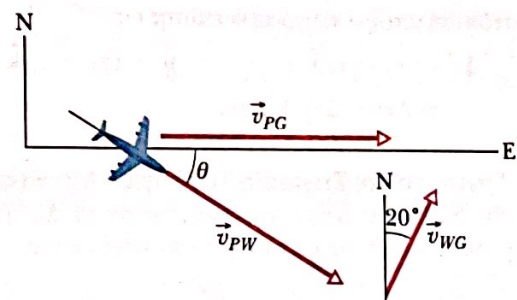
Υπολογισμοί: Αρχικά κατασκευάζουμε μια πρόταση να συνδέει τα τρία διανύσματα που φαίνονται στο Σχ. 4-23β:

$$\begin{array}{l} \text{ταχύτητα} \\ \text{του αεροπλάνου} \\ \text{ως προς} \\ \text{το έδαφος} \\ (PG) \end{array} = \begin{array}{l} \text{ταχύτητα} \\ \text{του αεροπλάνου} \\ \text{ως προς} \\ \text{τον άνεμο} \\ (PW) \end{array} + \begin{array}{l} \text{ταχύτητα} \\ \text{του ανέμου} \\ \text{ως προς} \\ \text{το έδαφος} \\ (WG) \end{array}$$

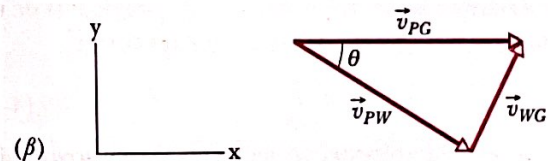
Η σχέση αυτή γράφεται με τη μορφή διανυσμάτων ως

$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PW} + \vec{v}_{WG}. \quad (4-46)$$

Πρέπει να αναλύσουμε τα διανύσματα σε συνιστώσες στο σύστημα συντεταγμένων του Σχ. 4-23β και μετά να λύσουμε την Εξ. 4-46 για κάθε άξονα. Για τις συνιστώσες y βρίσκουμε



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 4-23 Ένα αεροπλάνο που πετάει ενώ φυσάει άνεμος.

$$v_{PG,y} = v_{PW,y} + v_{WG,y}$$

$$\text{ή} \quad 0 = -(215 \text{ km/h}) \sin \theta + (65.0 \text{ km/h})(\cos 20.0^\circ).$$

Η επίλυση ως προς θ μας δίνει

$$\theta = \sin^{-1} \frac{(65.0 \text{ km/h})(\cos 20.0^\circ)}{215 \text{ km/h}} = 16.5^\circ. \quad (\text{Απάντηση})$$

Ομοίως, για τις συνιστώσες x βρίσκουμε

$$v_{PG,x} = v_{PW,x} + v_{WG,x}$$

Εδώ, επειδή η $\vec{v}_{PG}$ είναι παράλληλη στον άξονα x , η συνιστώσα $v_{PG,x}$ είναι ίση με το μέτρο v_{PG} . Αντικαθιστώντας αυτό το συμβολισμό και την τιμή $\theta = 16.5^\circ$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} v_{PG} &= (215 \text{ km/h})(\cos 16.5^\circ) + (65.0 \text{ km/h})(\sin 20.0^\circ) \\ &= 228 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΟΨΗ

Διάνυσμα Θέσης Η θέση ενός σωματιδίου ως προς την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, το οποίο σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (4-1)$$

Εδώ $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ και $z\hat{k}$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ και x , y και z είναι οι βαθμωτές του συνιστώσες (όπως επίσης και οι συντεταγμένες του σωματιδίου). Το διάνυσμα θέσης περιγράφεται είτε από το μέτρο και μια ή δύο γωνίες για τον προσανατολισμό, είτε από τις διανυσματικές ή τις βαθμωτές συνιστώσες του.

Μετατόπιση Αν ένα σωματίδιο κινείται έτσι ώστε το διάνυσμα θέσης του να μεταβάλλεται από $\vec{r}_1$ σε $\vec{r}_2$, η μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ του σωματιδίου είναι

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4-2)$$

Η μετατόπιση μπορεί να γραφεί επίσης ως

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (4-3)$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (4-4)$$

Μέση Ταχύτητα και Στιγμιαία Ταχύτητα Αν ένα σωματίδιο μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{r}$ σε χρονικό διάστημα Δt , η μέση ταχύτητά του $\vec{v}_{\text{avg}}$ γι' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4-8)$$

Καθώς το Δt στην Εξ. 4-8 τείνει στο 0, η $\vec{v}_{\text{avg}}$ συγκλίνει σε ένα όριο που λέγεται ή ταχύτητα ή στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (4-10)$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί σε συμβολισμό των μοναδιαίων διανυσμάτων ως

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (4-11)$$

όπου $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ και $v_z = dz/dt$. Η στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$ ενός σωματιδίου έχει κατεύθυνση πάντοτε κατά την εφαπτομένη της τροχιάς του σωματιδίου, στη θέση που βρίσκεται.

Μέση Επιτάχυνση και Στιγμιαία Επιτάχυνση Αν η ταχύτητα ενός σωματιδίου μεταβάλλεται από $\vec{v}_1$ σε $\vec{v}_2$ σε χρονικό διάστημα Δt , η μέση επιτάχυνσή του κατά το διάστημα Δt είναι

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (4-15)$$

Καθώς το Δt στην Εξ. 4-15 τείνει στο 0, η $\vec{a}_{\text{avg}}$ συγκλίνει σε μια οριακή τιμή που λέγεται επιτάχυνση ή στιγμιαία επιτάχυνση $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4-16)$$

Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad (4-17)$$

όπου $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ και $a_z = dv_z/dt$.

Πλάγια Βολή Η πλάγια βολή είναι η κίνηση ενός σωματιδίου

που εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$. Κατά την πτήση του, η οριζόντια επιτάχυνση του σωματιδίου είναι μηδέν και η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης $-g$. (Παίρνουμε τη θετική κατεύθυνση να είναι προς τα πάνω.) Αν η $\vec{v}_0$ εκφράζεται ως μέτρο (η αριθμητική ταχύτητα v_0) και γωνία θ_0 (μετρημένη ως προς την οριζόντια κατεύθυνση), οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στον οριζόντιο άξονα x και στον κατακόρυφο άξονα y είναι

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \quad (4-21)$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (4-22)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt, \quad (4-23)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-24)$$

Η τροχιά (διαδρομή) ενός σωματιδίου στην πλάγια βολή είναι παραβολική και δίνεται από την σχέση

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}, \quad (4-25)$$

αν τα x_0 και y_0 στις Εξ. 4-21 έως 4-24 είναι μηδέν. Το οριζόντιο βεληνεκές του σωματίου R , το οποίο είναι η οριζόντια απόσταση από το σημείο βολής ως το σημείο που το σωματίδιο επιστρέφει στο αρχικό ύψος βολής, είναι

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4-26)$$

Ομαλή Κυκλική Κίνηση Αν ένα σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή κυκλικό τόξο ακτίνας r με ταχύτητα σταθερού μέτρου v , λέμε ότι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και έχει επιτάχυνση $\vec{a}$ σταθερού μέτρου

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4-34)$$

Η κατεύθυνση της $\vec{a}$ είναι προς το κέντρο του κύκλου ή του κυκλικού τόξου και η $\vec{a}$ λέγεται κεντρομόλος. Ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσει το σωματίδιο ένα κύκλο είναι

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4-35)$$

Η T ονομάζεται περίοδος της περιστροφής, ή απλά περίοδος της κίνησης.

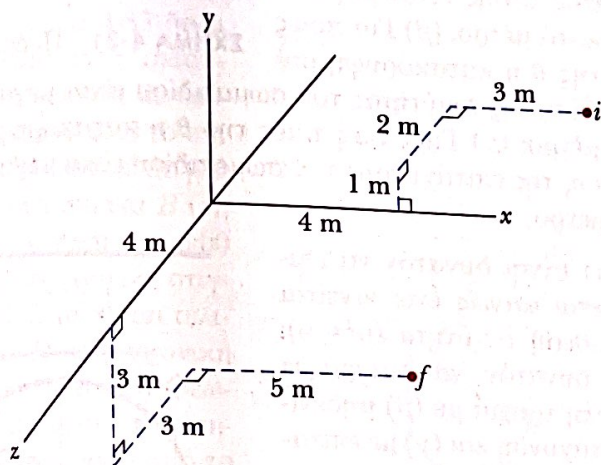
Σχετική Κίνηση Όταν δύο συστήματα αναφοράς A και B κινούνται το ένα ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα, η ταχύτητα ενός σωματιδίου P όπως μετριέται από παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς A συνήθως διαφέρει από αυτή που μετριέται στο σύστημα αναφοράς B . Οι δύο ταχύτητες συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \quad (4-44)$$

όπου $\vec{v}_{BA}$ είναι η ταχύτητα του B ως προς το A . Και οι δύο παρατηρητές μετρούν την ίδια επιτάχυνση για το σωματίδιο:

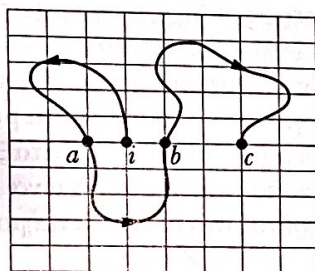
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4-45)$$

1 Το Σχήμα 4-24 δείχνει την αρχική θέση i και την τελική θέση f ενός σωματιδίου. Πόσο είναι (α) το αρχικό διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ και (β) το τελικό διάνυσμα θέσης $\vec{r}_f$, και τα δύο σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων; (γ) Πόση είναι η συνιστώσα x της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$;



ΣΧΗΜΑ 4-24 Ερώτηση 1.

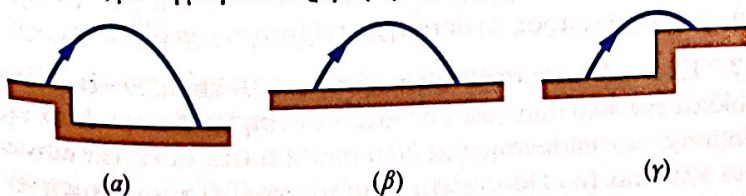
2 Το Σχήμα 4-25 δείχνει τη διαδρομή που ακολουθεί ένα κουνάβι ψάχνοντας για τροφή ανάμεσα σε σκουπίδια, ξεκινώντας από το αρχικό σημείο i . Το κουνάβι χρειάστηκε τον ίδιο χρόνο T για να πάει από κάθε σημειωμένο σημείο στο επόμενο, κατά μήκος της τροχιάς του. Ταξινομήστε τα σημεία a , b και c σύμφωνα με το μέτρο της μέσης ταχύτητας του κουναβιού από το αρχικό σημείο σε καθένα από αυτά, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.



ΣΧΗΜΑ 4-25 Ερώτηση 2.

3 Πρόκειται να εκτοξεύσετε μια ρουκέτα, από σημείο μόλις πάνω από το έδαφος, με κάποιο από τα ακόλουθα διανύσματα αρχικής ταχύτητας: (1) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$, (2) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$, (3) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$, (4) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. Στο δικό σας σύστημα συντεταγμένων το x είναι παράλληλο στο επίπεδο του εδάφους και το y αυξάνει προς τα πάνω. (α) Κατατάξτε τα διανύσματα σύμφωνα με το μέτρο της ταχύτητας, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη. (β) Κατατάξτε τα διανύσματα σύμφωνα με το χρόνο πτήσης της ρουκέτας, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.

4 Το Σχήμα 4-26 δείχνει τρεις περιπτώσεις στις οποίες ίδια βλήματα εκτοξεύονται (στο ίδιο επίπεδο) με ίδιες αρχικές ταχύτητες και γωνίες. Ωστόσο, τα βλήματα δεν προσγειώνονται στο ίδιο επίπεδο. Κατατάξτε τις περιπτώσεις σύμφωνα με τις τελικές ταχύτητες των βλημάτων ακριβώς πριν προσγειωθούν, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.

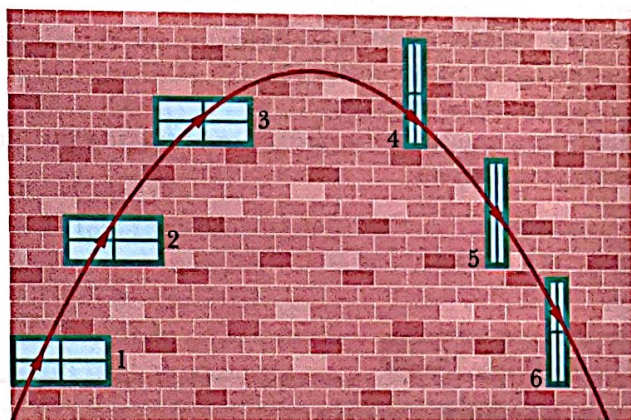


ΣΧΗΜΑ 4-26 Ερώτηση 4.

5 Όταν το Παρίσι βομβαρδίστηκε στον Πρώτο Παγκόσμιο Πόλεμο με το πυροβόλο μεγάλου βεληνικού «Big Bertha», τα βλήματα εκτοξεύονταν με γωνία μεγαλύτερη των 45° , έτσι ώστε να έχουν μεγαλύτερο βεληνικό, ακόμα και διπλάσιο από αυτό των 45° . Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι η πυκνότητα του αέρα αυξάνει ή ότι μειώνεται σε μεγάλο υψόμετρο;

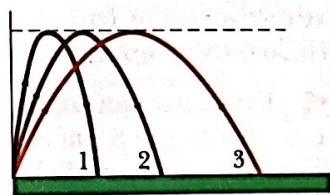
6 Στο Σχ. 4-27 ένα μανταρίνι ρίχνεται προς τα πάνω περνώντας έξω από τα παράθυρα 1, 2 και 3, τα οποία είναι ίδια σε μέγεθος και ομοιόμορφα κατανεμημένα στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Κατατάξτε τα τρία παράθυρα σύμφωνα με (α) το χρόνο που κάνει το μανταρίνι να τα περάσει και (β) τη μέση ταχύτητα (μέτρο) του μανταρινιού κατά το πέρασμά του, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.

Στη συνέχεια το μανταρίνι κινείται προς τα κάτω, περνώντας από τα παράθυρα 4, 5 και 6, τα οποία είναι ίδια σε μέγεθος και ανομοιόμορφα κατανεμημένα στην οριζόντια κατεύθυνση. Κατατάξτε τα τρία παράθυρα σύμφωνα με (γ) το χρόνο που κάνει το μανταρίνι να τα περάσει και (δ) τη μέση ταχύτητα (μέτρο) του μανταρινιού κατά το πέρασμα, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.



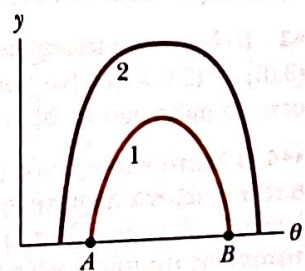
ΣΧΗΜΑ 4-27 Ερώτηση 6.

7 Το Σχήμα 4-28 δείχνει τρεις τροχιές μιας μπάλας ποδοσφαίρου που κλοτσιείται από το επίπεδο του εδάφους. Αγνοώντας την επίδραση του αέρα, κατατάξτε τις τροχιές σύμφωνα με (α) το χρόνο πτήσης, (β) την αρχική κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, (γ) την αρχική οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας και (δ) την αρχική ταχύτητα, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.



ΣΧΗΜΑ 4-28 Ερώτηση 7.

8 Η μόνη χρησιμότητα ενός κέικ φρούτων είναι στην εξάσκηση χρήσης καταπέλτη. Η καμπύλη 1 του Σχ. 4-29 δίνει το ύψος y ενός τέτοιου κέικ που ρίχτηκε με καταπέλτη ως συνάρτηση της γωνίας θ μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητάς του και του διανύσματος της επιτάχυνσής του κατά τη διάρκεια

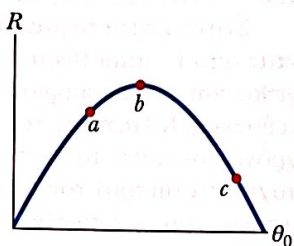


ΣΧΗΜΑ 4-29 Ερώτηση 8.

της πτήσης. (α) Ποιο από τα δύο σημεία, σημειωμένα στην καμπύλη με τα αντίστοιχα γράμματα, αντιστοιχεί στην προσγείωση του κέικ στο έδαφος; (β) Η καμπύλη 2 είναι ένα παρόμοιο διάγραμμα για την ίδια ταχύτητα βολής αλλά για διαφορετική γωνία εκτόξευσης. Το κέικ προσγειώνεται τώρα πιο κοντά ή πιο μακριά από το σημείο εκτόξευσης;

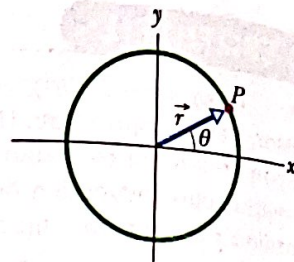
9 Ένα αεροπλάνο που πετά οριζόντια με σταθερή ταχύτητα 350 km/h πάνω από το επίπεδο του εδάφους ελευθερώνει δέμα με προμήθειες τροφίμων. Αγνοήστε την επίδραση του αέρα στο δέμα. Πόση είναι η αρχική (α) κατακόρυφη και (β) οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του δέματος; (γ) Πόση είναι η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας ακριβώς πριν το δέμα χτυπήσει στο έδαφος; (δ) Αν η ταχύτητα του αεροπλάνου ήταν 450 km/h, ο χρόνος πτώσης θα ήταν μεγαλύτερος, μικρότερος ή ο ίδιος;

10 Μια μπάλα ρίχνεται από το επίπεδο του εδάφους προς τα πάνω με συγκεκριμένη αρχική ταχύτητα. Το Σχήμα 4-30 δίνει το βεληνεκές R της μπάλας ως προς τη γωνία εκτόξευσης θ_0 . Κατατάξτε τα τρία σημεία που σημειώνονται με τα αντίστοιχα γράμματα στο διάγραμμα σύμφωνα με (α) το συνολικό χρόνο πτήσης της μπάλας και (β) την ταχύτητα της μπάλας στο μέγιστο ύψος, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.



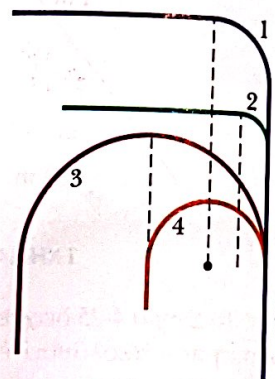
ΣΧΗΜΑ 4-30 Πρόβλημα 10.

11 Στο Σχ. 4-31, το σωματίδιο P εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων xy . (α) Για ποιες τιμές της θ η κατακόρυφη συνιστώσα r_y του διανύσματος θέσης είναι μεγαλύτερη, κατά μέτρο; (β) Για ποιες τιμές της θ η κατακόρυφη συνιστώσα v_y της ταχύτητας του σωματιδίου είναι μεγαλύτερη, κατά μέτρο; (γ) Για ποιες τιμές της θ η κατακόρυφη συνιστώσα a_y της επιτάχυνσης του σωματιδίου είναι μεγαλύτερη, κατά μέτρο;



ΣΧΗΜΑ 4-31 Πρόβλημα 11.

12 (α) Είναι δυνατόν να επιταχύνεται κανείς ενώ κινείται με σταθερή ταχύτητα (μέτρο); Είναι δυνατόν να διαγράψει καμπύλη τροχιά με (β) μηδενική επιτάχυνση και (γ) με επιτάχυνση σταθερού μέτρου;



ΣΧΗΜΑ 4-32 Πρόβλημα 12.

13 Το Σχήμα 4-32 δείχνει τέσσερις σιδηροτροχιές (είτε ημικύκλια είτε τεταρτοκύκλια) στις οποίες μπορεί να κινηθεί κάποιο τρένο, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Κατατάξτε τις σιδηροτροχιές σύμφωνα με το μέτρο της επιτάχυνσης του τρένου στο καμπύλο τμήμα, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Παρ. 4-2 Θέση και Μετατόπιση

•1 Ποζιτρόνιο μετατοπίζεται κατά $\Delta \vec{r} = 2.0\hat{i} - 3.0\hat{j} + 6.0\hat{k}$, καταλήγοντας με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = 3.0\hat{i} - 4.0\hat{k}$, σε μέτρα. Πόσο ήταν το αρχικό διάνυσμα θέσης του ποζιτρονίου;

•2 Ένα κουκούτσι καρπουζιού έχει τις εξής συντεταγμένες: $x = -5.0$ m, $y = 8.0$ m και $z = 0$ m. Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του, (α) σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και σε συμβολισμό (β) μέτρου και (γ) γωνίας, ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . (δ) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα σε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Αν το κουκούτσι μετακινηθεί στις xyz συντεταγμένες (3.00 m, 0 m, 0 m), πόση είναι η μετατόπισή του (ε) σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και σε συμβολισμό (στ) μέτρου και (ζ) γωνίας, ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $\hat{i}$;

•3 Το διάνυσμα θέσης για ένα ηλεκτρόνιο είναι $\vec{r} = (5.0)\hat{i} - (3.0)\hat{j} + (2.0)\hat{k}$. (α) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{r}$. (β) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα σε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

••4 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού τοίχου έχει μήκος 10 cm, από τον άξονα περιστροφής του μέχρι την «μύτη» του. Θέλουμε να βρούμε το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος μετατόπισης της μύτης για τρία χρονικά διαστήματα. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της μετατόπισης από

τη στιγμή «και τέταρτο» μέχρι τη στιγμή «και μισή»; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία της μετατόπισης για την επόμενη μισή ώρα; (ε) Πόσο είναι το μέτρο και (στ) πόση είναι η γωνία της μετατόπισης για την αμέσως επόμενη ώρα;

Παρ. 4-3 Μέση Ταχύτητα και Στιγμαία Ταχύτητα

•5 Το διάνυσμα θέσης ενός ιόντος αρχικά είναι $\vec{r} = 5.0\hat{i} - 6.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$ και 10 s αργότερα είναι $\vec{r} = -2.0\hat{i} + 8.0\hat{j} - 2.0\hat{k}$, όλα σε μέτρα. Πόση είναι η $\vec{v}_{\text{avg}}$ για το διάστημα των 10 s, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων;

•6 Η θέση ενός ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση $\vec{r} = 3.000\hat{i} - 4.000t^2\hat{j} - 2.00\hat{k}$, με τον χρόνο t σε δευτερόλεπτα και το διάνυσμα $\vec{r}$ σε μέτρα. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου $\vec{v}(t)$, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων; Τη χρονική στιγμή $t = 2.00$ s, πόση είναι η $\vec{v}$ (β) σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και σε συμβολισμό (γ) μέτρου και (δ) γωνίας, ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x ;

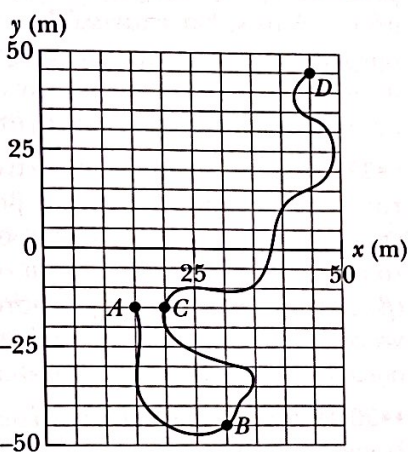
•7 Ένα τρένο, με σταθερή ταχύτητα 60.0 km/h, κινείται ανατολικά για 40.0 min, μετά σε κατεύθυνση 50.0° ανατολικά της βορινής κατεύθυνσης για 20.0 min και στη συνέχεια δυτικά για 50.0 min. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της μέσης ταχύτητάς του γι' αυτή τη διαδρομή;

••8 Ένα αεροπλάνο πετά 483 km ανατολικά από την πόλη A στην πόλη B σε 45.0 min και στη συνέχεια 966 km νότια από την πόλη B στην πόλη C σε 1.50 h. Για τη συνολική διαδρομή, (α) πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση της μετατόπισης του αεροπλάνου, (γ) το μέτρο και (δ) η κατεύθυνση της μέσης ταχύτητάς του, και (ε) η μέση αριθμητική ταχύτητά του;

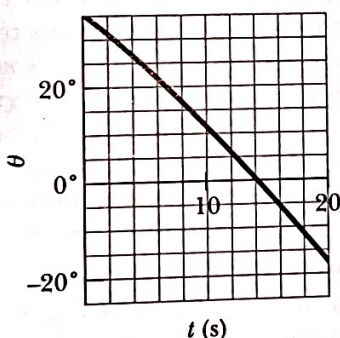
••9 Το Σχήμα 4-33 δίνει την τροχιά ενός σκίουρου που κινείται σε επίπεδο έδαφος, από το σημείο A (τη χρονική στιγμή $t = 0$), στα σημεία B (τη χρονική στιγμή $t = 5.00$ min), C (τη χρονική στιγμή $t = 10.0$ min) και τελικά στο D (τη χρονική στιγμή $t = 15.0$ min). Θεωρήστε τις μέσες ταχύτητες του σκίουρου από το σημείο A έως καθένα από τα υπόλοιπα τρία σημεία.

Από αυτές, (α) πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της ταχύτητας με το μικρότερο μέτρο και (γ) το μέτρο και (δ) η γωνία της ταχύτητας με το μεγαλύτερο μέτρο;

••10 Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = 5.00\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$ δίνει τη θέση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου t . Το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι σε μέτρα, ο χρόνος t είναι σε δευτερόλεπτα και οι παράγοντες e και f είναι σταθερές. Το Σχήμα 4-34 δίνει τη γωνία θ της κατεύθυνσης κίνησης του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου t (η θ μετριέται από τη θετική κατεύθυνση x). Πόσο είναι (α) το e και (β) το f , συμπεριλαμβανομένων των μονάδων;



ΣΧΗΜΑ 4-33 Πρόβλημα 9.



ΣΧΗΜΑ 4-34 Πρόβλημα 10.

Παρ. 4-4 Μέση Επιτάχυνση και Στιγμασία Επιτάχυνση

•11 Σωματίδιο κινείται έτσι ώστε η θέση του (σε μέτρα) ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα) να είναι $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + kt\hat{k}$. Να γράψετε τις εκφράσεις για (α) την ταχύτητά του και (β) την επιτάχυνσή του, ως συνάρτηση του χρόνου.

•12 Ένα πρωτόνιο αρχικά έχει ταχύτητα $\vec{v} = 4.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ και στη συνέχεια, 4.0 s αργότερα, έχει $\vec{v} = -2.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 5.0\hat{k}$ (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Γι' αυτό το διάστημα των 5.0 s, (α) πόση είναι η μέση επιτάχυνση του πρωτονίου σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, (β) πόσο είναι το μέτρο της $\vec{a}_{avg}$ και (γ) πόση είναι η γωνία μεταξύ της $\vec{a}_{avg}$ και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x ;

•13 Η θέση $\vec{r}$ ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy δίνεται από τη σχέση $\vec{r} = (2.00t^3 - 5.00t)\hat{i} - (6.00t - 7.00t^4)\hat{j}$, με το $\vec{r}$ σε μέτρα και τον χρόνο t σε δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε (α) το $\vec{r}$, (β) το $\vec{v}$ και (γ) το $\vec{a}$ σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων για τη χρονική στιγμή $t = 2.00$ s. (δ) Πό-

ση είναι η γωνία μεταξύ της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x και της εφαπτόμενης ευθείας στην τροχιά του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.00$ s;

•14 Κάποια χρονική στιγμή ένας ποδηλάτης βρίσκεται 40.0 m ανατολικά του ιστού μιας σημαίας σε κάποιο πάρκο και κινείται νότια με ταχύτητα 10.0 m/s. Στη συνέχεια, 30.0 s αργότερα, ο ποδηλάτης βρίσκεται 40.0 m βόρεια του ιστού, κινούμενος ανατολικά με ταχύτητα 10.0 m/s. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση της μετατόπισης του ποδηλάτη γι' αυτό το χρονικό διάστημα των 30.0 s; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση της μέσης ταχύτητας του ποδηλάτη; (ε) Πόσο είναι το μέτρο και (στ) ποια είναι η κατεύθυνση της μέσης επιτάχυνσης του ποδηλάτη;

••15 Ένα καρότσι σπρώχνεται στο επίπεδο xy με συνιστώσες επιτάχυνσης $a_x = 4.0 \text{ m/s}^2$ και $a_y = -2.0 \text{ m/s}^2$. Η αρχική του ταχύτητα έχει συνιστώσες $v_{0x} = 8.0 \text{ m/s}$ και $v_{0y} = 12 \text{ m/s}$. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόση είναι η ταχύτητα του καροτσιού όταν φτάνει στη μέγιστη συντεταγμένη του y ;

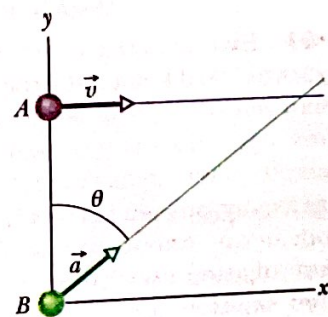
••16 Ένας μέτριος άνεμος επιταχύνει ένα χαλίκι στο οριζόντιο επίπεδο xy με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = (5.00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (7.00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα είναι $(4.00 \text{ m/s}^2)\hat{i}$. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της ταχύτητάς του όταν έχει μετατοπιστεί κατά 12.0 m παράλληλα στον άξονα x ;

••17 Σωματίδιο ξεκινά από την αρχή των αξόνων με αρχική ταχύτητα $\vec{v} = (3.00\hat{i}) \text{ m/s}$ και σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = (-1.00\hat{i} - 0.500\hat{j}) \text{ m/s}^2$. Όταν φτάνει στη μέγιστη συντεταγμένη του x , πόση είναι (α) η ταχύτητά του και (β) το διάνυσμα θέσης του;

••18 Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy δίνεται από τη σχέση $\vec{v} = (6.0t - 6.0t^2)\hat{i} + 8.0\hat{j}$, με το $\vec{v}$ σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο και τον χρόνο $t (> 0)$ σε δευτερόλεπτα. (α) Πόση είναι η επιτάχυνση την χρονική στιγμή $t = 3.0$ s; (β) Πότε (και αν) γίνεται η επιτάχυνση μηδέν; (γ) Πότε (και αν) γίνεται η ταχύτητα μηδέν; (δ) Πότε (και αν) είναι η ταχύτητα ίση με 10 m/s;

•••19 Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο xy δίνεται από τη σχέση $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, όπου η $\vec{a}$ είναι σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο και το $t (> 0)$ σε δευτερόλεπτα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το διάνυσμα $\vec{r} = (2.00 \text{ m})\hat{i} + (40.0 \text{ m})\hat{j}$ προσδιορίζει τη θέση του σωματιδίου, το οποίο εκείνη τη στιγμή έχει διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v} = (5.00 \text{ m/s})\hat{i} + (2.00 \text{ m/s})\hat{j}$. Τη στιγμή $t = 4.00$ s, (α) πόσο είναι το διάνυσμα θέσης σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και (β) πόση είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης κίνησης και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x ;

•••20 Στο Σχ. 4-35, το σωματίδιο A κινείται στην ευθεία $y = 30 \text{ m}$ με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ που έχει μέτρο 3.0 m/s και είναι παράλληλη στον άξονα x . Τη χρονική στιγμή που το σωματίδιο A περνά τον άξονα y , το σωματίδιο B ξεκινά από την αρχή των αξόνων με μηδενική αρχική ταχύτητα και σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$ μέτρου 0.40 m/s^2 .

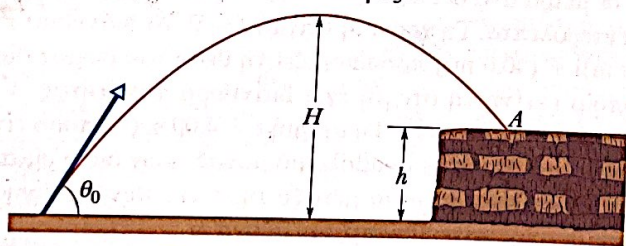


ΣΧΗΜΑ 4-35 Πρόβλημα 20.

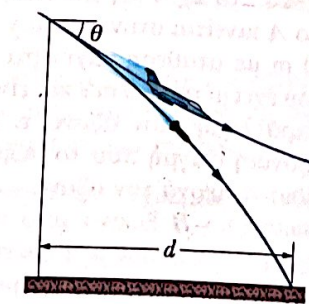
Ποια τιμή της γωνίας θ μεταξύ του $\vec{a}$ και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα y θα είχε σαν αποτέλεσμα τη σύγκρουση;

Παρ. 4-6 Ανάλυση της Πλάγιας Βολής

- 21 Βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια από όπλο που βρίσκεται 45.0 m πάνω από επίπεδο έδαφος, εξερχόμενο από το όπλο με ταχύτητα 250 m/s. (α) Για πόσο χρόνο παραμένει το βλήμα στον αέρα; (β) Σε πόση οριζόντια απόσταση από το σημείο βολής χτυπά στο έδαφος; (γ) Πόσο είναι το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητάς του καθώς χτυπά στο έδαφος;
- 22 Το 1991, στο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Στίβου στο Τόκιο, ο Mike Powell πήδηξε 8.95 m, σπάζοντας κατά 5 ολόκληρα εκατοστά το παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα εις μήκος που κατείχε για 23 χρόνια ο Bob Beamon. Υποθέστε ότι η ταχύτητα του Powell κατά την απογείωση ήταν 9.5 m/s (περίπου ίση με αυτή ενός σπρίντερ) και ότι στο Τόκιο $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. Πόσο μικρότερο ήταν το βεληνεκές του Powell από το μέγιστο δυνατό βεληνεκές σωματιδίου που εκτοξεύεται με την ίδια ταχύτητα;
- 23 Το παγκόσμιο ρεκόρ άλματος με μοτοσυκλέτα είναι 77.0 m και ανήκει στον Jason Renie. Υποθέστε ότι εγκατέλειψε τη ράμπα με γωνία 12.0° ως προς την οριζόντια κατεύθυνση και ότι τα ύψη απογείωσης και προσγείωσης είναι ίσα. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, να βρείτε την ταχύτητα προσγείωσης.
- 24 Μια μικρή μπάλα κυλά οριζόντια και πέφτει από τραπέζι ύψους 1.20 m. Χτυπά στο έδαφος σε σημείο που απέχει οριζόντια 1.52 m από την άκρη του τραπεζιού. (α) Για πόσο χρόνο η μπάλα βρίσκεται στον αέρα; (β) Πόση είναι η ταχύτητά της τη στιγμή που αφήνει το τραπέζι;
- 25 Ένα βελάκι ρίχνεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα 10 m/s προς το σημείο P, το κέντρο στόχου. Χτυπά στο σημείο Q στο άκρο, κατακόρυφα κάτω από το P, 0.19 s αργότερα. (α) Πόση είναι η απόσταση PQ; (β) Πόσο μακριά από το στόχο εκτοξεύεται το βελάκι;
- 26 Στο Σχ. 4-36, μια πέτρα βάλλεται προς την απότομη πλευρά ενός βράχου ύψους h , με αρχική ταχύτητα 42.0 m/s που σχηματίζει γωνία $\theta_0 = 60.0^\circ$ με την οριζόντια κατεύθυνση. Η πέτρα χτυπά στο A, 5.50 s μετά την εκτόξευσή της. Να βρείτε (α) το ύψος h του βράχου, (β) την ταχύτητα της πέτρας ακριβώς πριν την πρόσκρουση στο A και (γ) το μέγιστο ύψος H που φτάνει η πέτρα πάνω από το έδαφος.



ΣΧΗΜΑ 4-36 Πρόβλημα 26.



ΣΧΗΜΑ 4-37 Πρόβλημα 27.

- 27 Ένα αεροπλάνο έχει ταχύτητα 290.0 km/h και εφορμά υπό γωνία $\theta = 30.0^\circ$ κάτω από τον ορίζοντα όταν ο πιλότος ελευθερώνει συσκευή παραπλάνησης ραντάρ (Σχ. 4-37). Η οριζόντια απόσταση μεταξύ του σημείου ελευθέρωσης και του σημείου που η συσκευή προσκρούει στο έδαφος είναι

$d = 700 \text{ m}$. (α) Για πόσο χρόνο η συσκευή μένει στον αέρα; (β) Πόσο ψηλά ήταν το σημείο ελευθέρωσής της;

- 28 Μια πέτρα εκτοξεύεται με καταπέλτη τη χρονική στιγμή $t = 0$, με αρχική ταχύτητα μέτρου 20.0 m/s και με γωνία 40.0° πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση. Πόσο είναι το μέτρο (α) της οριζόντιας και (β) της κατακόρυφης συνιστώσας της μετατόπισης της πέτρας από τον καταπέλτη τη χρονική στιγμή $t = 1.10 \text{ s}$; Να επαναλάβετε τον υπολογισμό για (γ) την οριζόντια και (δ) την κατακόρυφη συνιστώσα τη χρονική στιγμή $t = 1.80 \text{ s}$ και για (ε) την οριζόντια και (στ) την κατακόρυφη συνιστώσα τη χρονική στιγμή $t = 5.00 \text{ s}$.
- 29 Αθλητής καταδύσεων εκτινάσσεται οριζόντια με ταχύτητα 2.00 m/s από το άκρο του βατήρα, 10.0 m πάνω από την επιφάνεια του νερού. (α) Σε πόση οριζόντια απόσταση από το άκρο του βατήρα βρίσκεται ο αθλητής 0.800 s αργότερα; (β) Σε πόση κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του νερού βρίσκεται ο αθλητής αυτή τη χρονική στιγμή; (γ) Σε πόση οριζόντια απόσταση από το άκρο ο αθλητής χτυπά στο νερό;
- 30 Η λέξη trebuchet αναφέρεται σε μια μεσαιωνική πολιορκητική μηχανή που χρησιμοποιούνταν για να ρίξει τα τείχη κάστρων κατά τη διάρκεια πολιορκίας. Μια μεγάλη πέτρα εκτοξεύονταν προς τα τείχη με σκοπό να τα κατεδαφίσει. Η μηχανή δεν πλησίαζε τα τείχη γιατί τότε θα την έφταναν τα βέλη από τις πολέμιστρες. Αντιθέτως, τοποθετούνταν έτσι ώστε η πέτρα να χτυπήσει στο τείχος κατά το δεύτερο μισό της πτήσης. Υποθέστε ότι μια τέτοια πέτρα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 28.0 \text{ m/s}$ και σε γωνία $\theta_0 = 40.0^\circ$. Πόση είναι η ταχύτητα της πέτρας αν χτυπήσει στο τείχος (α) τη στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος της παραβολικής της τροχιάς και (β) όταν κατεβαίνει και βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους; (γ) Πόσο, επί τοις εκατό, πιο γρήγορα κινείται η πέτρα στο ερώτημα (β), σε σχέση με το ερώτημα (α);
- 31 Ένα αεροπλάνο που εφορμά με σταθερή ταχύτητα σχηματίζοντας γωνία 53.0° με την κατακόρυφη κατεύθυνση, ελευθερώνει βλήμα από ύψος 730 m. Το βλήμα προσκρούει στο έδαφος 5.00 s μετά την ελευθέρωση. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του αεροπλάνου; (β) Πόσο μακριά και οριζόντια κινείται το βλήμα κατά τη διάρκεια της πτήσης του; Πόση είναι (γ) η οριζόντια και (δ) η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος;
- 32 Κατά τη διάρκεια αγώνα τένις ένας παίκτης ρίχνει τη μπάλα με 23.6 m/s, με το κέντρο της μπάλας να εγκαταλείπει τη ρακέτα σε οριζόντια κατεύθυνση και 2.37 m πάνω από την επιφάνεια του γηπέδου. Το δίχτυ βρίσκεται 12 m μακριά και έχει ύψος 0.90 m. Όταν η μπάλα φτάνει στο δίχτυ, (α) το περνάει; (β) Πόση είναι η απόσταση μεταξύ του κέντρου της μπάλας και του πάνω μέρους του δικτιού εκείνη τη στιγμή; Υποθέστε ότι αντιθέτως, η μπάλα ρίχνεται όπως και πριν, μόνο που τώρα εγκαταλείπει τη ρακέτα υπό γωνία 5.00° κάτω από την οριζόντια. Όταν η μπάλα φτάνει στο δίχτυ, (γ) το περνάει; (δ) Πόση είναι τώρα η απόσταση μεταξύ του κέντρου της μπάλας και του πάνω μέρους του δικτιού;
- 33 Σε άλμα για κάρφωμα, ένας παίκτης του βόλεϊ χτυπά την μπάλα πάνω από το κεφάλι του και προς το αντίπαλο μέρος του γηπέδου. Ο έλεγχος της γωνίας του καρφώματος είναι δύσκολος. Υποθέστε ότι η μπάλα καρφώνεται από ύψος 2.30 m με αρχική ταχύτητα 20.0 m/s σε γωνία 18.00°

προς τα κάτω. Πόσο μακρύτερα στο αντίπαλο μέρος του γηπέδου θα είχε προσγειωθεί η μπάλα αν η γωνία ήταν, αντίθετως, 8.00° προς τα κάτω;

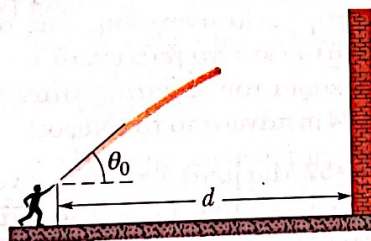
••34 Μια μπάλα ποδοσφαίρου κλοτσιέται από το επίπεδο του εδάφους με αρχική ταχύτητα 19.5 m/s σε γωνία 45° προς τα πάνω. Την ίδια στιγμή ένας παίκτης, 55 m μακριά και προς την κατεύθυνση του χτυπήματος, αρχίζει να τρέχει για να πάρει τη μπάλα. Πόση πρέπει να είναι η μέση ταχύτητά του ούτως ώστε να συναντήσει τη μπάλα πριν χτυπήσει στο έδαφος;

••35 Η ταχύτητα εκτόξευσης ενός βλήματος είναι πέντε φορές η ταχύτητά του στο μέγιστο ύψος. Να βρείτε την γωνία εκτόξευσης θ_0 .

••36 Υποθέστε ότι ένας σφαιροβόλος μπορεί να ρίξει τη σφαίρα με ταχύτητα, αντάξια παγκοσμίων πρωταθλητών, $v_0 = 15.00 \text{ m/s}$ και από ύψος 2.160 m . Πόση οριζόντια απόσταση θα διανύσει η σφαίρα αν η γωνία εκτόξευσης θ_0 είναι (α) 45.00° και (β) 42.00° ; Οι απαντήσεις δείχνουν ότι η γωνία των 45° , που μεγιστοποιεί το βεληνεκές βολής, δεν μεγιστοποιεί την οριζόντια απόσταση όταν η εκτόξευση και η προσγείωση γίνονται σε διαφορετικά ύψη.

••37 Μια μπάλα εκτοξεύεται από το έδαφος στον αέρα. Στο ύψος των 9.1 m η ταχύτητά της είναι $\vec{v} = (7.6\hat{i} + 6.1\hat{j}) \text{ m/s}$, με το $\hat{i}$ οριζόντιο και το $\hat{j}$ προς τα πάνω. (α) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο ανεβαίνει η μπάλα; (β) Πόση είναι η συνολική οριζόντια απόσταση που διανύει η μπάλα; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία (κάτω από την οριζόντια κατεύθυνση) της ταχύτητας της μπάλας ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος;

••38 Πετάτε μια μπάλα προς έναν τοίχο, με ταχύτητα 25.0 m/s και με γωνία $\theta_0 = 40.0^\circ$ πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση (Σχ. 4-38). Ο τοίχος βρίσκεται σε απόσταση $d = 22.0 \text{ m}$ από το σημείο που ελευθερώνετε την μπάλα. (α) Πόσο μακριά πάνω από το σημείο που ελευθε-



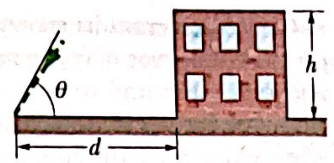
ΣΧΗΜΑ 4-38 Πρόβλημα 38.

ρώνεται η μπάλα χτυπά στον τοίχο; Πόση είναι (β) η οριζόντια και (γ) η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας όταν χτυπά στον τοίχο; (δ) Όταν χτυπά, έχει περάσει το ψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

••39 Ένα όπλο που ρίχνει σφαίρες με 460 m/s πρόκειται να σκοπεύσει στόχο 45.7 m μακριά. Αν το κέντρο του στόχου βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το όπλο, πόσο πάνω από τον στόχο πρέπει να σηματοδέψει η κάννη ώστε η σφαίρα να χτυπήσει ακριβώς στο κέντρο του στόχου;

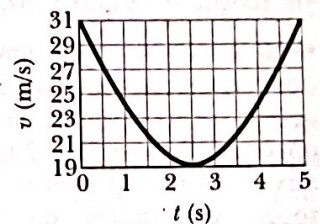
••40 Μια μπάλα του μπέιζμπολ φεύγει οριζόντια από τον ριπτή με ταχύτητα 161 km/h . Η απόσταση από τον παίκτη με το ρόπαλο είναι 18.3 m . (α) Πόσο χρόνο κάνει η μπάλα για να διανύσει το πρώτο μισό αυτής της απόστασης; (β) Το δεύτερο μισό; (γ) Κατά πόση απόσταση πέφτει ελεύθερα η μπάλα κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού; (δ) Κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού; (ε) Γιατί δεν είναι οι ποσότητες στα ερωτήματα (γ) και (δ) ίσες;

••41 Στο Σχ. 4-39, η μπάλα ρίχνεται προς τα αριστερά από το αριστερό άκρο της οροφής, σε ύψος h πάνω στο έδαφος. Η μπάλα χτυπά στο έδαφος 1.50 s αργότερα, σε απόσταση $d = 25.0 \text{ m}$ από το κτήριο και με γωνία $\theta = 60.0^\circ$ ως προς την οριζόντια κατεύθυνση. (α) Να βρείτε το h . (Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να αντιστρέψετε την κίνηση, όπως σε μια βιντεοταινία.) (β) Πόσο είναι το μέτρο και (γ) πόση είναι η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση της ταχύτητας με την οποία ρίχνεται η μπάλα με την οριζόντια κατεύθυνση; (δ) Η γωνία είναι πάνω ή κάτω από την οριζόντια κατεύθυνση;



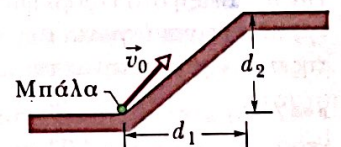
ΣΧΗΜΑ 4-39 Πρόβλημα 41.

••42 Χτυπάμε μια μπάλα του γκολφ στο επίπεδο του εδάφους. Η ταχύτητα της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο Σχ. 4-40, όπου $t = 0$ τη στιγμή που χτυπάμε την μπάλα. (α) Πόσο μακριά κινείται η μπάλα οριζόντια πριν επιστρέψει στο επίπεδο του εδάφους; (β) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος πάνω από το έδαφος στο οποίο φτάνει η μπάλα;



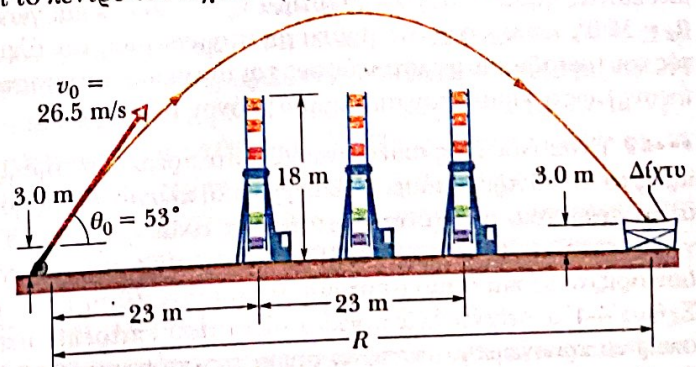
ΣΧΗΜΑ 4-40 Πρόβλημα 42.

••43 Στο Σχ. 4-41, μια μπάλα εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου 10.0 m/s , με γωνία 50.0° ως προς την οριζόντια κατεύθυνση. Το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται στη βάση ράμπας με οριζόντιο μήκος $d_1 = 6.00 \text{ m}$ και ύψος $d_2 = 3.60 \text{ m}$. Στην κορυφή της ράμπας υπάρχει οριζόντιο επίπεδο. (α) Η μπάλα προσγειώνεται στη ράμπα ή στο οριζόντιο επίπεδο; Όταν προσγειώνεται, (β) πόσο είναι το μέτρο και (γ) πόση είναι η γωνία της μετατόπισής της από το σημείο εκτόξευσης;



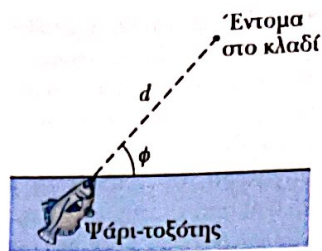
ΣΧΗΜΑ 4-41 Πρόβλημα 43.

••44 Το 1939 ή το 1940 ο Emanuel Zacchini πήγε την παράστασή του ως «άνθρωπος-βλήμα» (human-cannonball) στα άκρα. Αφού εκτοξεύτηκε με κανόνι, πέρασε πάνω από τρεις τροχούς του λούνα-παρκ για να προσγειωθεί σε δίχτυ (Σχ. 4-42). (α) Θεωρώντας τον ως σωματίδιο, να υπολογίσετε το διάκενό του πάνω από τον πρώτο τροχό. (β) Αν φτάνει στο μέγιστο ύψος του πάνω από τον μεσαίο τροχό, πόσο ψηλά από πάνω του περνάει; (γ) Πόσο μακριά από το κανόνι πρέπει να τοποθετηθεί το κέντρο του δικτύου (αγνοήστε την αντίσταση του αέρα);



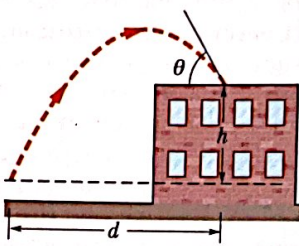
ΣΧΗΜΑ 4-42 Πρόβλημα 44.

••45 Μόλις εντοπίσει το έντομο στο κλαδί ενός δέντρου που κρέμεται πάνω από το νερό, το ψάρι-τοξότης εκτινάσσει σταγόνες νερού προς το έντομο για να το ρίξει στο νερό (Σχ. 4-43). Παρόλο που το ψάρι βλέπει το έντομο σε ευθεία γραμμή, σε γωνία ϕ και σε απόσταση d , οι σταγόνες πρέπει να εκτοξευτούν με διαφορετική γωνία θ_0 ώστε η παραβολική τροχιά τους να περάσει από το έντομο. Αν $\phi = 36.0^\circ$, $d = 0.900$ m και η ταχύτητα εκτόξευσης είναι 3.56 m/s, ποια τιμή της θ_0 απαιτείται ώστε η σταγόνα να βρίσκεται στην κορυφή της παραβολικής της τροχιάς όταν φτάνει στο έντομο;



ΣΧΗΜΑ 4-43 Πρόβλημα 45.

••46 Στο Σχ. 4-44, μια μπάλα ρίχνεται προς τα πάνω, προς την οροφή, και προσγειώνεται 4.00 s αργότερα σε ύψος $h = 20.0$ m πάνω από το σημείο βολής. Η τροχιά της μπάλας ακριβώς πριν προσγειωθεί σχηματίζει γωνία $\theta = 60.0^\circ$ με την οροφή. (α) Να βρείτε την οριζόντια απόσταση d που διανύει. (Βλ. την υπόδειξη στο Πρόβλημα 41.) (β) Πόσο είναι το μέτρο και (γ) πόση είναι η γωνία (ως προς την οριζόντια κατεύθυνση) της αρχικής ταχύτητας της μπάλας;



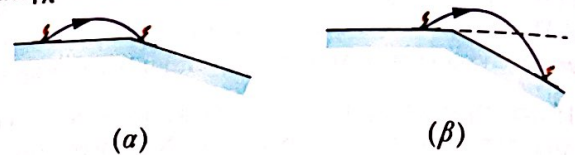
ΣΧΗΜΑ 4-44 Πρόβλημα 46.

••47 Παίκτης του μπέιζμπολ χτυπά την μπάλα όταν το κέντρο της βρίσκεται 1.22 m πάνω από το έδαφος. Η μπάλα φεύγει από το ρόπαλο σχηματίζοντας γωνία 45° με το έδαφος. Με αυτή τη βολή, η μπάλα θα έπρεπε να έχει βεληνεκές (επιστρέφοντας στο επίπεδο βολής) 107 m. (α) Πέραν η μπάλα την περιφραγή ύψους 7.32 m που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 97.5 m από το σημείο βολής; (β) Στην περιφραγή, πόση είναι η απόσταση μεταξύ της κορυφής της περιφραγής και του κέντρου της μπάλας;

••48 Στο μπάσκετ, το *hang* είναι μια οφθαλμαπάτη στην οποία ο παίκτης μοιάζει να μειώνει την επιτάχυνση της βαρύτητας ενόσω βρίσκεται στον αέρα. Η οφθαλμαπάτη εξαρτάται πολύ από την ικανότητα ενός έμπειρου παίκτη να μετακινήσει γρήγορα τη μπάλα μεταξύ των χεριών του ενώ βρίσκεται στον αέρα, αλλά επίσης ενισχύεται από τη μεγαλύτερη οριζόντια απόσταση που διανύει ο παίκτης στο ανώτερο τμήμα του άλματός του σε σχέση με το χαμηλότερο τμήμα. Αν ένας μπασκετμπολίστας πηδά με αρχική ταχύτητα $v_0 = 7.00$ m/s και γωνία $\theta_0 = 35.0^\circ$, για πόσο χρόνο βρίσκεται στο άνω μισό του άλματός του (μεταξύ του μέγιστου ύψους και του μισού του μέγιστου ύψους), ως ποσοστό του συνολικού χρόνου του άλματος;

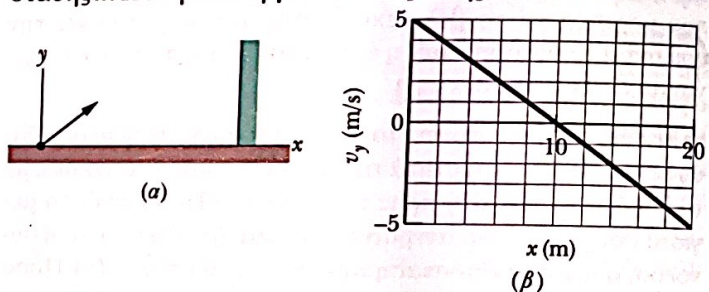
••49 Ένας έμπειρος σκιέρ γνωρίζει ότι πρέπει να πηδήξει προς τα πάνω πριν φτάσει σε κατηφορική πλαγιά. Θεωρήστε άλμα στο οποίο η ταχύτητα εκτόξευσης είναι $v_0 = 10$ m/s, η γωνία εκτόξευσης είναι $\theta_0 = 9.0^\circ$, η πίστα είναι αρχικά σχεδόν οριζόντια και η πιο απότομη πλαγιά έχει κλίση 11.3° . Το Σχήμα 4-45α δείχνει ένα πρώιμο άλμα που επιτρέπει στον σκιέρ να προσγειωθεί στο πάνω τμήμα της απότομης πλαγιάς. Το Σχήμα 4-45β δείχνει ένα άλμα από το άκρο της από-

τομης πλαγιάς. Στο Σχ. 4-45α ο σκιέρ προσγειώνεται περίπου στο επίπεδο εκτόξευσης. (α) Κατά την προσγείωση, πόση είναι η γωνία ϕ μεταξύ της τροχιάς του σκιέρ και της πλαγιάς; Στο Σχ. 4-45β, (β) πόσο κάτω από το επίπεδο εκκίνησης προσγειώνεται ο σκιέρ και (γ) πόση είναι η ϕ ; (Η μεγαλύτερη πτώση και η μεγαλύτερη ϕ μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα την απώλεια ελέγχου κατά την προσγείωση.)



ΣΧΗΜΑ 4-45 Πρόβλημα 49.

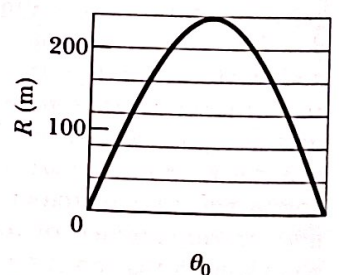
••50 Μια μπάλα πρόκειται να ριχτεί από το επίπεδο του εδάφους προς ένα τοίχο σε απόσταση x (Σχ. 4-46α). Το Σχήμα 4-46β δείχνει τη συνιστώσα y , v_y , της ταχύτητας της μπάλας τη στιγμή που θα έφτανε στον τοίχο, ως συνάρτηση της απόστασης x . Πόση είναι η γωνία εκτόξευσης;



ΣΧΗΜΑ 4-46 Πρόβλημα 50.

••51 Ένας ποδοσφαιριστής μπορεί να δώσει στη μπάλα αρχική ταχύτητα 25 m/s. Πόση είναι (α) η ελάχιστη και (β) η μέγιστη γωνία ανύψωσης στις οποίες μπορεί να κλοτσήσει τη μπάλα ώστε να βάλει γκολ από σημείο 50 m μπροστά από τα δοκάρια του τέρματος, όταν το οριζόντιο δοκάρι βρίσκεται 3.44 m πάνω από το έδαφος;

••52 Μια μπάλα πρόκειται να ριχτεί από το επίπεδο του εδάφους με κάποια ταχύτητα. Το Σχήμα 4-47 δείχνει το βεληνεκές R που θα έχει ως συνάρτηση της γωνίας βολής θ_0 . Η τιμή της θ_0 προσδιορίζει το χρόνο πτήσης. Έστω $t_{\max}$ ο μέγιστος χρόνος πτήσης. Πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα που θα έχει η μπάλα κατά την πτήση της αν η θ_0 επιλεγεί έτσι ώστε ο χρόνος πτήσης να είναι $0.500 t_{\max}$;



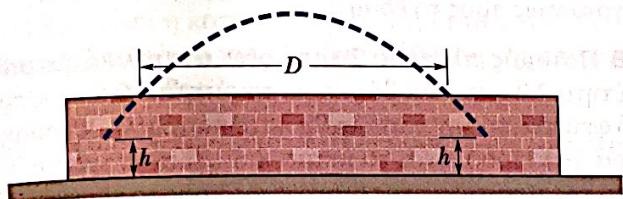
ΣΧΗΜΑ 4-47 Πρόβλημα 52.

••53 Μια μπάλα κυλά οριζόντια από την κορυφή σκάλας, με ταχύτητα 1.52 m/s. Τα σκαλιά έχουν ύψος 20.3 cm και πλάτος 20.3 cm. Ποιο είναι το πρώτο σκαλοπάτι στο οποίο χτυπά η μπάλα;

••54 Δύο δευτερόλεπτα αφότου έχει ριχτεί από το επίπεδο του εδάφους, ένα βλήμα έχει μετατοπιστεί 40 m οριζόντια και 53 m κατακόρυφα πάνω από το σημείο βολής. Πόση είναι (α) η οριζόντια και (β) η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας του βλήματος; (γ) Τη στιγμή που το βλήμα φτάνει το μέγιστο ύψος του πάνω από το επίπεδο του εδάφους,

πόσο μακριά έχει μετατοπιστεί οριζόντια από το σημείο βολής;

•••55 Στο Σχ. 4-48, μια μπάλα του μπέιζμπολ χτυπιέται σε ύψος $h = 1.00$ m και στη συνέχεια πιάνεται στο ίδιο ύψος. Κινείται παράλληλα σε τοίχο, περνώντας πάνω από τον τοίχο 1.00 s αφού έχει χτυπηθεί και μετά κάτω από τον τοίχο 4.00 s αργότερα, σε απόσταση $D = 50.0$ m μακρύτερα κατά μήκος του τοίχου. (α) Πόση οριζόντια απόσταση διανύει η μπάλα από τη στιγμή που χτυπιέται έως τη στιγμή που πιάνεται; (β) Πόσο είναι το μέτρο και (γ) πόση είναι η γωνία (ως προς την οριζόντια κατεύθυνση) της ταχύτητας της μπάλας ακριβώς μετά τη στιγμή του χτυπήματος; (δ) Πόσο ψηλός είναι ο τοίχος;



ΣΧΗΜΑ 4-48 Πρόβλημα 55.

Παρ. 4-7 Ομαλή Κυκλική Κίνηση

•56 Ένας άνθρωπος εθισμένος στην κεντρομόλο επιτάχυνση εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο $T = 2.0$ s και ακτίνα $r = 3.00$ m. Τη χρονική στιγμή t_1 η επιτάχυνσή του είναι $\vec{a} = (6.00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-4.00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ποια είναι η τιμή των (α) $\vec{v} \cdot \vec{a}$ και (β) $\vec{r} \times \vec{a}$;

•57 Μια γυναίκα κάνει βόλτα στη ρόδα του λούνα-παρκ, ακτίνας 15 m, συμπληρώνοντας πέντε στροφές γύρω από τον οριζόντιο άξονα κάθε λεπτό. (α) Πόση είναι η περίοδος, (β) πόσο είναι το μέτρο και (γ) ποια είναι η κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσής της στο ψηλότερο σημείο; (δ) Πόσο είναι το μέτρο και (ε) ποια είναι η κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσής της στο χαμηλότερο σημείο;

•58 Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης δρομέα που τρέχει με ταχύτητα 10 m/s όταν κάνει τον κύκλο μιας στροφής ακτίνας 25 m;

•59 Όταν ένα μεγάλο αστέρι γίνεται *supernova*, ο πυρήνας του μπορεί να συμπιεστεί τόσο πολύ που γίνεται ένας αστέρας νετρονίων, με ακτίνα περίπου 20 km (περίπου το μέγεθος της περιοχής του San Francisco). Αν ο αστέρας νετρονίων εκτελεί μια περιστροφή κάθε δευτερόλεπτο, (α) πόση είναι η ταχύτητα ενός σωματιδίου στον ισημερινό του αστεριού και (β) πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σωματιδίου; (γ) Αν ο αστέρας νετρονίων περιστρέφεται γρηγορότερα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα (α) και (β) αυξάνονται, μειώνονται, ή παραμένουν ίδιες;

•60 Ένας δορυφόρος γύρω από τη Γη κινείται σε κυκλική τροχιά, 640 km πάνω από την επιφάνεια της Γης με περίοδο 98.0 min. Πόσο είναι (α) το μέτρο της ταχύτητας και (β) το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του δορυφόρου;

•61 Τα αλογάκια του λούνα-παρκ περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα με σταθερό ρυθμό. Ένας άνθρωπος που στέκεται στο άκρο έχει σταθερή ταχύτητα 3.66 m/s και κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}$ με μέτρο 1.83 m/s^2 . Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ δίνει τη θέση του ανθρώπου ως προς τον άξονα περισ-

τροφής. (α) Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{r}$; ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{r}$ όταν το $\vec{a}$ κατευθύνεται (β) ανατολικά και (γ) νότια;

•62 Περιστρεφόμενος ανεμιστήρας συμπληρώνει 1200 περιστροφές κάθε λεπτό. Θεωρήστε το άκρο ενός πτερυγίου, σε ακτίνα 0.15 m. (α) Πόση απόσταση διανύει το άκρο σε μια περιστροφή; (β) Πόση είναι η ταχύτητα του άκρου και (γ) πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσής του; (δ) Πόση είναι η περίοδος της κίνησης;

•63 Ένα τσαντάκι σε ακτίνα 2.00 m και ένα πορτοφόλι σε ακτίνα 3.00 m εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στο δάπεδο ενός καρουζέλ που περιστρέφεται. Βρίσκονται στην ίδια ακτινική ευθεία. Κάποια χρονική στιγμή, η επιτάχυνση της τσάντας είναι $(2.00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (4.00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Αυτή τη χρονική στιγμή σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόση είναι η επιτάχυνση του πορτοφολιού;

•64 Σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά σε οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων xy με σταθερή ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4.00$ s βρίσκεται στο σημείο $(5.00 \text{ m}, 6.00 \text{ m})$ με ταχύτητα $(3.00 \text{ m/s})\hat{i}$ και επιτάχυνση προς τη θετική κατεύθυνση του x . Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10.0$ s έχει ταχύτητα $(-3.00 \text{ m/s})\hat{i}$ και επιτάχυνση προς τη θετική κατεύθυνση του y . Πόση είναι η συντεταγμένη (α) x και (β) y του κέντρου της κυκλικής τροχιάς αν το $t_2 - t_1$ είναι μικρότερο από μια περίοδο;

•65 Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2.00$ s η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται δεξιόστροφα είναι $(6.00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (4.00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 5.00$ s η επιτάχυνσή του είναι $(4.00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-6.00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Πόση είναι η ακτίνα της τροχιάς που ακολουθεί το σωματίδιο αν $t_2 - t_1$ είναι μικρότερο από μία περίοδο;

•66 Σωματίδιο κινείται οριζόντια εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο xy . Κάποια χρονική στιγμή περνά από το σημείο με συντεταγμένες $(4.00 \text{ m}, 4.00 \text{ m})$ με ταχύτητα $-5.00\hat{i} \text{ m/s}$ και επιτάχυνσή $+12.5\hat{j} \text{ m/s}^2$. Πόση είναι η συντεταγμένη (α) x και (β) y του κέντρου της κυκλικής τροχιάς;

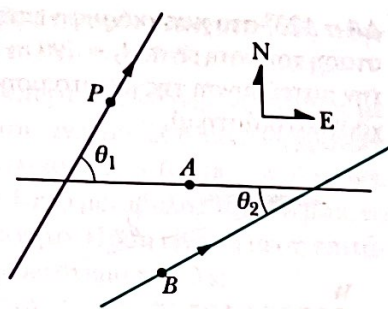
•••67 Ένα αγόρι περιστρέφει μια πέτρα σε οριζόντιο κύκλο ακτίνας 1.5 m και σε ύψος 2.0 m πάνω από το επίπεδο του εδάφους. Το σκοινί σπάει, η πέτρα εκσφενδονίζεται οριζόντια και χτυπά στο έδαφος έχοντας διανύσει οριζόντια απόσταση 10 m. Πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της πέτρας κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης;

•••68 Μια γάτα κάνει βόλτα στα αλογάκια του λούνα-παρκ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2.00$ s η ταχύτητα της γάτας είναι $\vec{v}_1 = (3.00 \text{ m/s})\hat{i} + (4.00 \text{ m/s})\hat{j}$, μετρημένη ως προς οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων xy . Τη χρονική στιγμή $t_2 = 5.00$ s η ταχύτητά της είναι $\vec{v}_2 = (-3.00 \text{ m/s})\hat{i} + (-4.00 \text{ m/s})\hat{j}$. (α) Πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της γάτας και (β) πόση είναι η μέση επιτάχυνση της γάτας κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $t_2 - t_1$, το οποίο είναι μικρότερο από μία περίοδο;

Παρ. 4-8 Σχετική Κίνηση σε Μία Διάσταση

•69 Ένας εικονολήπτης πάνω σε ημιφορηγό κινείται δυτικά με ταχύτητα 20 km/h ενώ βιντεοσκοπεί ένα γατόπαρδο που

ακίνητο συνοριοφύλακα Α. Ως προς τον φύλακα, το Β κινείται με σταθερή ταχύτητα 20.0 m/s και με γωνία $\theta_2 = 30.0^\circ$. Ως προς τον φύλακα, το Ρ έχει επιτάχυνση από την ακινησία με σταθερό ρυθμό 0.400 m/s² και σε γωνία $\theta_1 = 60.0^\circ$. Κάποια χρονική στιγμή κατά την επιτάχυνση, το Ρ έχει ταχύτητα 40.0 m/s. Αυτή τη χρονική στιγμή, (α) πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας του Ρ ως προς το Β και (γ) το μέτρο και (δ) η κατεύθυνση της επιτάχυνσης του Ρ ως προς το Β;



ΣΧΗΜΑ 4-50 Πρόβλημα 80.

•••81 Το πλοίο Α βρίσκεται 4.0 km βόρεια και 2.5 km ανατολικά του πλοίου Β. Το πλοίο Α έχει ταχύτητα 22 km/h προς το νότο και το πλοίο Β έχει ταχύτητα 40 km/h σε κατεύθυνση 37° βόρεια της ανατολής. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του Α ως προς το Β σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, με το $\hat{i}$ προς την ανατολή; (β) Να γράψετε μια έκφραση (χρησιμοποιώντας τα $\hat{i}$ και $\hat{j}$) για τη θέση του Α ως προς το Β, ως συνάρτηση του t , όπου $t = 0$ όταν τα πλοία βρίσκονταν στις θέσεις που περιγράφονται πιο πάνω. (γ) Ποια χρονική στιγμή η απόσταση μεταξύ των πλοίων είναι ελάχιστη; (δ) Πόση είναι αυτή η ελάχιστη απόσταση;

•••82 Ποταμός πλάτους 200 m έχει σταθερή ταχύτητα ροής 1.1 m/s ως προς τη ζεύγλα και προς την ανατολή. Ένας εξερευνητής επιθυμεί να φύγει από ένα μικρό ξέφωτο στη νότια όχθη και διασχίζει τον ποταμό με μηχανοκίνητη βάρκα, με σταθερή ταχύτητα 4.0 m/s ως προς το νερό. Υπάρχει ένα ξέφωτο στη βόρεια όχθη 82 m αντίθετα στο ρεύμα του ποταμού από σημείο ακριβώς απέναντι από το ξέφωτο της νότιας όχθης. (α) Προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κατευθυνθεί η βάρκα ώστε να κινηθεί σε ευθεία γραμμή και να καταλήξει στο ξέφωτο της βόρειας όχθης; (β) Πόσο χρόνο κάνει η βάρκα να διασχίσει το ποτάμι και να φτάσει στο ξέφωτο;

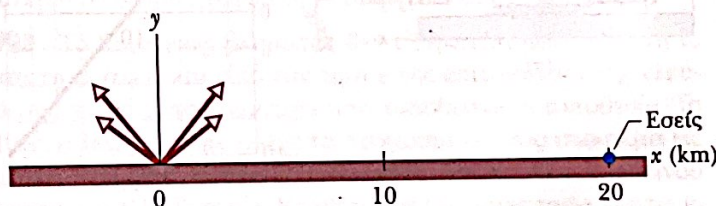
Συμπληρωματικά Προβλήματα

83 Σας απήγαγαν τελειόφοιτοι φοιτητές των πολιτικών επιστημών (που τσαντίστηκαν γιατί τους είπατε ότι η πολιτική επιστήμη δεν είναι πραγματική επιστήμη). Παρόλο που σας έχουν κλείσει τα μάτια, μπορείτε να εκτιμήσετε την ταχύτητα του αυτοκινήτου τους (από τον ήχο της μηχανής) το χρόνο της διαδρομής (μετρώντας νοερά τα δευτερόλεπτα) και την κατεύθυνση της διαδρομής (με στροφές σε ορθογώνιο σύστημα δρόμων). Από αυτά τα στοιχεία, γνωρίζετε ότι ακολουμά θήσατε την ακόλουθη πορεία: 50 km/h για 2.0 min, στροφή 90° προς τα δεξιά, 20 km/h για 4.0 min, στροφή 90° προς τα δεξιά, 20 km/h για 60 s, στροφή 90° προς τα αριστερά, 50 km/h για 60 s, στροφή 90° προς τα δεξιά, 20 km/h για 2.0 min, στροφή 90° προς τα αριστερά, 50 km/h για 30 s. Σε αυτό το σημείο, (α) πόσο μακριά βρίσκεστε από το σημείο εκκίνησης και (β) σε ποια κατεύθυνση βρίσκεστε ως προς την αρχική κατεύθυνση της διαδρομής σας;

84 Κουρίνα θανάτου. Ένας μεγάλος μεταλλικός αστεροει-

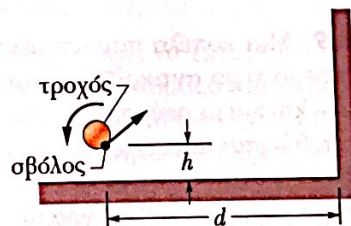
δής χτυπά την Γη και γρήγορα ανοίγει κρατήρα στο βραχώδες υλικό κάτω από το επίπεδο του εδάφους εκτοξεύοντας βράχους προς τα έξω και γύρω. Ο παρακάτω πίνακας δίνει πέντε ζεύγη ταχυτήτων εκτόξευσης και γωνιών (ως προς την οριζόντια κατεύθυνση) για τέτοιους βράχους, βάσει ενός μοντέλου για το σχηματισμό του κρατήρα. (Εκτοξεύονται και άλλοι βράχοι, με ενδιαμέσες τιμές ταχύτητας και γωνίας.) Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο $x = 20$ km όταν ο αστεροειδής χτυπά το έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 0$ και στη θέση $x = 0$ (Σχ. 4-51). (α) Τη χρονική στιγμή $t = 20$ s, πόσες είναι οι συντεταγμένες x και y των βράχων που κατευθύνονται προς εσάς από τις εκτοξεύσεις Α έως Ε; (β) Να παραστήσετε γραφικά αυτές τις συντεταγμένες και στη συνέχεια να σχεδιάσετε μια καμπύλη διαμέσου των σημείων ώστε να περιλαμβάνονται οι βράχοι με τις ενδιαμέσες ταχύτητες και γωνίες. Η καμπύλη πρέπει να δείχνει τι θα βλέπατε καθώς κοιτάζετε τους βράχους που πλησιάζουν και τι πρέπει να είδαν οι δεινόσαυροι κατά τις προσκρούσεις των αστεροειδών στο μακρινό παρελθόν.

Εκτόξευση	Ταχύτητα (m/s)	Γωνία (μοίρες)
A	520	14.0
B	630	16.0
C	750	18.0
D	870	20.0
E	1000	22.0



ΣΧΗΜΑ 4-51 Πρόβλημα 84.

85 Στο Σχ. 4-52, ένας σβόλος από νωπό στόκο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση καθώς γυρίζει σε ακτίνα 20.0 cm στο άκρο τροχού που περιστρέφεται δεξιόστροφα με περίοδο 5.00 ms. Ο σβόλος στη συνέχεια ξεκολλάει από το άκρο του τροχού στη θέση 5 ακριβώς (σαν να ήταν στο καντράν ενός ρολογιού). Αφήνει το άκρο σε ύψος $h = 1.20$ m από το δάπεδο και σε απόσταση $d = 2.50$ m από ένα τοίχο. Σε πόσο ύψος στον τοίχο χτυπάει ο σβόλος;

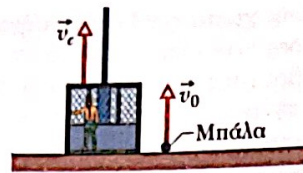


ΣΧΗΜΑ 4-52 Πρόβλημα 85.

86 Σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από την αρχή των αξόνων ενός συστήματος συντεταγμένων xy , κινούμενο αριστερόστροφα με περίοδο 7.00 s. Κάποια χρονική στιγμή, το διάνυσμα θέσης του (από την αρχή των αξόνων) είναι $\vec{r} = (2.00 \text{ m})\hat{i} - (3.00 \text{ m})\hat{j}$. Τη στιγμή αυτή, πόση είναι η ταχύτητά του σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων;

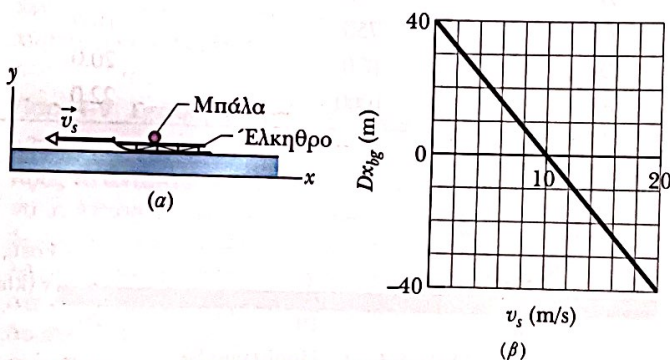
87 Στο Σχ. 4-53, μια μπάλα ρίχνεται απευθείας προς τα πάνω από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 7.00$ m/s. Ταυτόχρονα,

ο θάλαμος ενός ανελκυστήρα οικοδομής ξεκινά να κινείται από το έδαφος προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v_c = 3.00$ m/s. Πόσο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα ως προς (α) το έδαφος και (β) το δάπεδο του θαλάμου; Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η ταχύτητα της μπάλας ως προς (γ) το έδαφος και (δ) το δάπεδο του θαλάμου;



ΣΧΗΜΑ 4-53 Πρόβλημα 87.

88 Στο Σχ. 4-54α, ένα έλκηθρο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του x με σταθερή ταχύτητα v , ενώ μια μπάλα από πάγο εκτοξεύεται από το έλκηθρο με ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$, ως προς το έλκηθρο. Όταν η μπάλα προσγειώνεται, μετρείται η οριζόντια μετατόπισή της Δx_{bg} ως προς το έδαφος (από τη θέση βολής της ως τη θέση προσγειώσεώς της). Το Σχήμα 4-54β δίνει την Δx_{bg} ως συνάρτηση της v . Υποθέστε ότι η μπάλα προσγειώνεται περίπου στο ύψος βολής της. Ποιες είναι οι τιμές (α) της v_{0x} και (β) της v_{0y} ; Μπορεί επίσης να μετρηθεί η μετατόπιση Δx_{bs} της μπάλας ως προς το έλκηθρο. Υποθέστε ότι η ταχύτητα του ελκήθρου δεν αλλάζει όταν εκτοξεύεται η μπάλα. Πόση είναι η Δx_{bs} όταν η v είναι (γ) 5.0 m/s και (δ) 15 m/s;

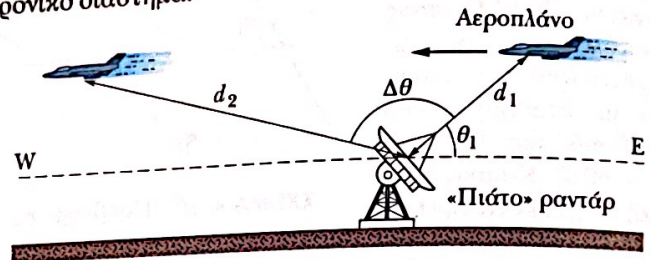


ΣΧΗΜΑ 4-54 Πρόβλημα 88.

89 Μια κοπέλα που μπορεί να κωπηλατήσει με 6.4 km/h σε ήρεμο νερό αντικρίζει μακριά, ευθύγραμμο ποταμό, πλάτους 6.4 km και με ρεύμα ταχύτητας 3.2 km/h. Θεωρούμε ότι το $\hat{i}$ κατευθύνεται απευθείας απέναντι στον ποταμό και το $\hat{j}$ κατευθύνεται προς την κατεύθυνση του ρεύματος. Αν η κοπέλα κωπηλατεί σε ευθεία γραμμή προς ένα σημείο ακριβώς απέναντι από το σημείο εκκίνησής της, (α) σε πόση γωνία ως προς το $\hat{i}$ πρέπει να κατευθύνει τη βάρκα και (β) πόσο χρόνο θα της πάρει; (γ) Πόσο χρόνο θα της πάρει αν, αντιθέτως, κωπηλατήσει 3.2 km προς τα κάτω στον ποταμό και στη συνέχεια πίσω στο σημείο εκκίνησής της; (δ) Πόσο χρόνο θα της πάρει αν κωπηλατήσει 3.2 km προς τα πάνω στον ποταμό και στη συνέχεια πίσω στο σημείο εκκίνησής της; (ε) Σε πόση γωνία ως προς το $\hat{i}$ πρέπει να κατευθύνει τη βάρκα αν θέλει να διασχίσει τον ποταμό στο μικρότερο δυνατό χρόνο; (στ) Πόσος είναι αυτός ο ελάχιστος δυνατός χρόνος;

90 Στο Σχ. 4-55, σταθμός ραντάρ ανιχνεύει αεροπλάνο που πλησιάζει απευθείας από τα ανατολικά. Στη πρώτη παρατήρηση το αεροπλάνο βρίσκεται σε απόσταση $d_1 = 360$ m από το σταθμό και σε γωνία $\theta_1 = 40^\circ$ πάνω από τον ορίζοντα. Το αεροπλάνο παρακολουθείται μέσω της γωνιακής μεταβολής

$\Delta\theta = 123^\circ$ στο κατακόρυφο επίπεδο ανατολής-δύσης. Η απόστασή του τότε είναι $d_2 = 790$ m. Να βρείτε (α) το μέτρο και (β) την κατεύθυνση της μετατόπισης του αεροπλάνου γι' αυτό το χρονικό διάστημα.



ΣΧΗΜΑ 4-55 Πρόβλημα 90.

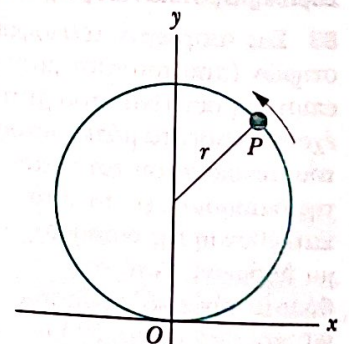
91 Ένα τουφέκι στοχεύει οριζόντια προς στόχο 30 m μακριά. Η σφαίρα χτυπά το στόχο 1.9 cm κάτω από το σημείο στόχευσης. (α) Πόσος είναι ο χρόνος πτήσης της σφαίρας και (β) πόση είναι η ταχύτητά της καθώς εξέρχεται από το τουφέκι;

92 Το γρήγορο Γαλλικό τρένο γνωστό ως TGV (Train à Grande Vitesse - Τρένο Υψηλής Ταχύτητας) έχει προγραμματισμένη μέση ταχύτητα 216 km/h. (α) Αν το τρένο κινείται σε καμπύλη με αυτή την ταχύτητα και το μέτρο της επιτάχυνσης που θα νιώσουν οι επιβάτες πρέπει να περιορίζεται στο 0.050 g, πόση είναι η μικρότερη ανεκτή ακτίνα της καμπύλης σιδηροτροχιάς; (β) Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινηθεί το τρένο σε καμπύλη ακτίνας 1.00 km ώστε να βρίσκεται στο όριο της επιτάχυνσης;

93 Ένα μαγνητικό πεδίο μπορεί να αναγκάσει φορτισμένο σωματίδιο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά. Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο που κινείται σε κύκλο δέχεται ακτινική επιτάχυνση μέτρου 3.0×10^{14} m/s² σε συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου αν η ακτίνα της κυκλικής του τροχιάς είναι 15 cm; (β) Πόση είναι η περίοδος της κίνησης;

94 Το διάνυσμα θέσης ενός πρωτονίου είναι αρχικά $\vec{r} = 5.0\hat{i} - 6.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$ και στη συνέχεια είναι $\vec{r} = -2.0\hat{i} + 6.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$ όλα σε μέτρα. (α) Πόσο είναι το διάνυσμα μετατόπισης του πρωτονίου και (β) σε ποιο επίπεδο είναι παράλληλο το διάνυσμα αυτό;

95 Ένα σωματίδιο P κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κύκλο ακτίνας $r = 3.00$ m (Σχ. 4-56) και συμπληρώνει μια περιστροφή σε 20.0 s. Το σωματίδιο περνά από το O τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να δώσετε τα ακόλουθα διανύσματα σε συμβολισμό μέτρου-γωνίας (η γωνία ως προς τη θετική κατεύθυνση του x). Ως προς το O , να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές t (α) 5.00 s, (β) 7.50 s και (γ) 10.0 s. (δ) Για το χρονικό διάστημα των 5.00 s από το τέλος του πέμπτου δευτερολέπτου έως το τέλος του δέκατου δευτερολέπτου, να βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου. Για το χρονικό διάστημα αυτό, να βρείτε (ε) τη μέση ταχύτητά του και την ταχύτητά του (στ) στην αρχή και (ζ)



ΣΧΗΜΑ 4-56 Πρόβλημα 95.

στο τέλος. Στη συνέχεια, να βρείτε την επιτάχυνση (η) στην αρχή και (θ) στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος.

96 Παγόπλοιο κινείται στην επιφάνεια παγωμένης λίμνης με σταθερή επιτάχυνση εξαιτίας του ανέμου. Σε δεδομένη χρονική στιγμή η ταχύτητα του παγόπλοιου είναι $(6.30\hat{i} - 8.42\hat{j})$ m/s. Τρία δευτερόλεπτα αργότερα, λόγω μεταβολής του ανέμου, το παγόπλοιο είναι στιγμιαία ακίνητο. Πόση είναι η μέση επιτάχυνσή του γι' αυτό το χρονικό διάστημα των 3 s;

97 Σε 3.50 h ένα μπαλόνι παρασύρεται 21.5 km βόρεια, 9.70 km ανατολικά και 2.88 km προς τα πάνω από το σημείο του εδάφους που ελευθερώθηκε. Να βρείτε (α) το μέτρο της μέσης ταχύτητάς του και (β) τη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητά του με την οριζόντια κατεύθυνση.

98 Μια μπάλα ρίχνεται οριζόντια από ύψος 20 m και χτυπά στο έδαφος με ταχύτητα που είναι τριπλάσια της αρχικής. Πόση είναι η αρχική ταχύτητα;

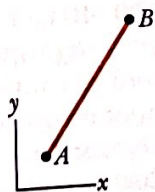
99 Βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα 30 m/s με γωνία 60° πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της ταχύτητάς του 2.0 s μετά την εκτόξευση, και (γ) η γωνία βρίσκεται πάνω ή κάτω από την οριζόντια κατεύθυνση; (δ) Πόσο είναι το μέτρο και (ε) πόση είναι η γωνία της ταχύτητάς του 5.0 s μετά την εκτόξευση, και (στ) η γωνία βρίσκεται πάνω ή κάτω από την οριζόντια κατεύθυνση;

100 Το τερματικό ενός αεροδρομίου διαθέτει κυλιόμενο διάδρομο για να μετακινούνται οι επιβάτες γρηγορότερα σε ένα μακρύ διάδρομο. Ο Larry δεν χρησιμοποιεί τον κυλιόμενο διάδρομο· κάνει 150 s για να περπατήσει από τη μια άκρη στην άλλη. Ο Curly, που απλά στέκεται στον κυλιόμενο διάδρομο, καλύπτει την ίδια απόσταση σε 70 s. Ο Moe ανεβαίνει στον κυλιόμενο διάδρομο και περπατάει. Πόσο χρόνο κάνει ο Moe για να φτάσει στην άλλη άκρη; Υποθέστε ότι ο Larry και ο Moe περπατούν με την ίδια ταχύτητα.

101 Ποδοσφαιριστής κλωσά τη μπάλα ενώ αυτή δεν ακουμπά στο έδαφος έτσι ώστε να μείνει στον αέρα (διάρκεια πτήσης) 4.5 s και να προσγειωθεί 46 m μακριά. Αν η μπάλα φεύγει από το πόδι του παίκτη 150 cm πάνω από το έδαφος, (α) πόσο πρέπει να είναι το μέτρο και (β) πόση πρέπει να είναι η γωνία (ως προς την οριζόντια κατεύθυνση) της αρχικής ταχύτητας της μπάλας;

102 Στο γυναικείο βόλεϊ το πάνω μέρος του δικτυού βρίσκεται 2.24 m από το δάπεδο και το γήπεδο έχει διαστάσεις 9.0 m επί 9.0 m σε κάθε μεριά του δικτυού. Κάνοντας σερβίς με άλμα, μια παίκτρια χτυπά τη μπάλα σε σημείο που βρίσκεται 3.0 m πάνω από το δάπεδο και σε μια οριζόντια απόσταση 8.0 m από το δίχτυ. Αν η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι οριζόντια, (α) πόσο είναι το ελάχιστο μέτρο που πρέπει να έχει ώστε η μπάλα να περάσει το δίχτυ και (β) πόσο είναι το μέγιστο μέτρο που μπορεί να έχει έτσι ώστε να χτυπήσει στο δάπεδο στο σημείο μέσα από την πίσω γραμμή της άλλης πλευράς του γηπέδου;

103 Το Σχήμα 4-57 δείχνει την ευθύγραμμη τροχιά σωματιδίου στο σύστημα συντεταγμένων xy καθώς αυτό επιταχύνεται από την ακινησία σε χρονικό διάστημα Δt_1 . Η επιτάχυνση είναι σταθερή. Οι συντεταγμένες xy για το σημείο A είναι (4.00 m, 6.00 m). Οι



ΣΧΗΜΑ 4-57
Πρόβλημα 103.

αντίστοιχες για το σημείο B είναι (12.0 m, 18.0 m). (α) Πόσος είναι ο λόγος a_y/a_x των συνιστωσών της επιτάχυνσης; (β) Πόσες είναι οι συντεταγμένες του σωματιδίου αν η κίνηση συνεχίζεται για χρονικό διάστημα ίσο με το Δt_1 ;

104 Αστροναύτης περιστρέφεται σε οριζόντιο φυγοκεντρωτή ακτίνας 5.0 m. (α) Πόση είναι η ταχύτητα του αστροναύτη αν η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει μέτρο 7.0 g; (β) Πόσες στροφές ανά λεπτό απαιτούνται για να επιτευχθεί αυτή η επιτάχυνση; (γ) Πόση είναι η περίοδος της κίνησης;

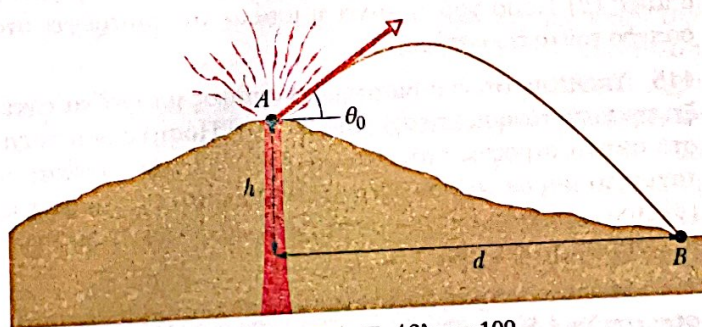
105 (α) Πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός αντικείμενου στον Ισημερινό της Γης, εξαιτίας της περιστροφής της Γης; (β) Πόση θα έπρεπε να ήταν η περίοδος περιστροφής της Γης ώστε αντικείμενα στον Ισημερινό να έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση μέτρου 9.8 m/s^2 ;

106 Ένας άνθρωπος ανεβαίνει ακινητοποιημένη κυλιόμενη σκάλα μήκους 15 m σε 90 s. Όταν στέκεται στην ίδια σκάλα, που τώρα κινείται, ο άνθρωπος ανεβαίνει σε 60 s. Πόσο χρόνο θα έκανε ο ίδιος άνθρωπος να ανέβει στη κινούμενη σκάλα; Εξαρτάται η απάντηση από το μήκος της σκάλας;

107 Μια μπάλα του μπέιζμπολ χτυπιέται από το επίπεδο του εδάφους. Η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος της πάνω από το έδαφος 3.0 s αφού χτυπήθηκε. Στη συνέχεια, 2.5 s αφού έχει φτάσει στο μέγιστο ύψος της, η μπάλα μόλις περνά την περίφραξη που βρίσκεται 97.5 m από το σημείο που χτυπήθηκε. (α) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος πάνω από το έδαφος που φτάνει η μπάλα; (β) Πόσο ψηλή είναι η περίφραξη; (γ) Πόσο μακριά από την περίφραξη χτυπά η μπάλα στο έδαφος;

108 Το βεληνές βλήματος δεν εξαρτάται μόνο από τη v_0 και τη θ_0 αλλά και από την τιμή g της επιτάχυνσης της ελεύθερης πτώσης, που διαφέρει από τοποθεσία σε τοποθεσία. Το 1936, ο Jesse Owens έκανε το παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα εις μήκος με 8.09 m στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Βερολίνου (όπου $g = 9.8128 \text{ m/s}^2$). Υποθέτοντας τις ίδιες τιμές για τις v_0 και θ_0 , πόσο θα διέφερε αυτό το ρεκόρ αν είχε αγωνιστεί το 1956 στη Μελβούρνη (όπου $g = 9.7999 \text{ m/s}^2$);

109 Κατά τις εκρήξεις ηφαιστείων, μπορεί να εκτοξευτούν κομμάτια στερεών βράχων· τέτοιοι βράχοι ονομάζονται ηφαιστειακές βόμβες. Το Σχήμα 4-58 δείχνει μια τομή του όρους Fuji στην Ιαπωνία. (α) Με πόση αρχική ταχύτητα θα έπρεπε να εκτοξευτεί μια τέτοια βόμβα από το άνοιγμα A, υπό γωνία $\theta_0 = 35^\circ$ ως προς την οριζόντια κατεύθυνση, ώστε να πέσει στους πρόποδες του ηφαιστείου στο B, σε κατακόρυφη απόσταση $h = 3.30 \text{ km}$ και οριζόντια απόσταση $d = 9.40 \text{ km}$; Αγνοήστε, για την ώρα την επίδραση του αέρα στην τροχιά της βόμβας. (β) Πόσος θα ήταν ο χρόνος πτήσης; (γ) Η επί-



ΣΧΗΜΑ 4-58 Πρόβλημα 109.

δραση του αέρα αυξάνει ή ελαττώνει την απάντησή σας στο ερώτημα (α);

110 Στις μακράς διάρκειας πτήσεις πάνω από τα μεσαία γεωγραφικά πλάτη του Βορείου Ημισφαιρίου συναντάται ένα ρεύμα αέρα με κατεύθυνση από τ' ανατολικά που μπορεί να επηρεάσει την ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς την επιφάνεια της Γης. Αν ο πιλότος διατηρεί συγκεκριμένη ταχύτητα ως προς τον αέρα (ταχύτητα αεροσκάφους), η ταχύτητα ως προς τη Γη (ταχύτητα εδάφους του αεροπλάνου) είναι μεγαλύτερη όταν η πτήση είναι προς την κατεύθυνση του ρεύματος και μικρότερη όταν είναι αντίθετη προς το ρεύμα. Υποθέστε ότι προγραμματίζετε πτήση μετ' επιστροφής μεταξύ δύο πόλεων που απέχουν 4000 km, με την πτήση μετάβασης στην κατεύθυνση του ρεύματος και την πτήση επιστροφής στην αντίθετη κατεύθυνση. Ο υπολογιστής του αεροπλάνου προτείνει ταχύτητα αεροσκάφους 1000 km/h, για την οποία η διαφορά στους χρόνους μεταξύ της πτήσης μετάβασης κι επιστροφής είναι 70.0 min. Ποια τιμή χρησιμοποιεί ο υπολογιστής για την ταχύτητα του ρεύματος;

111 Σωματίδιο ξεκινά από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα $8.0\hat{j}$ m/s και κινείται στο επίπεδο xy με σταθερή επιτάχυνση $(4.0\hat{i} + 2.0\hat{j})$ m/s². Όταν η συντεταγμένη x του σωματιδίου είναι 29 m, πόση είναι (α) η συντεταγμένη y και (β) η ταχύτητά του;

112 Δρομέας που τρέχει σε κυκλικό στίβο έχει ταχύτητα σταθερού μέτρου 9.2 m/s και κεντρομόλο επιτάχυνση μέτρου 3.8 m/s². Πόση είναι (α) η ακτίνα του στίβου και (β) η περίοδος της κυκλικής κίνησης;

113 Ηλεκτρόνιο που έχει αρχική οριζόντια ταχύτητα μέτρου 1.00×10^9 cm/s κινείται στην περιοχή μεταξύ δύο οριζόντιων μεταλλικών πλακών που είναι ηλεκτρικά φορτισμένες. Σε αυτή την περιοχή, το ηλεκτρόνιο διασχίζει οριζόντια απόσταση 2.00 cm και έχει σταθερή προς τα κάτω, επιτάχυνση μέτρου 1.00×10^{17} cm/s² λόγω των φορτισμένων πλακών. Να βρείτε (α) το χρόνο που κάνει το ηλεκτρόνιο να διασχίσει τα 2.00 cm, (β) την κατακόρυφη απόσταση που διανύει σε αυτό το χρονικό διάστημα, και τα μέτρα (γ) της οριζόντιας και (δ) της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας καθώς εξέρχεται από την περιοχή.

114 Ανελκυστήρας χωρίς οροφή ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Ένα αγόρι στον ανελκυστήρα ρίχνει μια μπάλα απευθείας προς τα πάνω, από ύψος 2.0 m πάνω από το δάπεδο του ανελκυστήρα, τη στιγμή ακριβώς που ο ανελκυστήρας βρίσκεται 28 m πάνω από το έδαφος. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας ως προς τον ανελκυστήρα είναι 20 m/s. (α) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος πάνω από το έδαφος στο οποίο φτάνει η μπάλα; (β) Πόσο χρόνο κάνει η μπάλα να επιστρέψει στο δάπεδο του ανελκυστήρα;

115 Υποθέστε ότι ένα διαστημικό σκάφος μπορεί να αντέξει την καταπόνηση επιτάχυνσης 20g. (α) Πόση είναι η ελάχιστη ακτίνα στροφής ενός τέτοιου σκάφους που κινείται με ταχύτητα ίση με το ένα δέκατο της ταχύτητας του φωτός; (β) Πόσος χρόνος απαιτείται για να ολοκληρώσει στροφή 90° με αυτή την ταχύτητα;

116 Με πόση αρχική ταχύτητα θα πρέπει ο μπασκετμπολίστας του Σχ. 4-59 να ρίξει τη μπάλα, με γωνία $\theta_0 = 55^\circ$ πάνω από

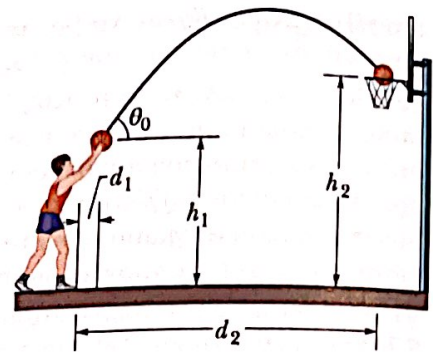
την οριζόντιο, για να ευστοχήσει στην ελεύθερη βολή; Οι οριζόντιες αποστάσεις είναι $d_1 = 1.0$ ft και $d_2 = 14$ ft, ενώ τα ύψη είναι $h_1 = 7.0$ ft και $h_2 = 10$ ft.

117 Ξύλινο, κλειστό, βαγόνι κινείται σε ευθύγραμμη σιδηροτροχιά με ταχύτητα v_1 . Ένας ελεύθερος σκοπευτής πυροβολεί εναντίον του (αρχική ταχύτητα σφαίρας v_2) με τουφέκι μεγάλης ισχύος. Η σφαίρα διαπερνά και τους δύο τοίχους του βαγονιού που είναι παράλληλοι με το μήκος του, με τις οπές εισόδου και εξόδου της σφαίρας να βρίσκονται ακριβώς απέναντι η μία από την άλλη, όπως φαίνονται μέσα από το βαγόνι. Από ποια κατεύθυνση, ως προς τη σιδηροτροχιά, βλήθηκε η σφαίρα; Υποθέστε ότι η σφαίρα δεν εκτρέπεται όταν εισέλθει στο βαγόνι, αλλά η ταχύτητά της μειώνεται κατά 20%. Πάρτε την $v_1 = 85$ km/h και την $v_2 = 650$ m/s. (Γιατί δεν χρειάζεται να γνωρίζετε το πλάτος του βαγονιού;)

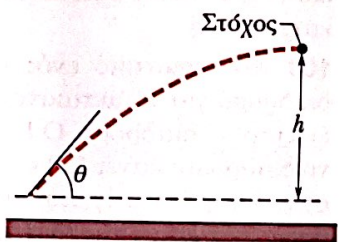
118 Πρόκειται να ρίξετε μια μπάλα με ταχύτητα 12.0 m/s προς στόχο που βρίσκεται σε ύψος $h = 5.00$ m πάνω από το έδαφος από όπου εσείς ρίχνετε τη μπάλα (Σχ. 4-60). Θέλετε η ταχύτητα της μπάλας να είναι οριζόντια τη στιγμή που φτάνει στο στόχο. (α) Με πόση γωνία θ πάνω από την οριζόντιο πρέπει να πετάξετε τη μπάλα; (β) Πόση είναι η οριζόντια απόσταση από το σημείο βολής έως τον στόχο; (γ) Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας μόλις φτάνει στο στόχο;

119 Το Σχήμα 4-61 δείχνει τη διαδρομή που ακολούθησε ένας μεθυσμένος σε επίπεδο έδαφος, από το αρχικό σημείο i έως το τελικό σημείο f . Οι γωνίες είναι $\theta_1 = 30.0^\circ$, $\theta_2 = 50.0^\circ$ και $\theta_3 = 80.0^\circ$, και οι αποστάσεις είναι $d_1 = 5.00$ m, $d_2 = 8.00$ m και $d_3 = 12.0$ m. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία της μετατόπισής του από το i στο f .

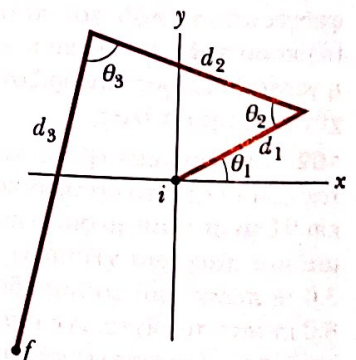
120 Βλήμα ρίχνεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 30.0$ m/s από το επίπεδο του εδάφους προς στόχο που βρίσκεται στο έδαφος, σε απόσταση $R = 20.0$ m, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-62. Πόση είναι (α) η ελάχιστη και (β) η μέγιστη γωνία



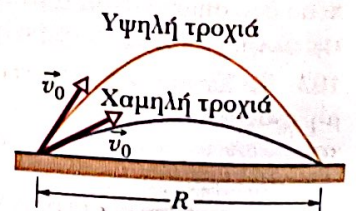
ΣΧΗΜΑ 4-59 Πρόβλημα 116.



ΣΧΗΜΑ 4-60 Πρόβλημα 118.



ΣΧΗΜΑ 4-61 Πρόβλημα 119.



ΣΧΗΜΑ 4-62 Πρόβλημα 120.

εκτόξευσης που θα επιτρέψει στο βλήμα να χτυπήσει το στόχο;

121 Η όαση A βρίσκεται 90 km δυτικά της όασης B . Μια καμήλα ξεκινάει από την όαση A και κάνει 50 h για να διανύσει 75 km υπό γωνία 37° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. Στη συνέχεια κάνει 35 h για να διανύσει 65 km προς το νότο. Μετά ξεκουράζεται για 5.0 h. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση της μετατόπισης της καμήλας στο σημείο ξεκούρασης, ως προς το A ; Από τη χρονική στιγμή που η καμήλα φεύγει από το A μέχρι το τέλος του υπόλοιπου χρονικού διαστήματος, (γ) πόσο είναι το μέτρο, (δ) ποια είναι η κατεύθυνση της μέσης ταχύτητάς της και (ε) πόση είναι η μέση αριθμητική ταχύτητά της; Η καμήλα ήπια νερό για τελευταία φορά στο A · πρέπει να βρίσκεται στο B σε λιγότερο από 120 h για να ξαναπιει νερό. (στ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο και (ζ) ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της μέσης ταχύτητας της καμήλας αφού ξεκουραστεί για να φτάσει στο B και να πει νερό την τελευταία στιγμή;

122 Μια γραφική παράσταση έκπληξη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα burrito εκτοξεύεται από το επίπεδο του εδάφους, με αρχική ταχύτητα 16.0 m/s και γωνία εκτόξευσης θ_0 . Φανταστείτε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ που κατευθύνεται διαρκώς από το σημείο εκτόξευσης στο burrito κατά τη διάρκεια της πτήσης. Να κάνετε τη γραφική παράσταση του μέτρου r του διανύσματος θέσης για (α) $\theta_0 = 40.0^\circ$ και (β) $\theta_0 = 80.0^\circ$. Για $\theta_0 = 40.0^\circ$, (γ) πότε φτάνει το r στη μέγιστη τιμή του, (δ) πόση είναι αυτή η τιμή και πόσο μακριά (ε) οριζόντια και (στ) κατακόρυφα βρίσκεται το burrito από το σημείο εκτόξευσης; Για $\theta_0 = 80.0^\circ$, (ζ) πότε φτάνει το r στη μέγιστη τιμή του, (η) πόση είναι αυτή η τιμή και πόσο μακριά (θ) οριζόντια και (ι) κατακόρυφα βρίσκεται το burrito από το σημείο εκτόξευσης;

123 Στο Ενδεικτικό Πρόβλημα 4-7β, η οβίδα ρίχνεται σε οριζόντια απόσταση 686 m από το κανόνι που βρίσκεται στο επίπεδο της θάλασσας, υπό γωνία 45° ως προς την οριζόντια κατεύθυνση. Πόσο μεγαλύτερη θα ήταν η οριζόντια απόσταση αν το κανόνι ήταν 30 m ψηλότερα;

124 (α) Αν ένα ηλεκτρόνιο εκτοξευτεί οριζόντια με ταχύτητα 3.0×10^6 m/s, πόσο μακριά θα πέσει διασχίζοντας 1.0 m οριζόντιας απόστασης; (β) Η απάντηση αυξάνεται ή μειώνεται όταν η αρχική ταχύτητα αυξάνεται;

125 Το μέτρο της ταχύτητας ενός βλήματος όταν αυτό βρίσκεται στο μέγιστο ύψος του πάνω από το επίπεδο του εδάφους είναι 10 m/s. (α) Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος 1.0 s πριν φτάσει στο μέγιστο ύψος; (β) Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος 1.0 s αφού έχει φτάσει στο μέγιστο ύψος; Αν πάρουμε $x = 0$ και $y = 0$ να βρίσκονται στο σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος και θετική κατεύθυνση x να είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας στο σημείο αυτό, πόση είναι (γ) η συντεταγμένη x και (δ) η συντεταγμένη y του βλήματος 1.0 s πριν φτάσει στο μέγιστο ύψος του και (ε) η συντεταγμένη x και (στ) η συντεταγμένη y 1.0 s αφού έχει φτάσει στο μέγιστο ύψος του;

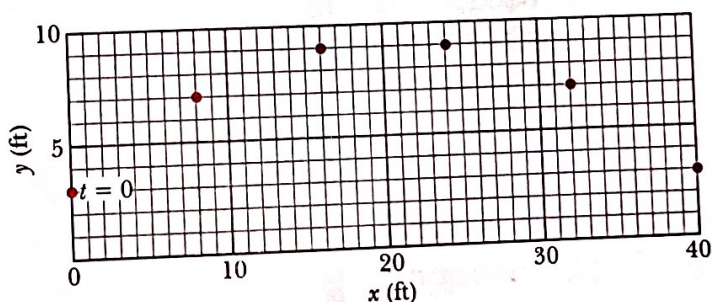
126 Ένα τρομαγμένο κουνέλι που κινείται με 6.0 m/s ανατολικά, εισέρχεται σε επίπεδη περιοχή καλυμμένη από πάγο όπου η τριβή είναι αμελητέα. Καθώς το κουνέλι γλιστράει στον πάγο, η δύναμη του ανέμου έχει ως αποτέλεσμα το κουνέλι

να έχει επιτάχυνση 1.4 m/s^2 βόρεια. Επιλέξτε σύστημα συντεταγμένων με την αρχή των αξόνων στην αρχική θέση του κουνελιού στον πάγο και τη θετική κατεύθυνση του άξονα x προς την ανατολή. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, (α) πόση είναι η ταχύτητα του κουνελιού και (β) ποια είναι η θέση του, αφού έχει γλιστρήσει για 3.0 s;

127 Ο πιλότος αεροσκάφους πετάει ανατολικά ως προς το έδαφος, με τον άνεμο να πνέει με ταχύτητα 20 km/h προς το νότο. Αν η ταχύτητα του αεροσκάφους σε περίπτωση που δεν υπήρχε άνεμος ήταν 70 km/h, πόση είναι η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το έδαφος;

128 Ο ρίπτης της μπάλας σε ένα παιχνίδι slow-pitch softball ελευθερώνει τη μπάλα σε σημείο 3.0 ft πάνω από το επίπεδο του εδάφους. Ένα στροβοσκοπικό διάγραμμα της θέσης της μπάλας φαίνεται στο Σχ. 4-63, όπου οι ενδείξεις απέχουν χρονικά κατά 0.25 s και η μπάλα αφήνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$. (α) Πόση είναι η αρχική ταχύτητα της μπάλας; (β) Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος της πάνω από το επίπεδο του εδάφους; (γ) Πόσο είναι αυτό το μέγιστο ύψος;

129 Η αστυνομία της πολιτείας του New Hampshire χρησιμοποιεί αεροσκάφη για να επιβάλει το όριο ταχύτητας στους αυτοκινητοδρόμους. Υποθέστε ότι ένα από τα αεροπλάνα της έχει ταχύτητα 135 mi/h σε ακίνητο αέρα. Πετάει βόρεια έτσι ώστε να είναι διαρκώς ακριβώς πάνω από αυτοκινητόδρομο με κατεύθυνση βορρά-νότου. Επίγειος παρατηρητής λέει στον πιλότο μέσω ασυρμάτου ότι πνέει άνεμος 70.0 mi/h αλλά αμελεί να δώσει την κατεύθυνση του ανέμου. Ο πιλότος παρατηρεί ότι παρά τον άνεμο το αεροπλάνο μπορεί να ταξιδεύει 135 mi κατά μήκος του αυτοκινητόδρομου σε 1.00 h. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα εδάφους είναι η ίδια με την ταχύτητα αν δεν υπήρχε άνεμος. (α) Από ποια κατεύθυνση πνέει ο άνεμος; (β) Προς τα πού κατευθύνεται το αεροπλάνο, δηλαδή προς ποια κατεύθυνση δείχνει;



ΣΧΗΜΑ 4-63 Πρόβλημα 128.

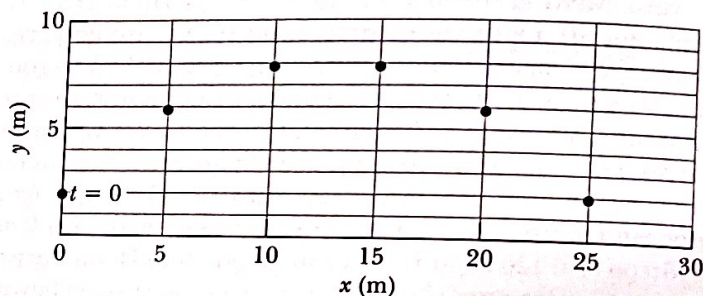
130 Η θέση $\vec{r}$ σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy δίνεται από τη σχέση $\vec{r} = 2\hat{i} + 2\sin(\pi/4 \text{ rad/s})t\hat{j}$, όπου το $\vec{r}$ είναι σε μέτρα και το t είναι σε δευτερόλεπτα. (α) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες x και y της θέσης του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1.0, 2.0, 3.0$ και 4.0 s και να σχεδιάσετε την τροχιά του σωματιδίου στο επίπεδο xy για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4.0$ s. (β) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t = 1.0, 2.0$ και 3.0 s. Να δείξετε ότι η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και προς την κατεύθυνση που κινείται το σωματίδιο σε κάθε χρονική στιγμή, σχεδιάζοντας τα διανύσματα της ταχύτητας

στο διάγραμμα της τροχιάς του σωματιδίου του ερωτήματος (α). (γ) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t = 1.0, 2.0$ και 3.0 s.

131 Παίκτης του γκολφ ξεκινά από ύψωμα, δίνοντας στη μπάλα του αρχική ταχύτητα 43 m/s με γωνία 30° πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση. Η μπάλα πέφτει σε περιοχή με γρασίδι, σε οριζόντια απόσταση 180 m από το σημείο βολής. Υποθέστε ότι η περιοχή με το γρασίδι είναι επίπεδη. (α) Πόσο πάνω από την περιοχή με γρασίδι βρίσκεται το ύψωμα; (β) Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας καθώς χτυπά στο γρασίδι;

132 Σε πλανήτη κάποιου μακρινού ηλιακού συστήματος γίνεται πρωτάθλημα στίβου. Σφυροβόλος ρίχνει βολή από σημείο 2.0 m πάνω από το επίπεδο του εδάφους. Το στροβοσκοπικό διάγραμμα της θέσης της σφαίρας φαίνεται στο Σχ. 4-64, όπου οι ενδείξεις απέχουν κατά 0.25 s και η σφαίρα ελευθερώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$. (α) Πόση είναι η αρχική

ταχύτητα της σφαίρας, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων; (β) Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της ελεύθερης πτώσης στον πλανήτη; (γ) Σε πόσο χρόνο μετά την ελευθέρωσή της, η σφαίρα φτάνει στο έδαφος; (δ) Αν γίνει μια ακριβώς ίδια βολή στη Γη, σε πόσο χρόνο μετά την ελευθέρωσή της η σφαίρα φτάνει στο έδαφος;



ΣΧΗΜΑ 4-64 Πρόβλημα 132.