

Ισορροπία και Ελαστικότητα

12-1 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 12.01** Να διακρίνετε τις έννοιες, ισορροπία και στατική ισορροπία.
12.02 Να προσδιορίζετε τις συνθήκες για στατική ισορροπία.

- 12.03** Να εξηγήτε τι είναι το κέντρο βάρους και πώς συνδέεται με το κέντρο μάζας.
12.04 Για δεδομένη κατανομή σωματιδίων, να υπολογίζετε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους και του κέντρου μάζας.

Βασικές Ιδέες

- Ένα στερεό σώμα που ηρεμεί λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας. Για ένα τέτοιο σώμα το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν,

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}).$$

Αν όλες οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο xy , αυτή η διανυσματική εξίσωση είναι ισοδύναμη με δύο εξισώσεις συνιστωσών,

$$F_{\text{net},x} = 0 \text{ και } F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}).$$

- Η στατική ισορροπία υπονοεί επίσης ότι το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σώμα ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν, ή

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}).$$

Αν οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο xy , τα διανύσματα όλων των ροπών είναι παράλληλα στον άξονα z και η εξίσωση ισορροπίας των ροπών είναι ισοδύναμη με μία μόνο εξίσωση συνιστωσών,

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}).$$

- Η βαρυτική δύναμη δρα ανεξάρτητα σε κάθε στοιχείο του σώματος. Το συνολικό αποτέλεσμα όλων των επιμέρους δράσεων μπορεί να βρεθεί αν φανταστούμε μια ισοδύναμη συνολική βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ να ασκείται στο κέντρο βάρους. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι ίδια για όλα τα στοιχεία του σώματος, το κέντρο βάρους είναι το κέντρο μάζας.

Φυσική Σημασία

Οι ανθρώπινες κατασκευές υποτίθεται ότι είναι σταθερές, παρά τις δυνάμεις που τους ασκούνται. Ένα κτήριο, για παράδειγμα, θα πρέπει να είναι σταθερό, πάρα τη βαρυτική δύναμη και τις δυνάμεις του αέρα που του ασκούνται και μια γέφυρα θα πρέπει να είναι σταθερή παρά τη βαρυτική δύναμη που την έλκει προς τα κάτω και το επαναλαμβανόμενο τράνταγμα που δέχεται από αυτοκίνητα και φορτηγά.

Ένα από τα αντικείμενα μελέτης της Φυσικής είναι το τι επιτρέπει σε ένα αντικείμενο να είναι σταθερό παρά τις οποιοσδήποτε δυνάμεις που του ασκούνται. Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε δυο κύριες πλευρές της ευστάθειας: την *ισορροπία* των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται σ' ένα άκαμπτο στερεό και την *ελαστικότητα* παραμορφώσιμων στερεών αντικειμένων, μια ιδιότητα που καθορίζει το πώς μπορούν να παραμορφωθούν αυτά τα σώματα. Όταν αυτή η φυσική εφαρμόζεται σωστά, γίνεται το αντικείμενο αναρίθμητων άρθρων σε περιοδικά φυσικής και εφαρμοσμένης μηχανικής όταν εφαρμόζεται λανθασμένα, γίνεται το αντικείμενο αναρίθμητων άρθρων σ' εφημερίδες και νομικά περιοδικά.

Ισορροπία

Θεωρήστε τα παρακάτω αντικείμενα (1) ένα βιβλίο πάνω σ' ένα τραπέζι, (2) έναν δίσκο του χόκεϊ που ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα πάνω σ' επιφάνεια χωρίς τριβές, (3) τα περιστρεφόμενα πτερύγια ενός ανεμιστήρα οροφής και (4) τον τροχό ενός ποδηλάτου που κινείται σε ευθύγραμμη διαδρομή με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Για καθένα από αυτά τα τέσσερα αντικείμενα,

1. Η ορμή $\vec{P}$ του κέντρου μάζας του είναι σταθερή.
2. Η στροφορμή του $\vec{L}$ ως προς το κέντρο μάζας του, ή ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο, είναι επίσης σταθερή.

Λέμε ότι τέτοια αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**. Οι δύο προϋποθέσεις για ισορροπία είναι επομένως

$$\vec{P} = \text{σταθερά} \quad \text{και} \quad \vec{L} = \text{σταθερά} \quad (12-1)$$

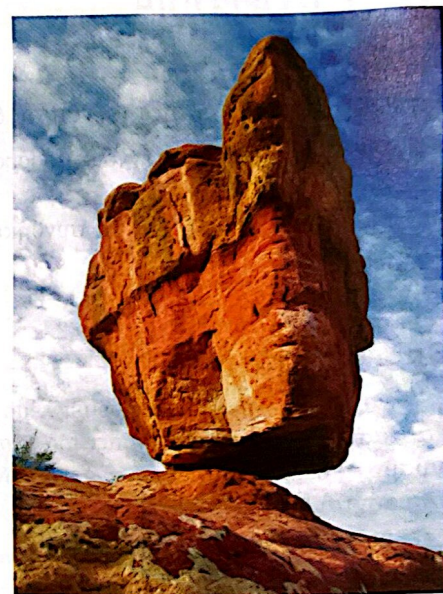
Το ενδιαφέρον μας σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζεται σε περιπτώσεις στις οποίες οι σταθερές στην Εξ. 12-1 είναι μηδέν δηλαδή, κατά κύριο λόγο μας ενδιαφέρουν αντικείμενα τα οποία δεν κινούνται κατά οποιονδήποτε τρόπο – ούτε μεταφερόμενα ούτε περιστρεφόμενα – στο σύστημα αναφοράς από το οποίο τα παρατηρούμε. Τέτοια αντικείμενα βρίσκονται σε **στατική ισορροπία**. Από τα τέσσερα αντικείμενα που αναφέρθηκαν στην αρχή της παραγράφου, μόνο ένα – το βιβλίο που στηρίζεται στο τραπέζι – βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

Ο βράχος που ισορροπεί στο Σχ. 12-1 είναι άλλο ένα παράδειγμα αντικειμένου το οποίο, προς το παρόν τουλάχιστον, βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Μοιράζεται αυτήν την ιδιότητα με αναρίθμητες άλλες δομές, όπως καθεδρικούς ναούς, σπίτια, αρχαιοθήκες, καντίνες γρήγορου φαγητού, που παραμένουν στάσιμα με το χρόνο.

Όπως είδαμε στην Εν. 8-3, αν ένα σώμα επιστρέφει στην κατάσταση στατικής ισορροπίας από την οποία είχε προηγουμένως απομακρυνθεί από κάποια δύναμη $\vec{F}$, λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε **ευσταθή** στατική ισορροπία. Ένας βόλος τοποθετημένος στο κάτω μέρος μιας ημισφαιρικής κοιλότητας είναι ένα παράδειγμα. Ωστόσο, αν μια μικρή δύναμη μπορεί να μετατοπίσει το σώμα και να τερματίσει την ισορροπία, το σώμα βρίσκεται σε **ασταθή** στατική ισορροπία.

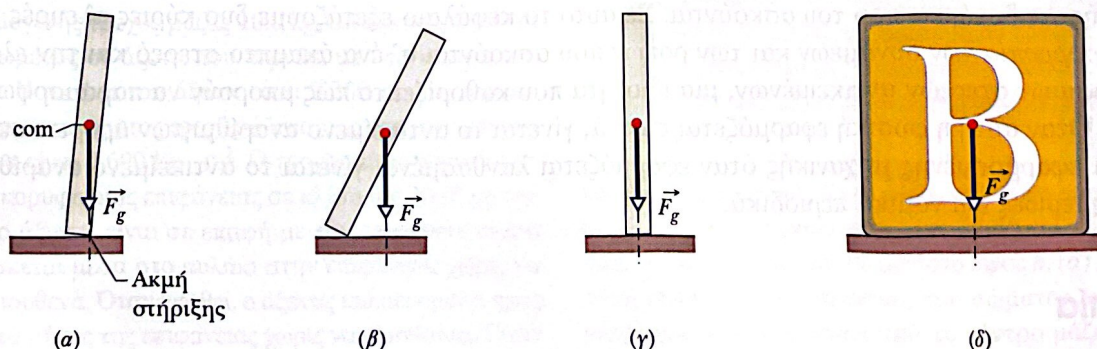
Ντόμινο Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ισορροπούμε ένα ντόμινο έχοντας το κέντρο μάζας του ντόμινο κατακόρυφα πάνω από την ακμή στην οποία στηρίζεται, όπως στο Σχ. 12-2α. Η ροπή ως προς την ακμή στήριξης εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης $\vec{F}_g$ στο ντόμινο είναι μηδέν επειδή η ευθεία δράσης της $\vec{F}_g$ διέρχεται από αυτή την ακμή. Συνεπώς το ντόμινο βρίσκεται σε ισορροπία. Βέβαια, ακόμα και μια ελάχιστη δύναμη λόγω τυχαίας διαταραχής τερματίζει την ισορροπία. Καθώς η ευθεία δράσης της $\vec{F}_g$ κινείται προς τη μια πλευρά της ακμής στήριξης (όπως στο Σχ. 12-2β) η ροπή λόγω της $\vec{F}_g$ αυξάνει την περιστροφή του ντόμινο. Για αυτό το λόγο το ντόμινο του Σχ. 12-2α βρίσκεται σε ασταθή στατική ισορροπία.

Το ντόμινο του Σχ. 12-2γ δεν είναι τόσο ασταθές. Μια δύναμη, για να ανατρέψει αυτό το ντόμινο, θα έπρεπε να το περιστρέψει διαμέσου και πέρα από τη θέση ισορροπίας του Σχ. 12-2α, στην οποία το κέντρο μάζας βρί-



Σχήμα 12-1 Ένας βράχος που ισορροπεί. Αν και η στήριξή του μοιάζει επισφαλής, ο βράχος βρίσκεται σε στατική ισορροπία. (Kanwarjit Singh Boparai/Shutterstock)

Για να ανατρέψετε τον κύβο, το κέντρο μάζας πρέπει να περάσει πάνω από την ακμή στήριξης.

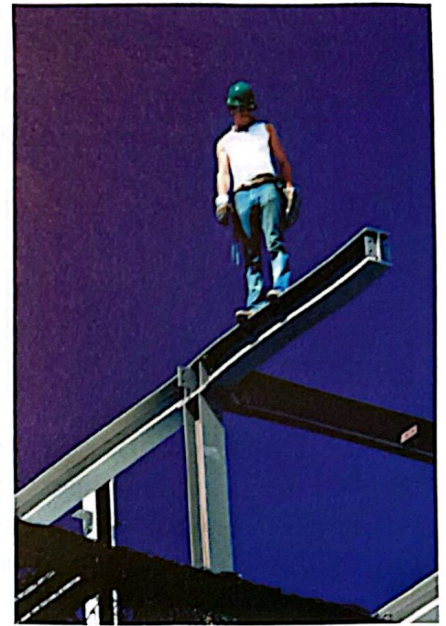


Σχήμα 12-2 (α) Ένα ντόμινο που ισορροπεί σε μια ακμή, με το κέντρο μάζας του κατακόρυφα πάνω από αυτή. Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ στο ντόμινο έχει κατεύθυνση που περνάει από την ακμή στήριξης. (β) Αν το ντόμινο περιστραφεί έστω και ελάχιστα από τον προσανατολισμό στον οποίο ισορροπεί, τότε η $\vec{F}_g$ προκαλεί ροπή που αυξάνει την περιστροφή. (γ) Ένα ντόμινο κατακόρυφο στηριζόμενο μια στενή πλευρά είναι κάπως πιο ευσταθές από ότι το ντόμινο στη θέση (α). (δ) Ένας κύβος είναι ακόμα πιο ευσταθής.

σκεται πάνω από την ακμή στήριξης. Μια ελαφριά δύναμη δεν θα ανατρέψει αυτό το ντόμινο, αλλά ένα δυνατό τίναγμα του δαχτύλου σας πάνω του σίγουρα θα το ανατρέψει. (Αν στήσουμε μια αλυσίδα τέτοιων όρθιων ντόμινο, ένα τίναγμα του δαχτύλου στο πρώτο μπορεί να προκαλέσει την πτώση ολόκληρης της αλυσίδας.)

Ο Κύβος Ο παιδικός κύβος του Σχ. 12-2δ είναι ακόμα πιο ευσταθής, επειδή το κέντρο μάζας του θα έπρεπε να μετακινηθεί ακόμα περισσότερο για να το κάνουμε να περάσει πάνω από μια ακμή στήριξης. Ένα τίναγμα του δαχτύλου ίσως να μην ανατρέψει τον κύβο. (Για αυτό δεν βλέπετε ποτέ μια αλυσίδα ανατρεπόμενων κύβων.) Ο εργάτης του Σχ. 12-3 έχει ομοιότητα και ως προς το ντόμινο, και ως προς τον κύβο: παράλληλα με τη δοκό η στάση του έχει φαρδιά βάση και είναι ευσταθής κάθετα στη δοκό ή βάση του είναι στενή και είναι ασταθής (και στο έλεος μιας δυνατής ριπής αέρα.)

Η ανάλυση της στατικής ισορροπίας είναι πολύ σημαντική στην εφαρμοσμένη μηχανική. Ο μηχανικός σχεδίασης πρέπει να απομονώσει και να αναγνωρίσει όλες τις εξωτερικές δυνάμεις και ροπές που μπορούν να επιδράσουν σε μια δομή και, με καλό σχεδιασμό και σοφή επιλογή των υλικών, να εξασφαλίσει ότι η δομή θα παραμείνει σταθερή κάτω από αυτά τα φορτία. Μια τέτοια ανάλυση είναι απαραίτητη για να εξασφαλιστεί ότι, για παράδειγμα, οι γέφυρες δεν θα καταρρεύσουν από την κυκλοφοριακή κίνηση και τα φορτία των ανέμων (δυνατοί άνεμοι) και ότι το σύστημα προσγείωσης των αεροσκαφών θα λειτουργεί και μετά τους κραδασμούς μιας απότομης προσγείωσης.



Σχήμα 12-3 Ένας εργάτης οικοδομής που ισορροπεί σε μια χαλύβδινη δοκό βρίσκεται σε στατική ισορροπία, είναι όμως πιο ευσταθής παράλληλα στη δοκό παρά κάθετα σε αυτή. (Robert Brenner/PhotoEdit)

Προϋποθέσεις για Ισορροπία

Η μεταφορική κίνηση ενός σώματος διέπεται από τον δεύτερο νόμο του Newton στη μορφή που περιλαμβάνει την ορμή και δίνεται από την Εξ. 9-27 ως

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (12-2)$$

Αν το σώμα βρίσκεται σε μεταφορική ισορροπία –δηλαδή, αν το $\vec{P}$ είναι σταθερό– τότε $d\vec{P}/dt = 0$ και πρέπει να έχουμε

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}). \quad (12-3)$$

Η περιστροφική κίνηση ενός σώματος διέπεται από το δεύτερο νόμο του Newton στη μορφή που περιλαμβάνει τη στροφορμή και δίνεται από την Εξ. 11-29 ως

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (12-4)$$

Αν το σώμα βρίσκεται σε περιστροφική ισορροπία –δηλαδή, αν το $\vec{L}$ είναι σταθερό– τότε $d\vec{L}/dt = 0$ και πρέπει να έχουμε

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}). \quad (12-5)$$

Συνεπώς, οι δυο προϋποθέσεις για να βρίσκεται ένα σώμα σε ισορροπία είναι οι εξής:



1. Το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα πρέπει να είναι μηδέν.
2. Το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σώμα, μετρημένες ως προς οποιοδήποτε πιθανό σημείο, πρέπει επίσης να είναι μηδέν.

Αυτές οι προϋποθέσεις προφανώς ισχύουν για στατική ισορροπία. Επίσης ισχύουν για την πιο γενική ισορροπία στην οποία τα $\vec{P}$ και $\vec{L}$ είναι σταθερά αλλά όχι μηδέν.

Οι Εξ. 12-3 και 12-5, όντας διανυσματικές εξισώσεις, είναι κάθε μία ισοδύναμη με τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις συνιστωσών, μία για κάθε άξονα του συστήματος συντεταγμένων:

Ισορροπία δυνάμεων	Ισορροπία ροπών	
$F_{\text{net},x} = 0$	$\tau_{\text{net},x} = 0$	
$F_{\text{net},y} = 0$	$\tau_{\text{net},y} = 0$	
$F_{\text{net},z} = 0$	$\tau_{\text{net},z} = 0$	(12-6)

Οι Κύριες Εξισώσεις Θα απλοποιήσουμε τα πράγματα εξετάζοντας μόνο περιπτώσεις στις οποίες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα βρίσκονται στο επίπεδο xy . Αυτό σημαίνει ότι οι μόνες ροπές που μπορούν να ασκηθούν στο σώμα τείνουν να προκαλέσουν περιστροφή γύρω από άξονα παράλληλο στον άξονα z . Με αυτή την υπόθεση, απαλείφουμε μια εξίσωση για τη δύναμη και δύο εξισώσεις για τη ροπή από τις Εξ. 12-6, αφήνοντας τις

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}), \quad (12-7)$$

$$F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}), \quad (12-8)$$

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}), \quad (12-9)$$

Εδώ, $\tau_{\text{net},z}$ είναι η συνολική ροπή που προκαλούν οι εξωτερικές δυνάμεις είτε ως προς τον στον άξονα z είτε ως προς *οποιοδήποτε* άξονα παράλληλο σ' αυτόν.

Ένας δίσκος του χόκεϊ που ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα πάνω στον πάγο ικανοποιεί τις Εξ. 12-7, 12-8 και 12-9 και για αυτό το λόγο βρίσκεται σε ισορροπία, *αλλά όχι σε στατική ισορροπία*. Για στατική ισορροπία η ορμή $\vec{P}$ του δίσκου δεν πρέπει να είναι μόνο σταθερή, αλλά πρέπει επίσης να είναι μηδέν άρα ο δίσκος πρέπει να είναι ακίνητος πάνω στον πάγο. Συνεπώς, υπάρχει ακόμα μια προϋπόθεση για τη στατική ισορροπία:

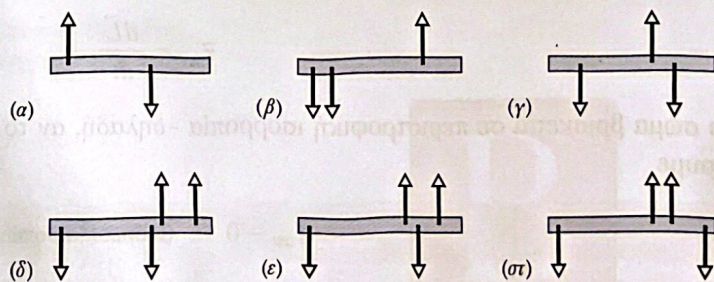


3. Η γραμμική ορμή $\vec{P}$ του σώματος πρέπει να είναι μηδέν.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1

Το σχήμα δίνει έξι κατόψεις μιας ομογενούς ράβδου στις οποίες δύο ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται κάθετα στη ράβδο. Αν τα μέτρα των δυνάμεων ρυθμιστούν κατάλληλα (χωρίς να γίνουν μηδενικά), σε ποιες περιπτώσεις μπορεί η ράβδος να βρίσκεται σε στατική ισορροπία;



Το Κέντρο Βάρους

Η βαρυτική δύναμη σ' ένα εκτεταμένο σώμα είναι το διανυσματικό άθροισμα των βαρυτικών δυνάμεων που στα επιμέρους στοιχεία (τα άτομα) του σώματος. Αντί να θεωρήσουμε όλα αυτά τα επιμέρους στοιχεία, μ

να πούμε ότι



Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ σ' ένα σώμα ουσιαστικά ασκείται σ' ένα μόνο σημείο, που ονομάζεται **κέντρο βάρους** (cog-center of gravity) του σώματος.

Εδώ η λέξη «ουσιαστικά» σημαίνει ότι, αν οι δυνάμεις στα επιμέρους στοιχεία με κάποιο τρόπο σταματούσαν να ενεργούν και η δύναμη $\vec{F}_g$ δρα στο κέντρο βάρους, η συνολική δύναμη και η συνολική ροπή (ως προς οποιοδήποτε σημείο) που ασκείται στο σώμα δεν θα άλλαζε.

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ ασκείται στο κέντρο μάζας (com) του σώματος. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε ότι το κέντρο βάρους βρίσκεται στο κέντρο μάζας. Θυμηθείτε ότι, για ένα σώμα μάζας M , η δύναμη $\vec{F}_g$ είναι ίση με $M\vec{g}$, όπου $\vec{g}$ είναι η επιτάχυνση που θα προκαλούσε η δύναμη αν το σώμα επρόκειτο να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Στην απόδειξη που ακολουθεί, δείχνουμε ότι



Αν το $\vec{g}$ είναι το ίδιο για όλα τα στοιχεία ενός σώματος, τότε το κέντρο βάρους του σώματος (cog) συμπίπτει με το κέντρο μάζας του σώματος (com).

Αυτό είναι προσεγγιστικά σωστό για καθημερινά αντικείμενα γιατί το $\vec{g}$ μεταβάλλεται πολύ λίγο κατά μήκος της επιφάνειας της Γης και μειώνεται ελαφρώς σε μέτρο με το υψόμετρο. Συνεπώς, για σώματα όπως ένα ποντίκι ή ένα ελάφι, είμαστε δικαιολογημένοι που θεωρούμε ότι η βαρυτική δύναμη ασκείται στο κέντρο μάζας. Μετά την ακόλουθη απόδειξη, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε αυτή την υπόθεση.

Απόδειξη

Αρχικά, θεωρούμε τα επιμέρους στοιχεία ενός σώματος. Το Σχ.12-4α δείχνει ένα εκτεταμένο σώμα, μάζας M , και ένα από τα στοιχεία του, μάζας m_i . Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_{gi}$ ασκείται σ' ένα τέτοιο στοιχείο και είναι ίση με $m_i\vec{g}_i$. Ο δείκτης στο $\vec{g}_i$ σημαίνει ότι $\vec{g}_i$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στη θέση του στοιχείου i (μπορεί να είναι διαφορετική γι' άλλα στοιχεία).

Για το σώμα του Σχ.12-4α, η κάθε δύναμη $\vec{F}_{gi}$ προκαλεί ροπή τ_i στο στοιχείο ως προς την αρχή των αξόνων O , με βραχίονα ροπής x_i . Χρησιμοποιώντας την Εξ. 10-41 ($\tau = r_{\perp}F$), μπορούμε να γράψουμε τη ροπή τ_i ως

$$\tau_i = x_i F_{gi}. \quad (12-10)$$

Η συνολική ροπή σ' όλα τα στοιχεία του σώματος είναι τότε

$$\tau_{\text{net}} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi}. \quad (12-11)$$

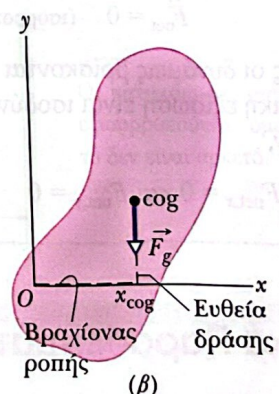
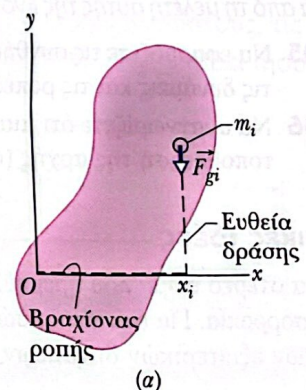
Στη συνέχεια, θεωρούμε το σώμα σαν σύνολο. Το Σχ. 12-4β δείχνει τη βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ που ασκείται στο κέντρο βάρους του σώματος. Αυτή η δύναμη προκαλεί ροπή τ στο σώμα ως προς την αρχή των αξόνων O , με βραχίονα ροπής x_{cog} . Χρησιμοποιώντας ξανά την Εξ. 10-41, μπορούμε να γράψουμε αυτή τη ροπή σαν

$$\tau = x_{\text{cog}} F_g. \quad (12-12)$$

Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ στο σώμα είναι ίση με το άθροισμα των βαρυτικών δυνάμεων $\vec{F}_{gi}$ σε όλα τα στοιχεία, επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το F_g με το $\sum F_{gi}$ στην Εξ. 12-12 και να γράψουμε

$$\tau = x_{\text{cog}} \sum F_{gi}. \quad (12-13)$$

Θυμηθείτε τώρα ότι η ροπή λόγω της δύναμης $\vec{F}_g$ που ασκείται στο κέντρο βάρους είναι ίση με τη συνολική ροπή λόγω όλων των δυνάμεων $\vec{F}_{gi}$ που ασκούνται σε όλα τα στοιχεία του σώματος. (Ετσι ορίσαμε το κέντρο βάρους.) Συνεπώς, το τ στην Εξ. 12-13 είναι ίσο με το τ_{net} στην Εξ. 12-11. Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις, μπορούμε να γράψουμε



Σχήμα 12-4 (α) Ένα στοιχείο μάζας m_i σ' ένα εκτεταμένο σώμα. Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_{gi}$ στο στοιχείο έχει βραχίονα ροπής x_i ως προς την αρχή O του συστήματος αξόνων. (β) Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ στο σώμα λέμε ότι ασκείται στο κέντρο βάρους (cog) του σώματος. Εδώ η $\vec{F}_g$ έχει βραχίονα ροπής x_{cog} ως προς την αρχή O .

$$x_{\text{cog}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$

Αντικαθιστώντας το F_{gi} με το $m_i g_i$ μας δίνει

$$x_{\text{cog}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (12-14)$$

Εδώ τώρα βρίσκεται η ιδέα-κλειδί: αν οι επιταχύνσεις g_i σε όλες τις θέσεις των στοιχείων είναι οι ίδιες, μπορούμε να απαλείψουμε το g_i από αυτή την εξίσωση και να γράψουμε

$$x_{\text{cog}} \sum m_i = \sum x_i m_i. \quad (12-15)$$

Το άθροισμα $\sum m_i$ των μαζών όλων των στοιχείων είναι η μάζα M του σώματος. Επομένως, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. 12-15 ως

$$x_{\text{cog}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i. \quad (12-16)$$

Το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης δίνει τη συντεταγμένη x_{com} του κέντρου μάζας του σώματος (Εξ. 9-4). Τώρα έχουμε αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε. Εάν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή για όλες τις θέσεις των στοιχείων που απαρτίζουν το σώμα, τότε οι συντεταγμένες του σώματος x_{cog} και x_{com} ταυτίζονται:

$$x_{\text{cog}} = x_{\text{com}}. \quad (12-17)$$

12-2 ΜΕΡΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

12.05 Να εφαρμόζετε τις συνθήκες στατικής ισορροπίας για τις δυνάμεις και τις ροπές.

12.06 Να αναγνωρίζετε ότι μια σοφή επιλογή ως προς την τοποθέτηση της αρχής (ως προς την οποία θα υπο-

λογίζετε τις ροπές) μπορεί να απλοποιήσει τους υπολογισμούς, απαλείφοντας μία ή περισσότερες δυνάμεις από την εξίσωση των ροπών.

Βασικές Ιδέες

• Ένα στερεό σώμα που ηρεμεί λέμε ότι βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Για ένα τέτοιο σώμα το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδέν,

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}).$$

Αν όλες οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο xy , αυτή η διανυσματική εξίσωση είναι ισοδύναμη με δύο εξισώσεις συνιστωσών,

$$F_{\text{net},x} = 0 \text{ και } F_{\text{net},y} = 0 \quad (\text{ισορροπία δυνάμεων}).$$

• Η στατική ισορροπία υπονοεί επίσης ότι το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σώμα ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν, ή

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}).$$

Αν οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο xy , τα διανύσματα όλων των ροπών είναι παράλληλα στον άξονα z και η εξίσωση ισορροπίας των ροπών είναι ισοδύναμη με μία μόνο εξίσωση συνιστωσών,

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}).$$

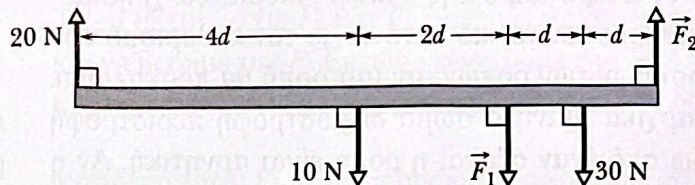
Μερικά Παραδείγματα Στατικής Ισορροπίας

Εδώ θα εξετάσουμε αρκετά ενδεικτικά προβλήματα που περιλαμβάνουν στατική ισορροπία. Σε κάθε Ενδεικτικό Πρόβλημα, επιλέγουμε σύστημα ενός ή περισσότερων αντικειμένων στο οποίο εφαρμόζουμε τις εξισώσεις της ισορροπίας (Εξ. 12-7, 12-8 και 12-9). Οι δυνάμεις που υπεισέρχονται στην ισορροπία βρίσκονται όλες στο επίπεδο xy , το οποίο σημαίνει ότι οι συνεπαγόμενες ροπές είναι παράλληλες στον άξονα z . Συνεπώς, κατά την εφαρμογή της Εξ. 12-9, ισορροπία των ροπών, επιλέγουμε άξονα παράλληλο στον άξονα z ως προς τον οποίο υπολογίζουμε τις ροπές. Παρόλο που η Εξ. 12-9 ικανοποιείται για οποιαδήποτε τέτοια επιλογή άξονα, θα δείτε ότι οι συγκεκριμένες επιλογές απλοποιούν την εφαρμογή της Εξ. 12-9 απαλείφοντας έναν ή περισσότερους



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2

Το σχήμα δίνει την κάτοψη μιας ομογενούς ράβδου σε στατική ισορροπία. (α) Μπορείτε να βρείτε τις άγνωστες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ εξισορροπώντας τις δυνάμεις; (β) Αν θέλατε να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την ισορροπία των ροπών, πού θα έπρεπε να τοποθετήσετε τον άξονα περιστροφής για να απαλείψετε την $\vec{F}_1$ από την εξίσωση; (γ) Το μέτρο της $\vec{F}_2$ προκύπτει τελικά 65 N. Πόσο είναι τότε το μέτρο της $\vec{F}_1$;



Ενδεικτικό Πρόβλημα 12-01 Ισορροπία οριζόντιας δοκού

Στο Σχ. 12-5α, μια ομογενής δοκός, μήκους L και μάζας $m = 1.8 \text{ kg}$, είναι ακίνητη πάνω σε δύο ζυγούς. Ένα ομογενές ορθογώνιο συμπαγές σώμα, με μάζα $M = 2.7 \text{ kg}$, είναι ακίνητο πάνω στη δοκό, με το κέντρο του σε απόσταση $L/4$ από το αριστερό της άκρο. Ποιες είναι οι ενδείξεις των ζυγών;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Τα πρώτα βήματα στην επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος στατικής ισορροπίας είναι τα εξής: ορίστε ξεκάθαρα το προς ανάλυση σύστημα και μετά σχεδιάστε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος, σημειώνοντας όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα. Εδώ, ως επιλέξουμε το σύστημα να είναι η δοκός μαζί με το συμπαγές ορθογώνιο σώμα. Τότε οι δυνάμεις στο σύστημα φαίνονται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος του Σχ. 12-5β. (Η επιλογή του συστήματος απαιτεί εμπειρία και συχνά μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία καλές επιλογές.) Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε στατική ισορροπία, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της ισορροπίας δυνάμεων (Εξ. 12-7 και 12-8) και την εξίσωση της ισορροπίας ροπών (Εξ. 12-9).

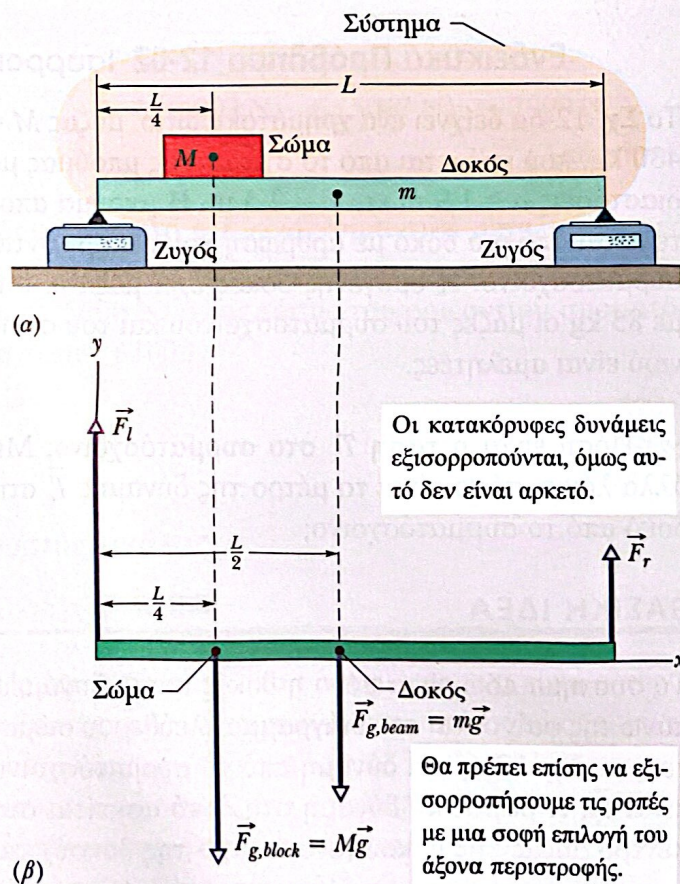
Υπολογισμοί: Οι κάθετες δυνάμεις στη δοκό από τους ζυγούς είναι $\vec{F}_l$ στα αριστερά και $\vec{F}_r$ στα δεξιά. Οι ζητούμενες ενδείξεις των ζυγών που αναζητούμε είναι ίσες με τα μέτρα αυτών των δυνάμεων. Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_{g,beam}$ στη δοκό ασκείται στο κέντρο μάζας της δοκού και είναι ίση με $m\vec{g}$. Ομοίως, η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_{g,block}$ στο ορθογώνιο σώμα ασκείται στο κέντρο μάζας του και είναι ίση με $M\vec{g}$. Ωστόσο, για να απλουστεύσουμε το Σχ. 12-5β, το ορθογώνιο σώμα παριστάνεται με μια κουκκίδα εντός των ορίων της δοκού και η $\vec{F}_{g,block}$ σχεδιάζεται έχοντας την αρχή της πάνω σε αυτή την κουκκίδα. (Η μετατόπιση του

διανύσματος $\vec{F}_{g,block}$ κατά μήκος της ευθείας δράσης του δεν μεταβάλλει τη ροπή λόγω της $\vec{F}_{g,block}$ ως προς οποιοδήποτε άξονα κάθετο στο σχήμα.)

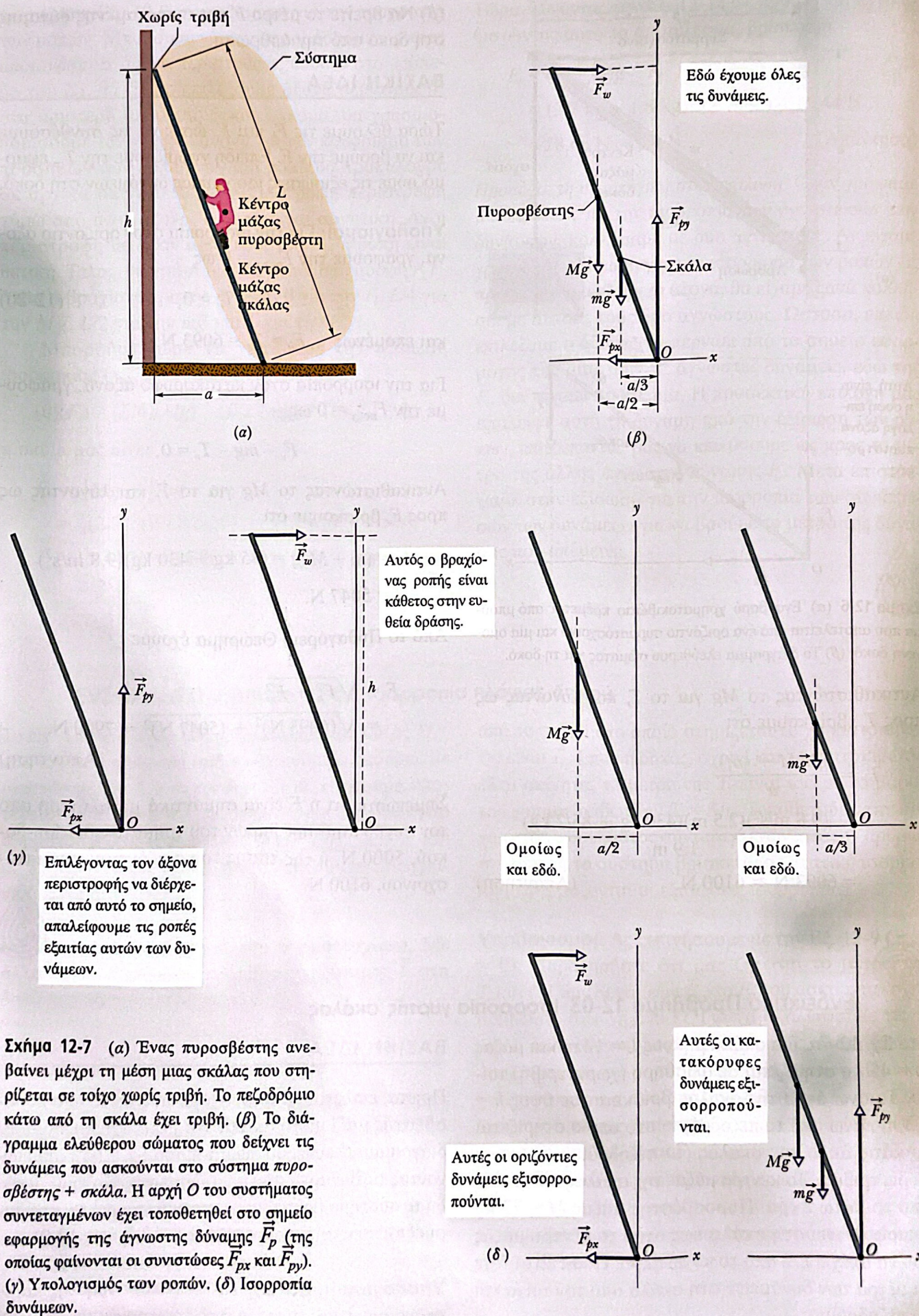
Οι δυνάμεις δεν έχουν συνιστώσες x , άρα η Εξ. 12-7 ($F_{net,x} = 0$) δεν δίνει κάποια πληροφορία. Για τις συνιστώσες y , η Εξ. 12-8 ($F_{net,y} = 0$) μας δίνει

$$F_l + F_r - Mg - mg = 0. \quad (12-18)$$

Αυτή η εξίσωση περιλαμβάνει δύο αγνώστους, τις δυνάμεις F_l και F_r , οπότε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε



Σχήμα 12-5 (α) Μια δοκός μάζας m στηρίζει ένα ορθογώνιο σώμα μάζας M . (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δοκός + σώμα.



Σχήμα 12-7 (α) Ένας πυροσβέστης ανεβαίνει μέχρι τη μέση μιας σκάλας που στηρίζεται σε τοίχο χωρίς τριβή. Το πεζοδρόμιο κάτω από τη σκάλα έχει τριβή. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος που δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα πυροσβέστης + σκάλα. Η αρχή O του συστήματος συντεταγμένων έχει τοποθετηθεί στο σημείο εφαρμογής της άγνωστης δύναμης $\vec{F}_p$ (της οποίας φαίνονται οι συνιστώσες $\vec{F}_{px}$ και $\vec{F}_{py}$). (γ) Υπολογισμός των ροπών. (δ) Ισορροπία δυνάμεων.

Η βαρυτική δύναμη πάνω του παριστάνεται με το ισοδύναμό της, $M\vec{g}$, και αυτό το διάνυσμα έχει μετατοπιστεί παράλληλα στην ευθεία δράσης του, έτσι ώστε η αρχή του να βρίσκεται πάνω στην κουκκίδα (η μετατόπιση δεν μεταβάλλει τη ροπή λόγω της $M\vec{g}$ ως προς οποιονδήποτε άξονα κάθετο στο σχήμα). Επομένως η μετατόπιση δεν επηρεάζει την εξίσωση ισορροπίας των ροπών που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Η μόνη δύναμη στη σκάλα από τον τοίχο είναι η οριζόντια δύναμη $\vec{F}_w$ (δεν μπορεί να υπάρξει δύναμη τριβής κατά μήκος ολισθηρού τοίχου, συνεπώς δεν υπάρχει κατακόρυφη δύναμη από τον τοίχο στη σκάλα). Η δύναμη $\vec{F}_p$ στη σκάλα από το πεζοδρόμιο έχει δύο συνιστώσες, μια οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_{px}$ που είναι η στατική δύναμη τριβής και μια κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{F}_{py}$ που είναι η κάθετη δύναμη.

Για να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της ισορροπίας, ας ξεκινήσουμε με την Εξ. 12-9 ($\tau_{\text{net},z} = 0$). Για να επιλέξουμε άξονα ως προς τον οποίο θα υπολογίσουμε τις ροπές, παρατηρήστε ότι έχουμε άγνωστες δυνάμεις ($\vec{F}_w$ και $\vec{F}_p$) στα δύο άκρα της σκάλας. Για να απαλείψουμε, για παράδειγμα, την $\vec{F}_p$ από τον υπολογισμό, τοποθετούμε τον άξονα στο σημείο O , κάθετα στο σχήμα. Επίσης τοποθετούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων xy στο O . Μπορούμε να βρούμε τις ροπές ως προς το O με οποιαδήποτε από τις Εξ. 10-39 έως 10-41, αλλά είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 10-41 ($\tau = r_{\perp}F$) εδώ. Επιλέγοντας σοφά τη θέση της αρχής μπορούμε να κάνουμε ευκολότερο τον υπολογισμό των ροπών.

Για να βρούμε τον βραχίονα ροπής $r_{\perp}$ της $\vec{F}_w$, σχεδιάζουμε την ευθεία δράσης αυτού του διανύσματος (η οριζόντια διακεκομμένη ευθεία του Σχ. 12-7γ). Τότε το $r_{\perp}$ είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα στο O και την ευθεία δράσης. Στο Σχ. 12-7γ, το $r_{\perp}$ εκτείνεται παράλληλα στον άξονα y και είναι ίσο με το ύψος h . Ομοίως σχεδιάζουμε τις ευθείες δράσης για τα $M\vec{g}$ και $m\vec{g}$ και παρατηρούμε ότι οι βραχίονες ροπής τους εκτείνονται παράλληλα στον άξονα x . Για την απόσταση a που φαίνεται στο Σχ. 12-7α, οι βραχίονες

ροπής είναι $a/2$ (ο πυροσβέστης είναι στο μέσο της σκάλας) και $a/3$ (το κέντρο μάζας της σκάλας είναι στο ένα τρίτο του μήκους της σκάλας), αντίστοιχα. Οι βραχίονες ροπής για τις $\vec{F}_{px}$ και $\vec{F}_{py}$ είναι μηδέν.

Τώρα, με τις ροπές γραμμένες στη μορφή $r_{\perp}F$, η εξίσωση ισορροπίας $\tau_{\text{net},z} = 0$ γίνεται

$$-(h)(F_w) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{px}) + (0)(F_{py}) = 0. \quad (12-21)$$

(Θετική ροπή αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή και αρνητική ροπή αντιστοιχεί σε δεξιόστροφη περιστροφή.)

Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, βρίσκουμε ότι

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7.58 \text{ m}.$$

Τότε η Εξ. 12-21 μας δίνει

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(7.58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9.3 \text{ m}} \\ &= 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$

Τώρα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων (Σχ. 12-7β). Η εξίσωση $F_{\text{net},x} = 0$ μας δίνει

$$F_w - F_{px} = 0,$$

επομένως $F_{px} = F_w = 410 \text{ N}$. (Απάντηση)

Η εξίσωση $F_{\text{net},y} = 0$ μας δίνει

$$F_{py} - Mg - mg = 0,$$

επομένως

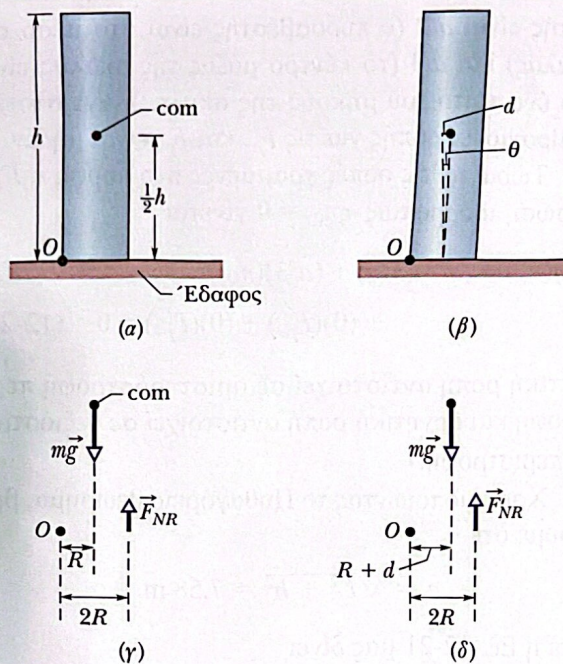
$$\begin{aligned} F_{py} &= (M + m)g = (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 1146.6 \text{ N} \approx 1100 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$



Ενδεικτικό Πρόβλημα 12-04 Ισορροπία του κεκλιμένου πύργου της Πίζας

Ας υποθέσουμε ότι ο Πύργος της Πίζας είναι ένας ομογενής κοίλος κύλινδρος, ακτίνας $R = 9.8 \text{ m}$ και ύψους $h = 60 \text{ m}$. Το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ύψος $h/2$, κατά μήκος του κεντρικού άξονα του κυλίνδρου. Στο Σχ. 12-8α, ο κύλινδρος είναι κατακόρυφος. Στο

Σχ. 12-8β, κλίνει προς τα δεξιά (προς το νότιο τοίχο του πύργου) κατά $\theta = 5.5^\circ$, το οποίο μετατοπίζει το κέντρο μάζας (com) κατά μια απόσταση d . Ας υποθέσουμε ότι το έδαφος ασκεί μόνο δυο δυνάμεις στον πύργο. Στον αριστερό (βόρειο) τοίχο ασκείται η κά-



Σχήμα 12-8 Ένας κύλινδρος που μοντελοποιεί τον Πύργο της Πίζας: (α) σε κατακόρυφη θέση και (β) κεκλιμένος, με το κέντρο μάζας μετατοπισμένο προς τα δεξιά. Οι δυνάμεις και οι βραχίονες ροπής για να βρούμε τις ροπές ως προς το σημείο περιστροφής στο O για τον κύλινδρο σε (γ) κατακόρυφη και (δ) κεκλιμένη θέση.

θετη δύναμη $\vec{F}_{NL}$ και στον δεξιό (νότιο) τοίχο ή κάθετη δύναμη $\vec{F}_{NR}$. Κατά τι ποσοστό αυξάνει το μέτρο της $\vec{F}_{NR}$ λόγω της κλίσης;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Επειδή ο πύργος παραμένει όρθιος, βρίσκεται σε ισορροπία και γι' αυτό το λόγο το άθροισμα των ροπών υπολογισμένο ως προς οποιοδήποτε σημείο πρέπει να είναι μηδέν.

Υπολογισμοί: Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε την F_{NR} στη δεξιά πλευρά και δεν γνωρίζουμε ούτε ενδιαφερόμαστε για την F_{NL} στην αριστερή πλευρά, χρησιμοποιούμε σημείο περιστροφής στην αριστερή πλευρά για να υπολογίσουμε τις ροπές. Οι δυνάμεις για τον πύργο σε κατακόρυφη θέση παριστάνονται στο Σχ. 12-8γ. Η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$, θεωρούμενη ότι ασκείται στο com, έχει κατακόρυφη ευθεία δράσης και βραχίονα ροπής ίσο με R (η κάθετη απόσταση από το σημείο περιστροφής έως την ευθεία δράσης). Ως προς το σημείο περιστροφής, η ροπή αυτής της δύναμης θα έτεινε να προκαλέσει δεξιόστροφη περιστροφή και γι' αυτό το λόγο είναι αρνητική. Η κάθετη δύναμη $\vec{F}_{NR}$ στο νότιο τοίχο έχει επίσης κατακόρυφη ευθεία δράσης και ο βραχίονας ροπής της είναι $2R$. Ως προς το σημείο περιστροφής, η ροπή αυτής της

δύναμης θα έτεινε να προκαλέσει αριστερόστροφη περιστροφή και γι' αυτόν τον λόγο είναι θετική. Μπορούμε τώρα να γράψουμε την εξίσωση για την ισορροπία των ροπών ($\tau_{\text{net},z} = 0$) ως

$$-(R)(mg) + (2R)(F_{NR}) = 0,$$

η οποία δίνει

$$F_{NR} = \frac{1}{2} mg.$$

Θα έπρεπε να είμαστε σε θέση να μαντέψουμε αυτό το αποτέλεσμα: με το κέντρο μάζας να βρίσκεται πάνω στον κεντρικό άξονα (την ευθεία συμμετρίας του κυλίνδρου), η δεξιά πλευρά στηρίζει το μισό βάρος του κυλίνδρου.

Στο Σχ. 12-8β το com έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση

$$d = \frac{1}{2} h \tan \theta.$$

Η μόνη μεταβολή στην εξίσωση ισορροπίας ροπών είναι ότι ο βραχίονας ροπής της βαρυτικής δύναμης είναι τώρα $R + d$ και η κάθετη δύναμη στα δεξιά έχει νέο μέτρο F'_{NR} (Σχ. 12-8δ). Συνεπώς, γράφουμε

$$-(R + d)(mg) + (2R)(F'_{NR}) = 0,$$

η οποία μας δίνει

$$F'_{NR} = \frac{(R + d)}{2R} mg.$$

Διαιρώντας αυτό το αποτέλεσμα για την κάθετη δύναμη δεξιά με το αρχικό αποτέλεσμα και μετά αντικαθιστώντας για το d , παίρνουμε

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = \frac{R + d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{0.5h \tan \theta}{R}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $h = 60 \text{ m}$, $R = 9.8 \text{ m}$ και $\theta = 5.5^\circ$ οδηγούμαστε στην

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = 1.29.$$

Συνεπώς, αυτό το απλό μοντέλο του Πύργου της Πίζας προβλέπει ότι, παρόλο που η κλίση του είναι μέτρια, η κάθετη δύναμη στο νότιο τοίχο του έχει αυξηθεί κατά περίπου 30%. Λόγω αυτής της δύναμης, στο νότιο τοίχο, υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης του πύργου. Η αιτία κλίσης του πύργου οφείλεται στο μαλακό έδαφος λόγω του υδάτινου υπέδαφους το οποίο χειροτερεύει με κάθε βροχόπτωση. Πρόσφατα, μηχανικοί σταθεροποίησαν τον πύργο και εν μέρει αντέστρεψαν την κλίση τοποθετώντας κατάλληλο σύστημα απομακρύνοντας το νερό.

άθροισμα όλων των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σώμα ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν, ή

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}) \quad (12-5)$$

Αν οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο xy , όλα τα διανύσματα των ροπών είναι παράλληλα στον άξονα z και η Εξ. 12-5 είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση συνιστωσών για τις ροπές,

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad (\text{ισορροπία ροπών}) \quad (12-9)$$

Κέντρο Βάρους Η βαρυτική δύναμη ασκείται ξεχωριστά σε κάθε στοιχείο ενός σώματος. Το συνολικό αποτέλεσμα όλων των ξεχωριστών επιδράσεων μπορεί να βρεθεί υποθέτοντας μια ισοδύναμη συνολική βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ που ασκείται στο **κέντρο βάρους**. Αν η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης $\vec{g}$ είναι ίδια για όλα τα στοιχεία του σώματος, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Μέτρα Ελαστικότητας Τρία μέτρα ελαστικότητας χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την ελαστική συμπεριφορά (παραμορφώσεις) των αντικειμένων καθώς αντιδρούν σε δυνάμεις που τους ασκούνται. Η **παραμόρφωση** (κλασματική μεταβολή στο μήκος) συνδέεται γραμμικά με την εφαρμοζόμενη **τάση** (δύναμη ανά μονάδα επιφανείας) με το κατάλληλο μέτρο, σύμφωνα με τη γενική σχέση

$$\text{τάση} = \text{μέτρο ελαστικότητας} \times \text{παραμόρφωση}. \quad (12-22)$$

Εφελκυσμός και Συμπίεση Όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται υπό εφελκυσμό ή συμπίεση, η Εξ. 12-22 γράφεται ως

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (12-23)$$

όπου $\Delta L/L$ είναι η εφελκυστική ή συμπίεστική παραμόρφωση του αντικειμένου, F είναι το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης $\vec{F}$ που προκαλεί την παραμόρφωση, A είναι το εμβαδό διατομής πάνω στην οποία ασκείται η $\vec{F}$ (κάθετα στην A , όπως στο Σχ. 12-11α) και E είναι το **μέτρο του Young** για το αντικείμενο. Η τάση είναι F/A .

Διάτμηση Όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται υπό διατμητική τάση, η Εξ. 12-22 γράφεται ως

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}, \quad (12-24)$$

όπου $\Delta x/L$ είναι η διατμητική παραμόρφωση του αντικειμένου, Δx είναι η μετατόπιση του ενός άκρου του αντικειμένου στην κατεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης $\vec{F}$ (όπως στο Σχ. 12-11β) και G είναι το **μέτρο διάτμησης** του αντικειμένου. Η τάση είναι F/A .

Υδροστατική τάση Όταν ένα αντικείμενο υφίσταται *υδροστατική συμπίεση* εξαιτίας της τάσης που ασκείται από ένα περιβάλλον ρευστό, η Εξ. 12-22 γράφεται ως

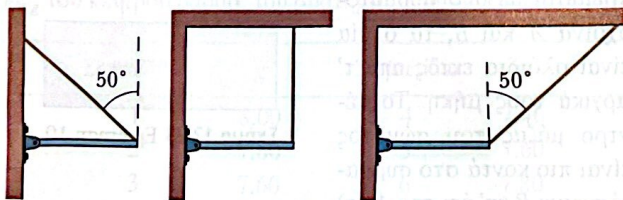
$$p = B \frac{\Delta V}{V}, \quad (12-25)$$

όπου p είναι η πίεση (*υδροστατική τάση*) στο αντικείμενο λόγω του ρευστού, $\Delta V/V$ (η παραμόρφωση) είναι η απόλυτη τιμή της κλασματικής μεταβολής του όγκου του αντικειμένου εξαιτίας αυτής της πίεσης και B είναι το **υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας** του αντικειμένου.



Ερωτήσεις

1 Το Σχήμα 12-15 δείχνει τρεις περιπτώσεις στις οποίες η ίδια οριζόντια ράβδος στηρίζεται στον τοίχο με μια άρθρωση στο ένα της άκρο και μ' ένα συρματόσχοινο στο άλλο. Χωρίς γραπτούς υπολογισμούς, κατατάξτε τις περιπτώσεις σύμφωνα με τα μέτρα (α) των δυνάμεων στη ράβδο από το συρματόσχοινο, (β) την κατακόρυφη δύναμη στη ράβδο από την άρθρωση και (γ) την οριζόντια δύναμη στη ράβδο από την άρθρωση, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη.

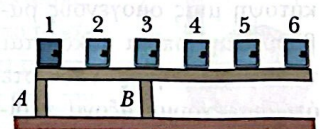


Σχήμα 12-15 Ερώτηση 1.

2 Στο Σχ. 12-16 μια άκαμπτη δοκός στηρίζεται σε δύο ορθοστάτες που είναι στερεωμένοι στο δάπεδο. Ένα μικρό αλλά βαρύ χρηματοκιβώτιο τοποθετείται διαδοχικά στις έξι θέσεις που σημειώνονται στο σχήμα με τ' αντίστοιχα νούμερα. Υποθέστε ότι η μάζα της δοκού είναι αμελητέα συγκρινόμενη μ'

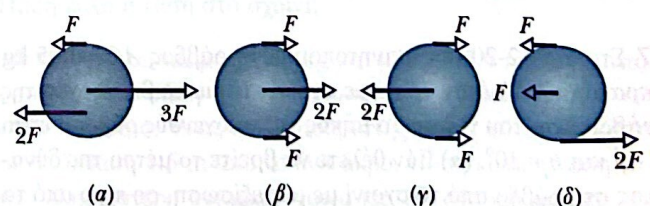
αυτή του χρηματοκιβωτίου.

(α) Κατατάξτε τις θέσεις σύμφωνα με την τιμή της δύναμης στον ορθοστάτη A εξαιτίας του χρηματοκιβωτίου, με τη μεγαλύτερη τιμή συμπίεσης πρώτη και τελευταία τη μεγαλύτερη τιμή εφελκυσμού, και υποδείξτε πού (εάν υπάρχει τέτοιο σημείο) μηδενίζεται η δύναμη. (β) Κατατάξτε τις θέσεις σύμφωνα με την τιμή της δύναμης στον ορθοστάτη B .



Σχήμα 12-16 Ερώτηση 2.

3 Το Σχήμα 12-17 δείχνει τέσσερις κατόψεις περιστρεφόμενων ομογενών δίσκων, οι οποίοι ολισθαίνουν σε δάπεδο χωρίς τριβές (παράλληλο στο επίπεδο της σελίδας). Σε κάθε δίσκο ασκούνται τρεις δυνάμεις, μέτρων F , $2F$ ή $3F$, είτε στην

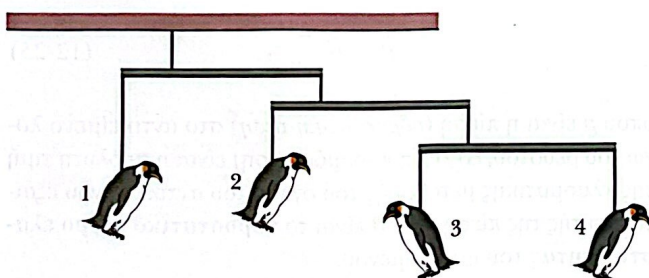


Σχήμα 12-17 Ερώτηση 3.

περιφέρεια, είτε στο κέντρο, είτε στο μέσο μεταξύ κέντρου και περιφέρειας. Τα διανύσματα των δυνάμεων περιστρέφονται μαζί με τους δίσκους και στα «στιγμιότυπα» του Σχ. 12-17 δείχνουν είτε αριστερά είτε δεξιά. Ποιοι δίσκοι βρίσκονται σε ισορροπία;

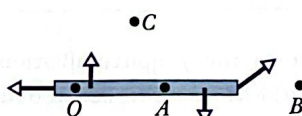
4 Μια σκάλα γέρνει σ' έναν τοίχο χωρίς τριβή αλλά εμποδίζεται από το να πέσει εξαιτίας της τριβής της με το έδαφος. Υποθέστε ότι μετακινείτε τη βάση της σκάλας προς τον τοίχο. Να προσδιορίσετε εάν οι παρακάτω ποσότητες γίνονται μεγαλύτερες, μικρότερες ή παραμένουν οι ίδιες (κατά μέτρο). (α) Η κάθετη δύναμη στη σκάλα από το έδαφος, (β) η δύναμη στη σκάλα από τον τοίχο, (γ) η δύναμη στατικής τριβής στη σκάλα από το έδαφος και (δ) η μέγιστη τιμή της δύναμης $f_{s,max}$ στατικής τριβής.

5 Το Σχήμα 12-18 δείχνει το κινούμενο μέρος ενός παιχνιδιού με πγκούνους να κρέμεται από την οροφή. Η κάθε ράβδος είναι οριζόντια, έχει αμελητέα μάζα κι εκτείνεται τρεις φορές περισσότερο προς τα δεξιά του σύρματος που τη στηρίζει απ' ό,τι προς τ' αριστερά. Ο πγκούνος 1 έχει μάζα $m_1 = 48$ g. Πόση είναι η μάζα (α) του πγκούνου 2, (β) του πγκούνου 3 και (γ) του πγκούνου 4;



Σχήμα 12-18 Ερώτηση 5.

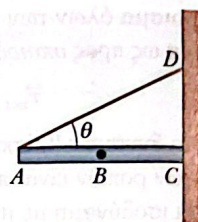
6 Το Σχήμα 12-19 δείχνει την κάτοψη μιας ομογενούς ράβδου στην οποία ασκούνται τέσσερις δυνάμεις. Υποθέστε ότι διαλέγουμε άξονα περιστροφής διαμέσου του σημείου O . Υπολογίζοντας τις ροπές εξαιτίας των δυνάμεων ως προς αυτόν τον άξονα βρίσκουμε ότι αυτές οι ροπές αντισταθμίζονται. Θ' αντισταθμίζονταν οι ροπές αν, αντιθέτως, ο άξονας περιστροφής επιλεγεί να περνάει (α) από το σημείο A (επί της ράβδου), (β) από το σημείο B (στην ίδια ευθεία με τη ράβδο) ή (γ) από το σημείο C (εκτός και από τον άξονα της ράβδου); (δ) Υποθέστε, αντιθέτως, ότι βρίσκουμε ότι οι ροπές ως προς το O δεν αντισταθμίζονται. Υπάρχει κάποιο άλλο σημείο ως προς το οποίο αντισταθμίζονται οι ροπές;



Σχήμα 12-19 Ερώτηση 6.

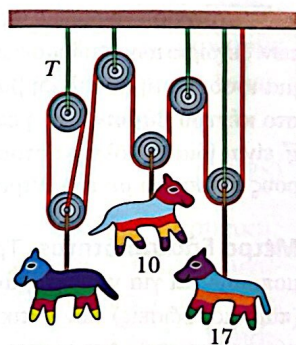
7 Στο Σχ. 12-20 μια ακινητοποιημένη ράβδος AC των 5 kg κρατιέται από έναν τοίχο με σχοινί και με τριβή μεταξύ της ράβδου και του τοίχου. Το μήκος της ομογενούς ράβδου είναι 1 m και $\theta = 30^\circ$. (α) Εάν θέλετε να βρείτε το μέτρο της δύναμης στη ράβδο από το σχοινί με μία εξίσωση, σε ποιο από τα σημειωμένα σημεία πρέπει να πάρετε τον άξονα περιστρο-

φής; Μ' αυτή την επιλογή για τον άξονα περιστροφής και θετικές ροπές τις αριστερόστροφες, ποιο είναι το πρόσημο (β) της ροπής τ_w εξαιτίας του βάρους της ράβδου και (γ) της ροπής τ , εξαιτίας της έλξης στη ράβδο από το σχοινί; (δ) Το μέτρο της τ , είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με το μέτρο της τ_w ;



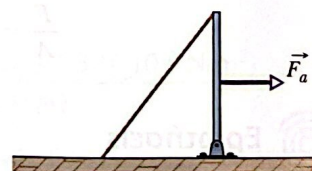
Σχήμα 12-20 Ερώτηση 7.

8 Τρεις ριψάτες (εδώ, πηλίνα αλογάκια) κρέμονται από τη (στατική) διάταξη των αβαρών τροχαλιών και σχοινιών που φαίνονται στο Σχ. 12-21. Ένα μακρύ σχοινί διατρέχει τη διάταξη, από την οροφή στα δεξιά έως την κατώτερη τροχαλία σ' αριστερά, περνώντας γύρω από όλες τις τροχαλίες. Πολλά κοντύτερα σχοινιά κρεμάνε τις τροχαλίες από την οροφή ή τις ριψάτες από τις τροχαλίες. Δίνονται τα βάρη (σε newtons) των δύο ριψάτων. (α) Πόσο είναι το βάρος της τρίτης ριψάτα; (Υπόδειξη: Ένα σχοινί που περνάει γύρω από μια τροχαλία τραβάει την τροχαλία με συνολική δύναμη που είναι διπλάσια της τάσης του σχοινιού.) (β) Πόση είναι η τάση που σημειώνεται με T στο κοντό σχοινί;



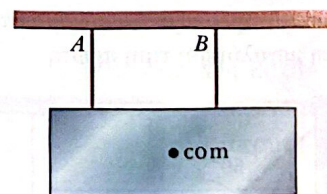
Σχήμα 12-21 Ερώτηση 8.

9 Στο Σχ. 12-22 μια κατακόρυφη ράβδος είναι στερεωμένη με άρθρωση στο κατώτερο άκρο της και μ' ένα συρματόσχοινο στο επάνω της άκρο. Στη ράβδο πρόκειται ν' ασκηθεί μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}_a$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη μετακινηθεί προς τα πάνω στη ράβδο, η τάση στο συρματόσχοινο αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει η ίδια;



Σχήμα 12-22 Ερώτηση 9.

10 Το Σχήμα 12-23 δείχνει ένα οριζόντιο σώμα που κρέμεται με δύο συρματόσχοινα A και B , τα οποία είναι ολόιδια εκτός από τ' αρχικά τους μήκη. Το κέντρο μάζας του σώματος είναι πιο κοντά στο συρματόσχοινο B απ' ό,τι στο A . (α)



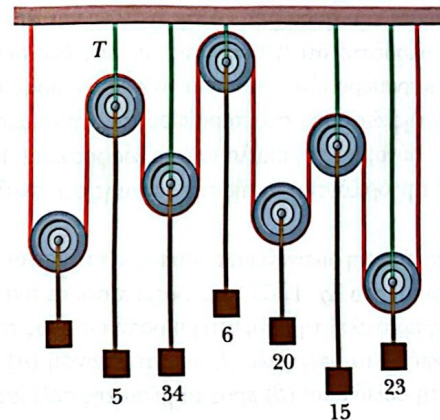
Σχήμα 12-23 Ερώτηση 10.

Μετρώντας ροπές ως προς το κέντρο μάζας του σώματος, διαπιστώστε αν το μέτρο της ροπής εξαιτίας της τάσης του συρματόσχοινο A είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με το μέτρο της ροπής εξαιτίας της τάσης του συρματόσχοινο B . (β) Ποιο συρματόσχοινο ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στο σώμα; (γ) Εάν τα συρματόσχοινα έχουν τώρα το ίδιο μήκος, ποιο ήταν αρχικά κοντύτερο (προτού κρεμαστεί το σώμα);

11 Ο πίνακας δίνει τα αρχικά μήκη τριών ράβδων και τις μεταβολές του μήκους τους, όταν εφαρμόζονται δυνάμεις στα άκρα τους ώστε να τις θέσουν υπό συμπίεση. Κατατάξτε τις ράβδους σύμφωνα με την παραμόρφωσή τους, κατά φθίνουσα σειρά.

	Αρχικό Μήκος	Μεταβολή Μήκους
Ράβδος Α	$2L_0$	ΔL_0
Ράβδος Β	$4L_0$	$2\Delta L_0$
Ράβδος Γ	$10L_0$	$4\Delta L_0$

12 Ένας φυσικοθεραπευτής που έχασε το μέτρο κατασκεύασε τη (στατική) διάταξη αβαρών τροχαλιών και νημάτων που φαίνεται στο Σχ. 12-24. Ένα μακρύ νήμα τυλίγεται γύρω από όλες τις τροχαλίες, οι τροχαλίες κρέμονται από την οροφή με μικρότερα νήματα και διάφορα βάρη κρέμονται από τις τροχαλίες. Αναγράφονται τα βάρη (σε newton) εκτός από ένα. (α)



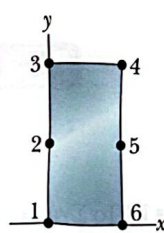
Σχήμα 12-24 Ερώτηση 12.

Προβλήματα

- - ••• Το πλήθος των κουκκίδων δηλώνει το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος.

Ενότητα 12-1 Ισορροπία

•1 Επειδή το g μεταβάλλεται πολύ λίγο στην έκταση των περισσότερων δομών, πρακτικά το κέντρο βάρους οποιασδήποτε δομής ή σώματος συμπίπτει με το κέντρο μάζας. Εδώ έχουμε μια υποθετική περίπτωση όπου το g μεταβάλλεται κατά πολύ. Το Σχήμα 12-25 δείχνει μια διάταξη έξι σωματιδίων, τα καθένα μάζας m , στερεωμένα στα άκρα μιας στερεής δομής αμελητέας μάζας. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σωματιδίων κατά μήκος της ακμής είναι 2.00 m. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει την τιμή του g (m/s^2) στη θέση του κάθε σωματιδίου. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο σύστημα συντεταγμένων, να βρείτε (α) τη συντεταγμένη x , x_{com} , και (β) τη συντεταγμένη y , y_{com} , του κέντρου μάζας του συστήματος των έξι σωματιδίων. Στη συνέχεια να βρείτε (γ) τη x συντεταγμένη, x_{cog} και (δ) τη y συντεταγμένη, y_{cog} του κέντρου βάρους του συστήματος των έξι σωματιδίων.



Σχήμα 12-25
Πρόβλημα 1.

Σωματίδιο	g	Σωματίδιο	g
1	8.00	4	7.40
2	7.80	5	7.60
3	7.60	6	7.80

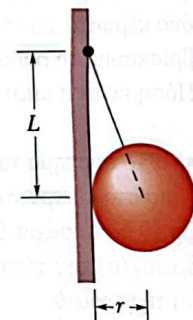
Ενότητα 12-2 Μερικά παραδείγματα Στατικής Ισορροπίας

•2 Ένα αυτοκίνητο με μάζα 1360 kg έχει μεταξόνιο (δηλαδή απόσταση μεταξύ του μπροστινού και του πίσω άξονα τροχών) 3.05 m. Το κέντρο βάρους του βρίσκεται 1.78 m πίσω από τον

Πόσο είναι αυτό το βάρος; (Υπόδειξη: Όταν ένα νήμα τυλίγεται κατά το ήμισυ γύρω από μια τροχαλία, όπως εδώ, έλκει την τροχαλία με συνολική δύναμη που είναι διπλάσια της τάσης του νήματος.) (β) Πόση είναι η τάση στο μικρό νήμα T ;

άξονα των μπροστινών τροχών. Με το αυτοκίνητο σε οριζόντιο έδαφος, να προσδιορίσετε το μέτρο της δύναμης από το έδαφος (α) σε κάθε μπροστινό τροχό (υποθέτοντας ίσες δυνάμεις στους μπροστινούς τροχούς) και (β) σε κάθε οπίσθιο τροχό (υποθέτοντας ίσες δυνάμεις στους πίσω τροχούς).

•3 Στο Σχ. 12-26 μια ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0.85$ kg και ακτίνας $r = 4.2$ cm συγκρατείται στη θέση της μ' ένα αβαρές νήμα στερεωμένο σε τοίχο χωρίς τριβές, σε απόσταση $L = 8.0$ cm πάνω από το κέντρο της σφαίρας. Να βρείτε (α) την τάση στο νήμα και (β) τη δύναμη από τον τοίχο στη σφαίρα.



Σχήμα 12-26
Πρόβλημα 3.

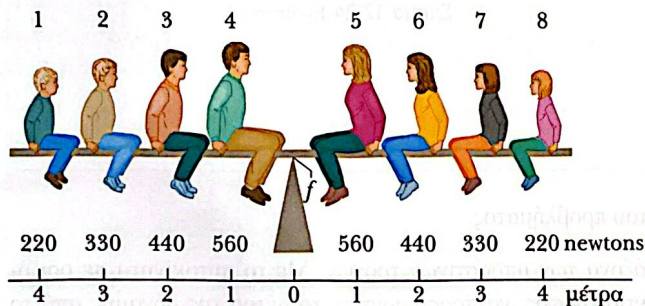
•4 Το τόξο ενός τοξότη τεντώνεται από το μεσαίο σημείο έως ότου η τάση στη χορδή γίνει ίση με τη δύναμη που ασκείται από τον τοξότη. Τι γωνία σχηματίζουν τότε μεταξύ τους τα δύο μισά της χορδής;

•5 Ένα σχοινί αμελητέας μάζας τεντώνεται οριζόντια, μεταξύ δύο στηριγμάτων τα οποία απέχουν 3.44 m μεταξύ τους. Όταν ένα σώμα βάρους 3160 N κρεμάται από το μέσο του σχοινιού, παρατηρούμε ότι το σχοινί κάνει κοιλιά κατά 35.0 cm. Πόση είναι η τάση στο σχοινί;

•6 Μια σκαλωσιά μάζας 60 kg και μήκους 5.0 m στηρίζεται σε οριζόντια θέση μ' ένα κατακόρυφο συρματόσχοινο σε κάθε της άκρο. Ένας υαλοκαθαριστής μάζας 80 kg στέκεται σε απόσταση 1.5 m από το ένα άκρο. Πόση είναι η τάση (α) στο πλησιέστερο συρματόσχοινο και (β) στο πιο απομακρυσμένο συρματόσχοινο;

•7 Ένας υαλοκαθαριστής μάζας 75 kg χρησιμοποιεί σκάλα μάζας 10 kg και μήκους 5.0 m. Τοποθετεί το ένα της άκρο στο έδαφος, 2.5 m μακριά από τον τοίχο, ακουμπά το επάνω άκρο σ' ένα ραγισμένο παράθυρο και ανεβαίνει στη σκάλα. Έχει ανέβει 3.0 m κατά μήκος της σκάλας όταν σπάει το παράθυρο. Αγνοήστε την τριβή μεταξύ της σκάλας και του παραθύρου και υποθέστε ότι η βάση της σκάλας δεν ολισθαίνει. Όταν το παράθυρο είναι στο όριο να σπάσει, πόσο είναι (α) το μέτρο της δύναμης στο παράθυρο από τη σκάλα, (β) το μέτρο της δύναμης στη σκάλα από το έδαφος και (γ) η γωνία (ως προς την οριζόντιο) αυτής της δύναμης στη σκάλα;

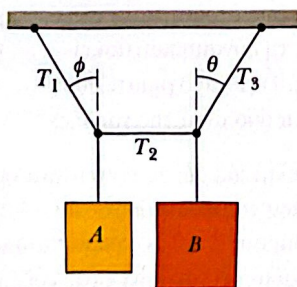
•8 Μια πολύτεκνη οικογένεια, των οποίων τα βάρη σε newtons σημειώνονται στο Σχ. 12-27, ισορροπεί πάνω σε μια τραμπάλα. Ποιος προκαλεί τη μεγαλύτερη ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής στο υπομόχλιο f , με κατεύθυνση (α) προς τα έξω από τη σελίδα και (β) προς τα μέσα της σελίδας;



Σχήμα 12-27 Πρόβλημα 8.

•9 Μια ράβδος ενός μέτρου (ξύλινη μεζούρα) ισορροπεί οριζόντια στην κόψη ενός μαχαιριού, στην ένδειξη 50 cm. Με δύο κέρματα των 5.00 g τοποθετημένα στην ένδειξη 12.0 cm, βρίσκουμε τη ράβδο να ισορροπεί στην ένδειξη των 45.5 cm. Πόση είναι η μάζα της ράβδου;

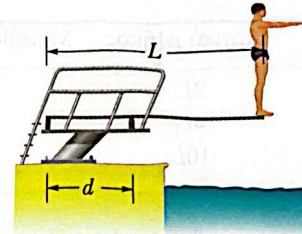
•10 Το σύστημα του Σχ. 12-28 βρίσκεται σε ισορροπία με το νήμα στο κέντρο να είναι ακριβώς οριζόντιο. Το σώμα A ζυγίζει 40 N, το σώμα B ζυγίζει 50 N και η γωνία ϕ είναι 35° . Να βρείτε (α) την τάση T_1 , (β) την τάση T_2 , (γ) την τάση T_3 και (δ) τη γωνία θ .



Σχήμα 12-28 Πρόβλημα 10.

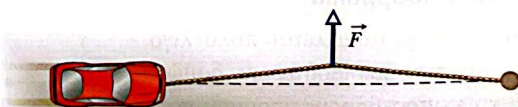
•11 Ένας αθλητής καταδύσεων, βάρους 580 N, στέκεται στην άκρη του βαθύρα καταδύσεων, μήκους $L = 4.5$ m και αμελητέας μάζας (Σχ. 12-29). Ο βαθύρας είναι στερεωμένος σε δύο στηρίγματα που απέχουν απόσταση $d = 1.5$ m μεταξύ τους. Από τις δυνάμεις που δρουν στον βαθύρα, (α) πόσο είναι το μέτρο και

(β) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης από το αριστερό στηρίγμα; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης από το δεξιό στηρίγμα; (ε) Ποιο στηρίγμα βρίσκεται σ' εφελκυσμό και (στ) ποιο σε συμπίεση;



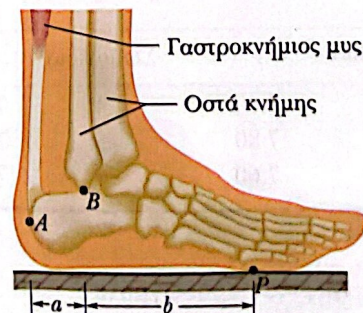
Σχήμα 12-29 Πρόβλημα 11.

•12 Στο Σχ. 12-30 ένας άνθρωπος προσπαθεί να βγάλει το αυτοκίνητό του από τη λάσπη στο ρείθρο του δρόμου. Δένει το ένα άκρο του σχοινιού σφιχτά γύρω από τον μπροστινό προφυλακτήρα και το άλλο άκρο σφιχτά γύρω από ένα στύλο εταιρίας κοινής ωφέλειας, 18 m μακριά. Κατόπιν σπρώχνει το σχοινί, στο μέσο του, προς το πλάι με μια δύναμη 550 N, μετατοπίζοντας το κέντρο του σχοινιού 0.30 m από την αρχική του θέση ενώ το αυτοκίνητο μετακινείται ελάχιστα. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης στο αυτοκίνητο από το σχοινί; (Το σχοινί επιμηκύνεται κατά κάτι.)



Σχήμα 12-30 Πρόβλημα 12.

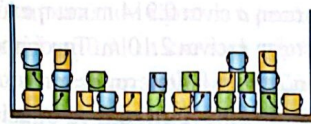
•13 Το Σχήμα 12-31 δείχνει την ανατομική δομή του κατώτερου μέρους του ποδιού και του πέλματος που αφορά στήριξη στ' ακροδάχτυλα (στις μύτες των ποδιών), με τη φτέρνα ελαφρώς ανασηκωμένη από το δάπεδο έτσι ώστε πρακτικά το πόδι ν' ακουμπάει στο δάπεδο μόνο στο σημείο P . Υποθέστε αποστάσεις $a = 5.0$ cm, $b = 15$ cm και ότι το βάρος του ατόμου είναι $W = 900$ N. Από τις δυνάμεις που δρουν στο πόδι, (α) πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης στο σημείο A από τον γαστροκνήμιο μου; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης στο σημείο B από τα οστά της κνήμης;



Σχήμα 12-31 Πρόβλημα 13.

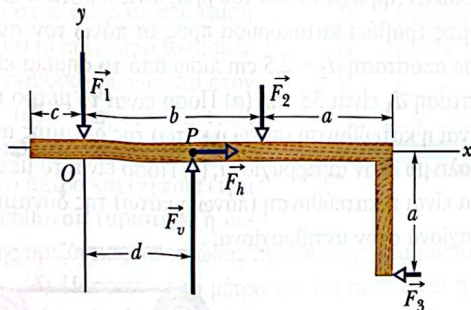
•14 Στο Σχ. 12-32 μια οριζόντια σκαλωσιά, μήκους 2.00 m και ομογενούς μάζας 50.0 kg, κρέμεται από ένα κτήριο με δύο

συρματόσχοινα. Η σκαλωσιά έχει καμιά ντουζίνα τενεκέδες μπογιάς, στοιβαγμένους σε διάφορα σημεία. Η συνολική μάζα των τενεκέδων είναι 75.0 kg. Η τάση στο δεξί συρματόσχοινο είναι 722 N. Σε πόση οριζόντια απόσταση από αυτό το συρματόσχοινο βρίσκεται το κέντρο μάζας του συστήματος των τενεκέδων με τη μπογιά;



Σχήμα 12-32 Πρόβλημα 14.

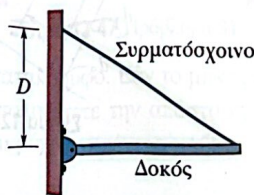
•15 Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ δρουν στη δομή του Σχ. 12-33, η οποία φαίνεται σε κάτοψη. Θέλουμε να φέρουμε τη δομή σε ισορροπία ασκώντας μια τέταρτη δύναμη, σε κάποιο σημείο όπως το P . Η τέταρτη δύναμη έχει διανυσματικές συνιστώσες $\vec{F}_h$ και $\vec{F}_v$. Μας δίνεται ότι $a = 2.0$ cm, $b = 3.0$ cm, $c = 1.0$ cm, $F_1 = 20$ N, $F_2 = 10$ N και $F_3 = 5.0$ N. Να βρείτε (α) την F_h , (β) την F_v και (γ) την d .



Σχήμα 12-33 Πρόβλημα 15.

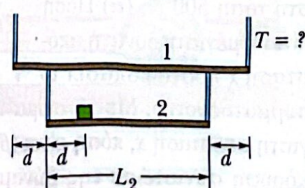
•16 Ένα ομογενές κυβικό κιβώτιο έχει ακμή 0.750 m και ζυγίζει 500 N. Ηρεμεί σε δάπεδο με μία ακμή του έναντι ενός πολύ μικρού, σταθερού εμποδίου. Σε πόσο ελάχιστο ύψος πάνω από το δάπεδο πρέπει να εφαρμοστεί οριζόντια δύναμη μέτρου 350 N για να γείρει το κιβώτιο;

•17 Στο Σχ. 12-34, μια ομογενής δοκός βάρους 500 N και μήκους 3.0 m αναρτάται σε οριζόντια θέση. Στ' αριστερά αρθρώνεται σε τοίχο στα δεξιά υποστηρίζεται από συρματόσχοινο βιδωμένο στον τοίχο, σε απόσταση D πάνω από τη δοκό. Η ελάχιστη τάση που θα προκαλέσει το σπάσιμο του συρματόσχοινου είναι 1200 N. (α) Ποια τιμή της D αντιστοιχεί σ' αυτή την τάση; (β) Για να προλάβουμε το σπάσιμο του συρματόσχοινου, θα πρέπει η D ν' αυξηθεί ή να μειωθεί από αυτή την τιμή;



Σχήμα 12-34 Πρόβλημα 17.

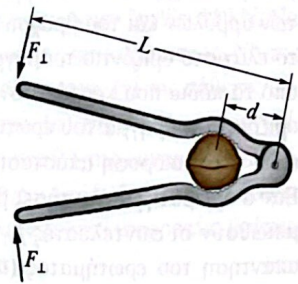
•18 Στο Σχ. 12-35 η οριζόντια σκαλωσιά 2, με ομοιόμορφα κατανομημένη μάζα $m_2 = 30.0$ kg και μήκος $L_2 = 2.00$ m, κρέμεται από την οριζόντια σκαλωσιά 1, επίσης με ομοιόμορφα κατανομημένη μάζα $m_1 = 50.0$ kg. Ένα κιβώτιο μάζας 20.0 kg γεμάτο καρφιά βρίσκεται στη σκαλωσιά 2, κεντραρισμέ-



Σχήμα 12-35 Πρόβλημα 18.

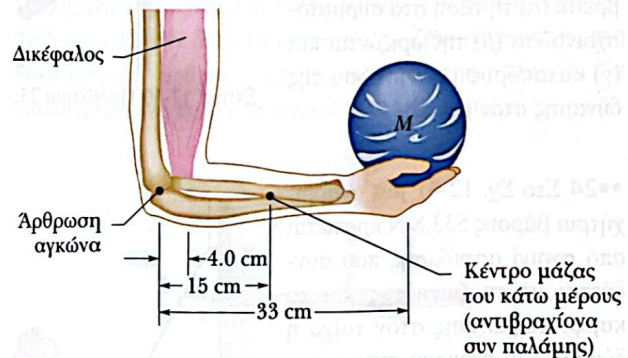
νο σε απόσταση $d = 0.500$ m από το αριστερό άκρο. Πόση είναι η τάση T στο υποδεικνυόμενο συρματόσχοινο;

•19 Για να σπάσουμε ένα καρύδι μ' έναν καρυοθραύστη, πρέπει ν' ασκηθούν στο τσόφλι του και από τις δύο πλευρές δυνάμεις με μέτρο τουλάχιστον 40 N. Για τον καρυοθραύστη του Σχ. 12-36 με αποστάσεις $L = 12$ cm και $d = 2.6$ cm, πόσο είναι οι συνιστώσες της δύναμης (κάθετες στις λαβές) που αντιστοιχούν στα 40 N;



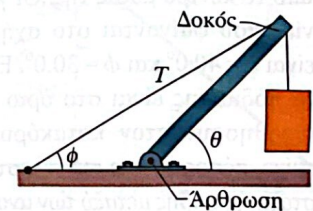
Σχήμα 12-36 Πρόβλημα 19.

•20 Ένας παίκτης του μπόουλινγκ κρατάει τη μπάλα ($M = 7.2$ kg) στην παλάμη του χεριού του (Σχ. 12-37). Ο βραχίονας είναι κατακόρυφος, ενώ ο αντιβραχίονας (1.8 kg) είναι οριζόντιος. Πόσο είναι το μέτρο (α) της δύναμης του δικέφαλου μυός στον αντιβραχίονα και (β) πόση είναι η δύναμη μεταξύ των οστών που σχηματίζουν την άρθρωση του αγκώνα;



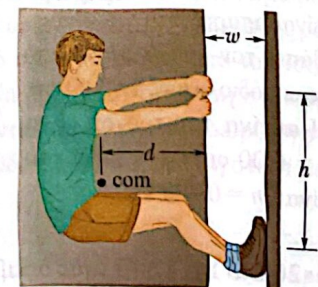
Σχήμα 12-37 Πρόβλημα 20.

•21 Το σύστημα του Σχ. 12-38 βρίσκεται σε ισορροπία. Ένα τσιμεντένιο σώμα, μάζας 225 kg, κρέμεται από το άκρο ομογενούς δοκού μάζας 45.0 kg. Ένα συρματόσχοινο, στερεωμένο στο έδαφος προσδένεται στο άνω άκρο της δοκού και στο ελεύθερο άκρο του κρέμεται το σώμα το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία. Για τις γωνίες $\phi = 30.0^\circ$ και $\theta = 45.0^\circ$, να βρείτε (α) την τάση T στο συρματόσχοινο και (β) την οριζόντια και (γ) την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης από την άρθρωση στη δοκό.



Σχήμα 12-38 Πρόβλημα 21.

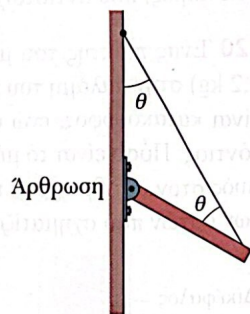
•22 Στο Σχ. 12-39 ένας αναρριχητής μάζας 55 kg σκαρφαλώνει παράλληλα ρωγμής βράχου με τα χέρια να τραβάνε το ένα άκρο του ανοίγματος και τα πόδια να πιέζουν προς την αντίθετη μεριά. Η ρωγή έχει άνοιγμα $w = 0.20$ m και το κέντρο



Σχήμα 12-39 Πρόβλημα 22.

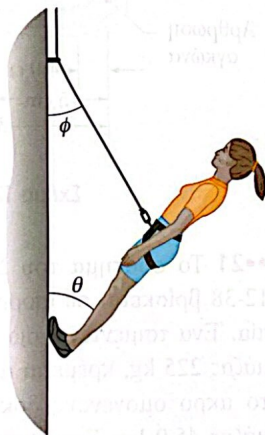
μάζας του αναρριχητή βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $d = 0.40 \text{ m}$ από το άνοιγμα. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των χεριών και του βράχου είναι $\mu_1 = 0.40$ και μεταξύ των αρβύλων και του βράχου είναι $\mu_2 = 1.2$. (α) Πόσο είναι το ελάχιστο οριζόντιο τράβηγμα από τα χέρια και σπρώξιμο από τα πόδια που κρατάει τον ορειβάτη σταθερό; (β) Για το οριζόντιο τράβηγμα του ερωτήματος (α), πόση θα πρέπει να είναι η κατακόρυφη απόσταση h μεταξύ χεριών και ποδιών; Εάν ο ορειβάτης συναντήσει βρεγμένο βράχο, έτσι ώστε να μειωθούν οι συντελεστές μ_1 και μ_2 , τι συμβαίνει (γ) στην απάντηση του ερωτήματος (α) και (δ) στην απάντηση του ερωτήματος (β);

••23 Στο Σχ. 12-40, το ένα άκρο ομογενούς δοκού βάρους 222 N αρθρώνεται μ' ένα μεντεσέ σε τοίχο το άλλο άκρο υποστηρίζεται από συρματόσχοινο που σχηματίζει γωνία $\theta = 30.0^\circ$ τόσο με τον τοίχο όσο και με τη δοκό. Να βρείτε (α) τη τάση στο συρματόσχοινο και (β) την οριζόντια και (γ) κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης στον μεντεσέ.



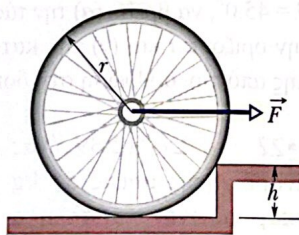
Σχήμα 12-40 Πρόβλημα 23.

••24 Στο Σχ. 12-41 μια αναρριχητήρια βάρους 533.8 N κρατιέται από σχοινί ασφάλισης που συνδέεται με τη ζώνη της και το καρφί ασφάλισης στον τοίχο η δύναμη του σχοινοῦ στην αναρριχητήρια έχει φορέα που περνάει από το κέντρο μάζας της. Οι γωνίες που φαίνονται στο σχήμα είναι $\theta = 40.0^\circ$ και $\phi = 30.0^\circ$. Εάν τα πόδια της είναι στο όριο να ολισθήσουν στον κατακόρυφο τοίχο, πόσος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των αναρριχητικών της παπουτσιών και του τοίχου;



Σχήμα 12-41 Πρόβλημα 24.

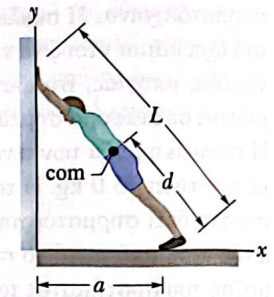
••25 Στο Σχ. 12-42 ποιο μέτρο (σταθερής) δύναμης $\vec{F}$, εφαρμοζόμενης οριζόντια στον άξονα του τροχού, είναι απαραίτητο για ν' ανεβάσει τον τροχό πάνω από το εμπόδιο ύψους $h = 3.00 \text{ cm}$; Η ακτίνα του τροχού είναι $r = 6.00 \text{ cm}$ και η μάζα του είναι $m = 0.800 \text{ kg}$.



Σχήμα 12-42 Πρόβλημα 25.

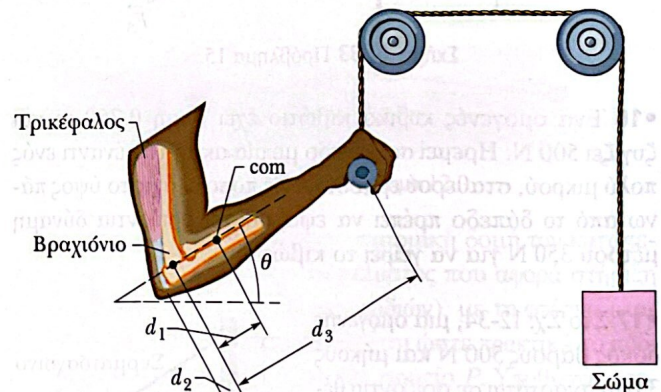
••26 Στο Σχ. 12-43 ένας ορειβάτης γέρνει πάνω σε κατακόρυφο τοίχο από πάγο ο οποίος έχει αμελητέα τριβή. Η από-

σταση a είναι 0.914 m και η απόσταση L είναι 2.10 m . Το κέντρο μάζας του βρίσκεται σε απόσταση $d = 0.940 \text{ m}$ από το σημείο επαφής ποδιών-εδάφους. Εάν αυτός βρίσκεται στο όριο να ολισθήσει, πόσος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ποδιών του και του εδάφους;



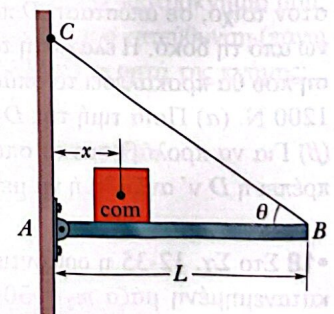
Σχήμα 12-43 Πρόβλημα 26.

••27 Στο Σχ. 12-44 ένα σώμα μάζας 15 kg συγκρατείται στη θέση του μέσω συστήματος τροχαλιών. Ο βραχίονας του ανθρώπου είναι κατακόρυφος ο αντιβραχίονας και ο καρπός βρίσκονται σε γωνία $\theta = 30^\circ$ ως προς την οριζόντιο. Ο αντιβραχίονας και ο καρπός έχουν μαζί μάζα 2.0 kg , με το κέντρο μάζας σε απόσταση $d_1 = 15 \text{ cm}$ από το σημείο επαφής του οστού του αντιβραχίονα και του βραχιόνιου οστού. Ο τρικέφαλος μυς τραβάει κατακόρυφα προς τα πάνω τον αντιβραχίονα σε απόσταση $d_2 = 2.5 \text{ cm}$ πίσω από το σημείο επαφής. Η απόσταση d_3 είναι 35 cm . (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης από τον τρικέφαλο μυ στον αντιβραχίονα; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της δύναμης από τον βραχίονα στον αντιβραχίονα;



Σχήμα 12-44 Πρόβλημα 27.

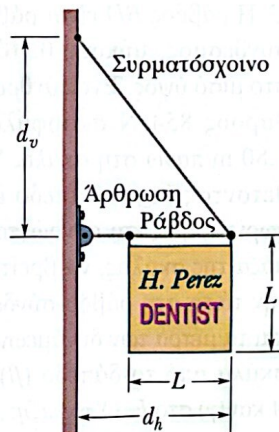
••28 Στο Σχ. 12-45, υποθέστε ότι το μήκος L της ομογενούς ράβδου είναι 3.00 m και το βάρος της 200 N . Επίσης, έστω ότι το βάρος του σώματος είναι $W = 300 \text{ N}$ και η γωνία $\theta = 30.0^\circ$. Το συρματόσχοινο μπορεί ν' αντέξει μέγιστη τάση 500 N . (α) Πόση είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση x προτού σπάσει το συρματόσχοινο; Με το σώμα τοποθετημένο σ' αυτή τη μέγιστη απόσταση x , πόση είναι (β) η οριζόντια και (γ) η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης από την άρθρωση A στη ράβδο;



Σχήμα 12-45 Πρόβλημα 28 και 34.

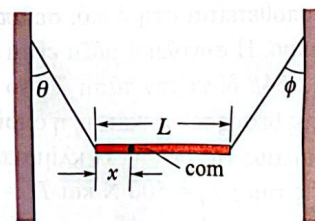
••29 Μια πόρτα έχει ύψος 2.1 m κατά τον άξονα y , ο οποίος εκτείνεται προς τα πάνω, και πλάτος 0.91 m κατά τον άξονα x , ο οποίος εκτείνεται προς τα έξω από την αρθρωμένη μεριά της πόρτας. Ένας μεντεσές σε 0.30 m από το πάνω μέρος και άλλος ένας 0.30 m από το κάτω μέρος συγκρατούν ο καθένας τη μισή μάζα της πόρτας, η οποία είναι 27 kg. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόσες είναι οι δυνάμεις στην πόρτα (α) από τον πάνω μεντεσέ και (β) από τον κάτω μεντεσέ;

••30 Στο Σχ. 12-46 μια ομογενής τετράγωνη πινακίδα, μάζας 50.0 kg και πλευράς μήκους $L = 2.00$ m, κρέμεται από οριζόντια ράβδο μήκους $d_h = 3.00$ m και αμελητέας μάζας. Ένα συρματόσχοινο δένεται στο πέρα άκρο της ράβδου και σ' ένα σημείο στον τοίχο σε απόσταση $d_v = 4.00$ m πάνω από το σημείο που η ράβδος αρθρώνεται στον τοίχο. (α) Πόση είναι η τάση στο συρματόσχοινο; (β) Πόσο είναι το μέτρο και (γ) ποια είναι η κατεύθυνση (αριστερά ή δεξιά) της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης από τον τοίχο στη ράβδο; (δ) Πόσο είναι το μέτρο και (ε) ποια είναι η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) της κατακόρυφης συνιστώσας αυτής της δύναμης;



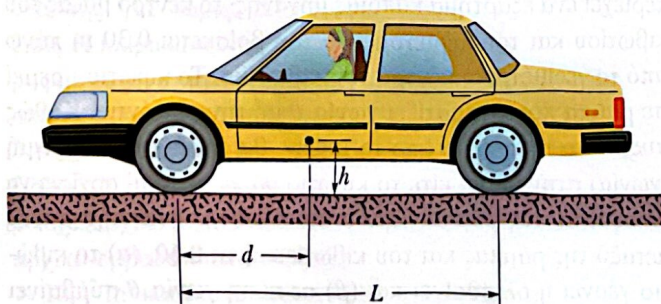
Σχήμα 12-46 Πρόβλημα 30.

••31 Στο Σχ. 12-47 μια μη ομογενής ράβδος κρέμεται και ηρεμεί σε οριζόντια θέση με δύο αβαρή συρματόσχοινα. Το ένα συρματόσχοινο σχηματίζει γωνία $\theta = 36.9^\circ$ με την κατακόρυφο το άλλο σχηματίζει γωνία $\phi = 53.1^\circ$ με την κατακόρυφο. Εάν το μήκος L της ράβδου είναι 6.10 m, να υπολογίσετε την απόσταση x από το αριστερό άκρο της ράβδου μέχρι το κέντρο μάζας.



Σχήμα 12-47 Πρόβλημα 31.

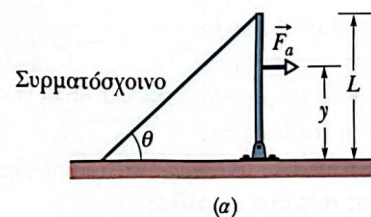
••32 Στο Σχ. 12-48 ο οδηγός ενός αυτοκινήτου σε οριζόντιο δρόμο φρενάρει απότομα, με αποτέλεσμα να μπλοκάρουν και οι τέσσερις τροχοί, οπότε το αυτοκίνητο αρχίζει να ολισθαίνει. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ των ελαστικών και του δρόμου είναι 0.40. Η απόσταση μεταξύ του εμπρό-



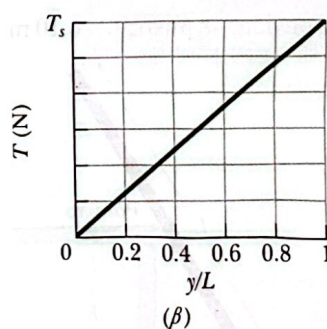
Σχήμα 12-48 Πρόβλημα 32.

σθίου και οπίσθιου άξονα του αυτοκινήτου είναι $L = 4.2$ m και το κέντρο μάζας του αυτοκινήτου βρίσκεται σε απόσταση $d = 1.8$ m πίσω από τον εμπρόσθιο άξονα και σε απόσταση $h = 0.75$ m πάνω από το δρόμο. Το αυτοκίνητο ζυγίζει 11 kN. Να βρείτε το μέτρο (α) της επιτάχυνσης φρεναρίσματος, (β) της κάθετης δύναμης σε κάθε οπίσθιο τροχό, (γ) της κάθετης δύναμης σε κάθε μπροστινό τροχό, (δ) της δύναμης φρεναρίσματος σε κάθε οπίσθιο τροχό και (ε) της δύναμης φρεναρίσματος σε κάθε μπροστινό τροχό. (Υπόδειξη: Παρόλο που το αυτοκίνητο δεν βρίσκεται σε μεταφορική ισορροπία, βρίσκεται σε περιστροφική ισορροπία.)

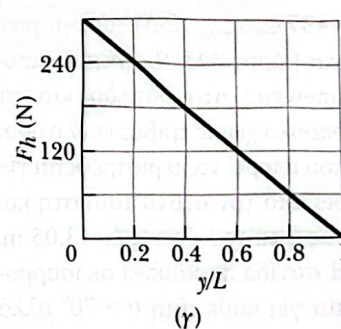
••33 Το Σχήμα 12-49α δείχνει μια κατακόρυφη ομογενή δοκό μήκους L η οποία είναι αρθρωμένη στο κατώτερο άκρο της. Μια οριζόντια δύναμη εφαρμόζεται στη δοκό σε απόσταση y από το κατώτερο άκρο της. Η δοκός παραμένει κατακόρυφη εξαιτίας αντηρίδας δεμένης στο πάνω άκρο της, σε γωνία θ ως προς την οριζόντιο. Το Σχήμα 12-49β δίνει την τάση T στην αντηρίδα σαν συνάρτηση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, δοσμένου ως το κλάσμα y/L του μήκους της δοκού. Η κλίμακα του άξονα T καθορίζεται από την τιμή $T_s = 600$ N. Το Σχήμα 12-49γ δίνει το μέτρο της οριζόντιας δύναμης στη δοκό από την άρθρωση, επίσης ως συνάρτηση του y/L . Να υπολογίσετε (α) τη γωνία θ και (β) το μέτρο της $\vec{F}_a$.



(α)



(β)



(γ)

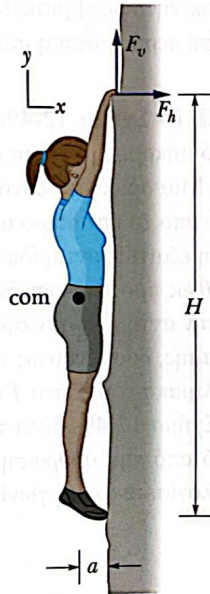
Σχήμα 12-49 Πρόβλημα 33.

••34 Στο Σχ. 12-45 μια λεπτή οριζόντια ράβδος AB , αμελητέου βάρους και μήκους L , αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο στο A και υποστηρίζεται στο B από λεπτό συρματόσχοινο BC το οποίο σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Ένα σώμα βάρους W μπορεί να μετακινηθεί οπουδήποτε κατά μήκος της ράβδου η θέση του ορίζεται από την απόσταση x από τον τοίχο μέχρι το κέντρο μάζας του. Να βρείτε (α) την τάση στο συρματόσχοινο και (β) την οριζόντια και (γ) την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης στη ράβδο από την άρθρωση στο A σε συνάρτηση του x .

••35 Ένα κυβικό κιβώτιο γεμίζεται με άμμο και έχει βάρος 890 N. Θέλουμε να «κυλήσουμε» (να γείρουμε και ν' ανε-

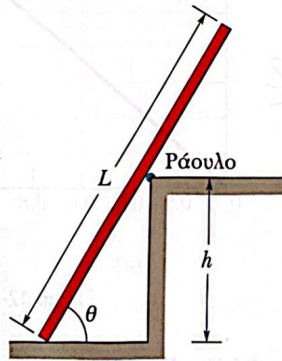
τρέψουμε) το κιβώτιο σπρώχνοντάς το οριζόντια σε μια από τις πάνω ακμές του. (α) Πόση είναι η ελάχιστη δύναμη που απαιτείται; (β) Πόσος ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής απαιτείται μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου; (γ) Εάν υπάρχει πιο αποτελεσματικός τρόπος να γείρουμε το κιβώτιο, να βρείτε την ελάχιστη δυνατή δύναμη που θα πρέπει ν' ασκηθεί απευθείας στο κιβώτιο για να το γείρει. (Υπόδειξη: Πού βρίσκεται η κάθετη δύναμη κατά την έναρξη της ανατροπής;)

••36 Το Σχήμα 12-50 δείχνει μια αναρριχήτρια μάζας 70 kg να κρέμεται πιάνοντας το άκρο του οριζόντιου, στενού γεισώματος στο βράχο, με τα δάχτυλα του ενός χεριού μόνο. (Κάμπτει και πιέζει τα δάχτυλα προς τα κάτω για να βελτιώσει το κράτημα.) Τα πόδια της αγγίζουν το βράχο σε απόσταση $H = 2.0$ m κατευθείαν προς τα κάτω από τα κυρτωμένα δάχτυλά της, αλλά δεν παρέχουν κάποια στήριξη. Το κέντρο μάζας της βρίσκεται σε απόσταση $a = 0.20$ m από τον βράχο. Υποθέστε ότι η δύναμη από το γείσωμα που στηρίζει τα δάχτυλά της κατανέμεται ισομερώς ανάμεσα στα τέσσερα δάχτυλα. Ποια είναι η τιμή (α) της οριζόντιας συνιστώσας F_h και (β) της κατακόρυφης συνιστώσας F_v της δύναμης σε κάθε δάχτυλο;



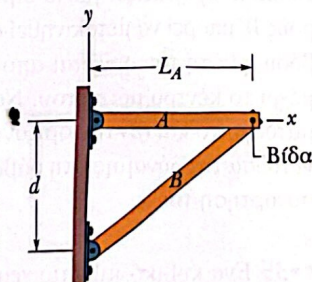
Σχήμα 12-50 Πρόβλημα 36.

••37 Στο Σχ. 12-51 μια ομογενής σανίδα, με μήκος $L = 6.10$ m και βάρος 445 N, ηρεμεί ακουμπώντας στο δάπεδο και σε ράουλο χωρίς τριβές (κύλινδρος που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του) στη κορυφή τοίχου ύψους $h = 3.05$ m. Η σανίδα παραμένει σε ισορροπία για κάθε τιμή $\theta > 70^\circ$ αλλά ολισθαίνει εάν $\theta < 70^\circ$. Να βρείτε τον συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ της σανίδας και του εδάφους.



Σχήμα 12-51 Πρόβλημα 37.

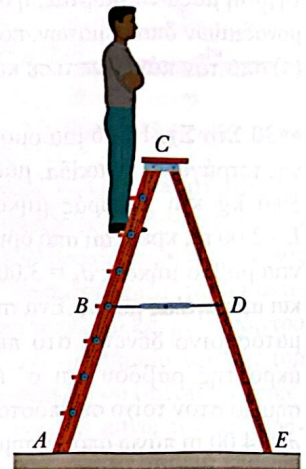
••38 Στο Σχ. 12-52 οι ομογενείς δοκοί A και B είναι στερεωμένες σ' έναν τοίχο με αρθρώσεις και είναι χαλαρά βιδωμένες μεταξύ τους (δεν υπάρχει ροπή από τη μία δοκό στην άλλη). Η δοκός A έχει μήκος $L_A = 2.40$ m και μάζα 54.0 kg η δοκός B έχει μάζα 68.0 kg. Τα δύο σημεία άρθρωσης απέ-



Σχήμα 12-52 Πρόβλημα 38.

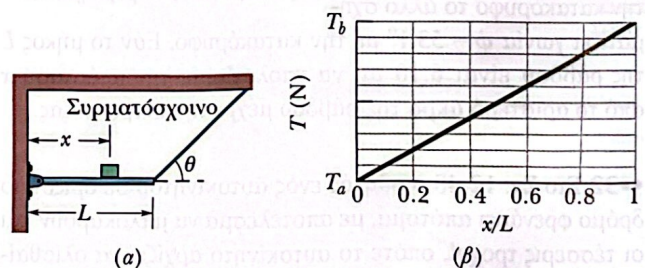
χουν απόσταση $d = 1.80$ m. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόση είναι η δύναμη (α) στη δοκό A εξαιτίας της άρθρωσής της, (β) στη δοκό A εξαιτίας της βίδας, (γ) στη δοκό B εξαιτίας της άρθρωσής της και (δ) στη δοκό B εξαιτίας της βίδας;

•••39 Για τη σκάλα που φαίνεται στο Σχ. 12-53, τα σκέλη AC και CE έχουν μήκος 2.44 m το καθένα και αρθρώνονται στο C. Η ράβδος BD είναι ράβδος-σύνδεσμος, μήκους 0.762 m, στο μισό ύψος. Ένας άνθρωπος βάρους 854 N σκαρφαλώνει 1.80 m πάνω στη σκάλα. Υποθέτοντας ότι το δάπεδο είναι χωρίς τριβές και αγνοώντας τη μάζα της σκάλας, να βρείτε (α) την τάση στη ράβδο-σύνδεσμο και τα μέτρα των δυνάμεων στη σκάλα από το δάπεδο (β) στο A και (γ) στο E. (Υπόδειξη: Απομονώστε τμήματα της σκάλας όταν εφαρμόζετε τις συνθήκες ισορροπίας.)



Σχήμα 12-53 Πρόβλημα 39.

•••40 Το Σχήμα 12-54α δείχνει μια οριζόντια ομογενή δοκό μάζας m_b και μήκους L που στηρίζεται στ' αριστερά με άρθρωση στερεωμένη σ' έναν τοίχο και στα δεξιά μ' ένα συρματόσχοινο σε γωνία θ με την οριζόντιο. Ένα πακέτο μάζας m_p τοποθετείται στη δοκό, σε απόσταση x από το αριστερό της άκρο. Η συνολική μάζα είναι $m_b + m_p = 61.22$ kg. Το Σχήμα 12-54β δίνει την τάση T στο συρματόσχοινο ως συνάρτηση της θέσης του πακέτου, η οποία δίνεται ως το κλάσμα x/L του μήκους της δοκού. Η κλίμακα του άξονα T καθορίζεται από τις τιμές $T_a = 500$ N και $T_b = 700$ N. Να υπολογίσετε (α) τη γωνία θ , (β) τη μάζα m_b και (γ) τη μάζα m_p .



Σχήμα 12-54 Πρόβλημα 40.

•••41 Ένα κιβώτιο, σχήματος κύβου με ακμές μήκους 1.2 m, περιέχει ένα εξάρτημα κάποιας μηχανής· το κέντρο μάζας του κιβωτίου και του περιεχομένου του βρίσκεται 0.30 m πάνω από το γεωμετρικό κέντρο του κιβωτίου. Το κιβώτιο ηρεμεί σε ράμπα που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Καθώς αυξάνεται η γωνία θ από το μηδέν, θα έρθει κάποια στιγμή (γωνία) στην οποία είτε το κιβώτιο θα γείρει ή θ' αρχίσει να ολισθαίνει στη ράμπα. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της ράμπας και του κιβωτίου είναι 0.60, (α) το κιβώτιο γέρνει ή ολισθαίνει και (β) σε πόση γωνία θ συμβαίνει αυτό; Εάν $\mu_s = 0.70$, (γ) το κιβώτιο γέρνει ή ολισθαίνει και (δ)

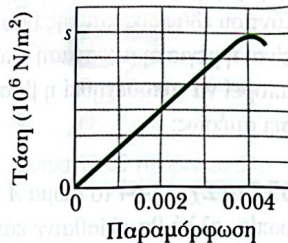
σε πόση γωνία θ συμβαίνει αυτό; (Υπόδειξη: Στην έναρξη της ανατροπής, πού βρίσκεται η κάθετη δύναμη από τη ράμπα;)

•••42 Στο Σχ. 12-7 και το αντίστοιχο ενδεικτικό πρόβλημα, έστω ότι ο συντελεστής στατικής τριβής μ_s μεταξύ της σκάλας και του πεζοδρομίου είναι 0.53. Πόσο ψηλά (επί τις εκατό), πάνω στη σκάλα πρέπει να πάει ο πυροσβέστης για να τη θέσει στο όριο ολίσθησης;

Ενότητα 12-3 Ελαστικότητα

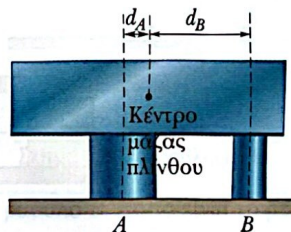
•43 Μια οριζόντια ράβδος αλουμινίου, διαμέτρου 4.8 cm, προβάλλει κατά 5.3 cm από τοίχο. Ένα αντικείμενο που ζυγίζει 1200 kg κρεμάται από το άκρο της ράβδου. Το μέτρο διάτμησης του αλουμινίου είναι $3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Αγνοώντας τη μάζα της ράβδου, να βρείτε (α) τη διατμητική τάση στη ράβδο και (β) την κατακόρυφη απόκλιση του άκρου της.

•44 Το Σχήμα 12-55 δείχνει την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης κάποιου υλικού. Η κλίμακα του άξονα της τάσης καθορίζεται από την τιμή $s = 300$, σε μονάδες 10^6 N/m^2 . Πόσο είναι (α) το μέτρο του Young και (β) το όριο αντοχής (προσεγγιστικά) γι' αυτό το υλικό;



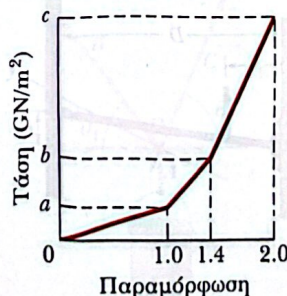
Σχήμα 12-55 Πρόβλημα 44.

••45 Στο Σχ. 12-56 ένας πλίνθος μολύβδου ηρεμεί σε οριζόντια θέση πάνω στους κυλίνδρους Α και Β. Τα εμβαδά στις επάνω επιφάνειες των κυλίνδρων συνδέονται μέσω της σχέσης $A_A = 2A_B$, τα μέτρα του Young για τους κυλίνδρους συνδέονται μέσω της σχέσης $E_A = 2E_B$. Οι κύλινδροι είχαν ίσα μήκη πριν τοποθετηθεί ο πλίνθος μολύβδου πάνω τους. Ποιο κλάσμα της μάζας του πλίνθου στηρίζεται (α) από τον κύλινδρο Α και (β) από τον κύλινδρο Β; Οι οριζόντιες αποστάσεις μεταξύ του κέντρου μάζας του πλίνθου και των κεντρικών αξόνων των κυλίνδρων είναι d_A για τον κύλινδρο Α και d_B για τον κύλινδρο Β. (γ) Πόσος είναι ο λόγος d_A/d_B ;



Σχήμα 12-56 Πρόβλημα 45.

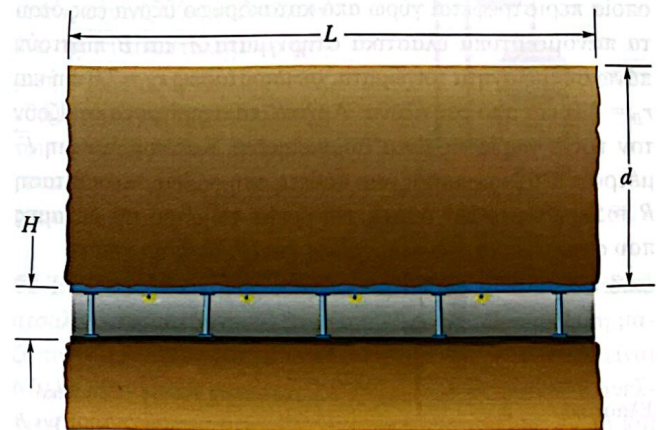
••46 Το Σχήμα 12-57 δείχνει το προσεγγιστικό διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για νήμα ιστού αράχνης, έως το όριο θραύσης για παραμόρφωση 2.00. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα καθορίζεται από τις τιμές $a = 0.12 \text{ GN/m}^2$, $b = 0.30 \text{ GN/m}^2$ και $c = 0.80 \text{ GN/m}^2$. Υποθέστε ότι το νήμα έχει αρχικό μήκος 0.80 cm, αρχικό εμβαδό διατομής $8.0 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ και (κατά την παραμόρφωση) σταθερό όγκο.



Σχήμα 12-57 Πρόβλημα 46.

Η παραμόρφωση του νήματος εκφράζεται ως ο λόγος της αλλαγής του μήκους προς το αρχικό μήκος του νήματος ενώ η τάση ως ο λόγος της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας. Υποθέστε επίσης ότι όταν ένα μοναδικό νήμα συλλαμβάνει κάποιο ιπτάμενο έντομο, η κινητική ενέργεια του εντόμου μεταφέρεται στην παραμόρφωση του νήματος. (α) Πόση κινητική ενέργεια θα έφερνε το νήμα σχεδόν στο όριο θραύσης; Πόση είναι η κινητική ενέργεια (β) μια κοινής μύγας μάζας 6.00 mg και ταχύτητας 1.70 m/s και (γ) ενός μπουμπουρά μάζας 0.388 g και ταχύτητας 0.420 m/s; Θα σπάσει (γ) η μύγα και (δ) ο μπουμπουράς το νήμα;

••47 Σήραγγα μήκους $L = 150 \text{ m}$, ύψους $H = 7.2 \text{ m}$ και πλάτους 5.8 m (με επίπεδη οροφή) πρόκειται να κατασκευαστεί σε απόσταση $d = 60 \text{ m}$ κάτω από την επιφάνεια του εδάφους. (Βλέπε Σχ. 12-58.) Η οροφή της σήραγγας θα στηρίζεται αποκλειστικά σε ατσάλινες τετράγωνες κολόνες, κάθε μία μ' εμβαδό διατομής 960 cm^2 . Η μάζα 1.0 cm^3 εδάφους είναι 2.8 g. (α) Πόσο είναι το συνολικό βάρος εδάφους που πρέπει να στηρίζουν οι κολόνες; (β) Πόσες κολόνες χρειάζονται για να διατηρηθεί η τάση συμπίεσης σε κάθε κολόνα στο μισό της μέγιστης αντοχής;



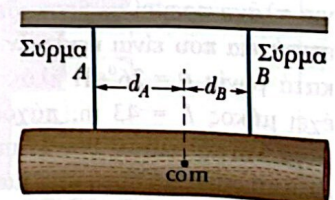
Σχήμα 12-58 Πρόβλημα 47.

••48 Το Σχήμα 12-59 δείχνει το διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για ένα σύρμα αλουμινίου που εφελκύεται από μηχανή που τραβάει προς αντίθετες κατευθύνσεις τα δύο άκρα του. Η κλίμακα του άξονα της τάσης καθορίζεται από την τιμή $s = 7.0$ σε μονάδες 10^7 N/m^2 . Το σύρμα έχει αρχικό μήκος 0.800 m και αρχικό εμβαδό διατομής $2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Πόσο έργο εκτελεί η δύναμη της μηχανής για να δημιουργήσει παραμόρφωση 1.00×10^{-3} ;



Σχήμα 12-59 Πρόβλημα 48.

••49 Στο Σχ. 12-60 ένας ομογενής κορμός δέντρου μάζας 103 kg κρέμεται με δύο ατσάλινα συρματόσχοινα Α και Β, και τα δύο διαμέτρου 1.20 mm. Αρχικά το συρματόσχοινο Α



Σχήμα 12-60 Πρόβλημα 49.

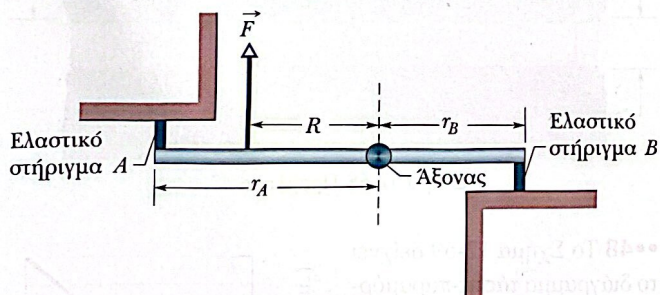
ήταν 2.50 m μακρύ και 2.00 mm κοντύτερο από το συρματόσχοινο B . Τώρα ο κορμός είναι οριζόντιος. Πόσο είναι το μέτρο των δυνάμεων στον κορμό (α) από το συρματόσχοινο A και (β) από το συρματόσχοινο B ; (γ) Πόσος είναι ο λόγος d_A/d_B ;

•••50 Το Σχήμα 12-61 παριστάνει ένα έντομο που έχει πιαστεί στο μεσαίο σημείο του νήματος ιστού αράχνης. Το νήμα σπάζει κάτω από τάση $8.20 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ και παραμόρφωση 2.00. Αρχικά το νήμα ήταν οριζόντιο, είχε μήκος 2.00 cm και εμβαδό διατομής $8.00 \times 10^{-12} \text{ m}^2$. Καθώς το νήμα τεντώθηκε κάτω από το βάρος του εντόμου, ο όγκος του παρέμεινε σταθερός. Εάν το βάρος του εντόμου φέρνει το νήμα στο όριο θραύσης, πόση είναι η μάζα του εντόμου; (Ο ιστός της αράχνης είναι φτιαγμένος έτσι ώστε να σπάει εάν ένα πιθανά επιβλαβές έντομο για την αράχνη, όπως ο μπούμπουρας, πιαστεί σ' αυτόν.)



Σχήμα 12-61 Πρόβλημα 50.

•••51 Το Σχήμα 12-62 είναι η κάτοψη συμπαγούς ράβδου η οποία περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα έως ότου τα πανομοιότυπα ελαστικά στηρίγματα A και B πιεστούν πάνω σε ακλόνητα τοιχώματα, σε αποστάσεις $r_A = 7.0 \text{ cm}$ και $r_B = 4.0 \text{ cm}$ από τον άξονα. Αρχικά, τα στηρίγματα αγγίζουν τον τοίχο χωρίς να είναι συμπιεσμένα. Κατόπιν δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 220 N εφαρμόζεται κάθετα στη ράβδο σε απόσταση $R = 5.0 \text{ cm}$ από τον άξονα. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που συμπιέζει (α) το στήριγμα A και (β) το στήριγμα B .

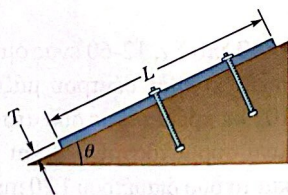


Σχήμα 12-62 Πρόβλημα 51.

Συμπληρωματικά Προβλήματα

52 Μετά από πτώση, ένας ορειβάτης μάζας 95 kg βρίσκει τον εαυτό του να κρέμεται από το άκρο σχοινιού μήκους 15 m και διαμέτρου 9.6 mm το οποίο όμως έχει εκταθεί κατά 2.8 cm. Να υπολογίσετε (α) την παραμόρφωση, (β) την τάση και (γ) το μέτρο του Young για το σχοινί.

53 Στο Σχ. 12-63 μια ορθογώνια πλάκα ηρεμεί σε βραχώδη επιφάνεια που είναι κεκλιμένη κατά γωνία $\theta = 26^\circ$. Η πλάκα έχει μήκος $L = 43 \text{ m}$, πάχος $T = 2.5 \text{ m}$ και πλάτος $W = 12 \text{ m}$, ενώ 1.0 cm^3 από αυτή έχει μάζα 3.2 g. Ο συντελεστής στατι-

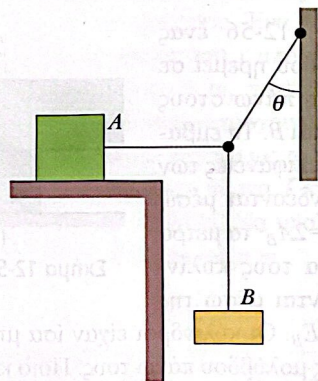


Σχήμα 12-63 Πρόβλημα 53.

κής τριβής μεταξύ της πλάκας και του βράχου είναι 0.39. (α) Να υπολογίσετε τη συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης στην πλάκα που είναι παράλληλη με τη βραχώδη επιφάνεια. (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής στην πλάκα. Συγκρίνοντας τα (α) και (β) μπορείτε να δείτε ότι η πλάκα κινδυνεύει να ολισθήσει. Αυτό αποφεύγεται μόνο από τυχαίες μικρές προεξοχές της βραχώδους επιφάνειας. (γ) Για να σταθεροποιήσουμε τη πλάκα, πριτσίνια πρόκειται να καρφωθούν κάθετα στη βραχώδη επιφάνεια (δύο από αυτά φαίνονται στο σχήμα). Εάν κάθε πριτσίνι έχει εμβαδό διατομής 6.4 cm^2 και θα σπάσει κάτω από διατμητική τάση $3.6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, ποιος είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός τους; Υποθέστε ότι τα πριτσίνια δεν επηρεάζουν την κάθετη δύναμη.

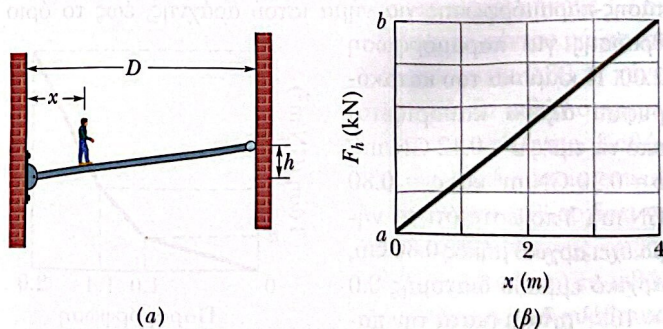
54 Μια ομογενής σκάλα, της οποίας το μήκος είναι 5.0 m και το βάρος της είναι 400 N, γέρνει πάνω σε κατακόρυφο τοίχο χωρίς τριβή. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του οριζόντιου εδάφους και της βάσης της σκάλας είναι 0.46. Πόση είναι η μέγιστη απόσταση από τη βάση του τοίχου στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας, χωρίς να ολισθήσει αμέσως;

55 Στο Σχ. 12-64 το σώμα A (μάζα 10 kg) βρίσκεται σε ισορροπία, αλλά θα ολισθαίνει εάν το σώμα B (μάζα 5.0 kg) ήταν βαρύτερο. Για γωνία $\theta = 30^\circ$, πόσος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος A και της επιφάνειας από κάτω του;



Σχήμα 12-64 Πρόβλημα 55.

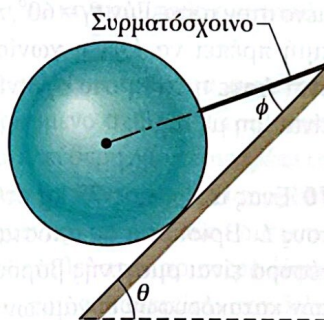
56 Το Σχήμα 12-65α δείχνει μια ομογενή ράμπα μεταξύ δύο κτηρίων η οποία επιτρέπει σχετική μετακίνηση των κτηρίων εξαιτίας ισχυρών ανέμων. Στο αριστερό της άκρο η ράμπα είναι αρθρωμένη στον τοίχο του κτηρίου στο δεξί της άκρο



Σχήμα 12-65 Πρόβλημα 56.

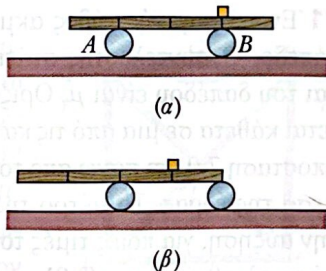
έχει ράουλο (κύλινδρος που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του) το οποίο μπορεί να κυλάει κατά μήκος του τοίχου του κτηρίου. Δεν υπάρχει κατακόρυφη δύναμη από το κτήριο στο ράουλο, μόνο μια οριζόντια δύναμη μέτρου F_h . Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των κτηρίων είναι $D = 4.00 \text{ m}$. Η ανύψωση της ράμπας είναι $h = 0.490 \text{ m}$. Ένας άνθρωπος περπατάει κατά μήκος της ράμπας από τ' αριστερά. Το Σχήμα 12-65β δίνει την F_h ως συνάρτηση της οριζόντιας απόστασης x του ανθρώπου από το κτήριο στ' αριστερά. Η κλίμακα του άξονα F_h καθορίζεται από τις τιμές $a = 20 \text{ kN}$ και $b = 25 \text{ kN}$. Πόση είναι η μάζα (α) της ράμπας και (β) του ανθρώπου;

57 Στο Σχ. 12-66 μια σφαίρα των 10 kg στηρίζεται σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβή, γωνίας $\theta = 45^\circ$ ως προς την οριζόντιο. Η γωνία ϕ είναι 25° . Να υπολογίσετε την τάση στο συρματόσχοινο.



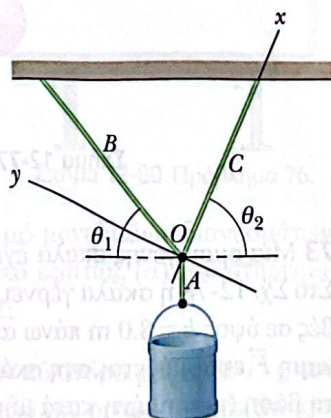
Σχήμα 12-66 Πρόβλημα 57.

58 Στο Σχ. 12-67α μια ομογενής δοκός μάζας 40.0 kg είναι κεντραρισμένη ανάμεσα σε δύο ράουλα (κύλινδροι που μπορούν να περιστρέφονται γύρω από τον άξονά τους). Κατακόρυφες χαραγές κατά μήκος της δοκού δηλώνουν ίσες αποστάσεις. Δύο από τις χαραγές είναι κεντραρισμένες πάνω από τα ράουλα ένα πακέτο των 10.0 kg βρίσκεται πάνω από το ράουλο B . Πόσο είναι το μέτρο των δυνάμεων στη δοκό (α) από το ράουλο A και (β) από το ράουλο B ; Κατόπιν η δοκός κυλίεται προς τ' αριστερά μέχρις ότου το δεξιό άκρο έρθει πάνω από το ράουλο B (Σχ. 12-67β). Πόσο είναι τώρα το μέτρο των δυνάμεων στη δοκό (γ) από το ράουλο A και (δ) από το ράουλο B ; Μετά η δοκός κυλίεται προς τα δεξιά. Υποθέστε ότι έχει μήκος 0.800 m . (ε) Ποια οριζόντια απόσταση μεταξύ του πακέτου και του ράουλου B κάνει τη δοκό να χάσει (οριακά) επαφή με το ράουλο A ;



Σχήμα 12-67 Πρόβλημα 58.

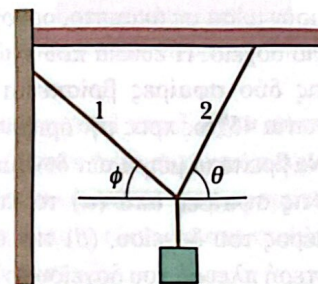
59 Στο Σχ. 12-68 ένας κουβάς οικοδομής, μάζας 817 kg , κρέμεται από το συρματόσχοινο A το οποίο είναι συνδεδεμένο στο O με δύο άλλα συρματόσχοινα B και C , τα οποία σχηματίζουν γωνίες $\theta_1 = 51.0^\circ$ και $\theta_2 = 66.0^\circ$ με την οριζόντιο. Να βρείτε τις τάσεις (α) στο συρματόσχοινο A και (β), στο συρματόσχοινο B και (γ) στο συρματόσχοινο C . (Υπόδειξη: Για ν'



Σχήμα 12-68 Πρόβλημα 59.

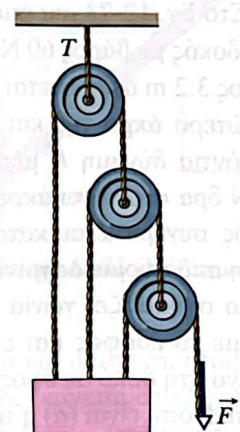
αποφύγετε να λύσετε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, πάρτε τους άξονες όπως φαίνεται στο σχήμα.)

60 Στο Σχ. 12-69 ένα πακέτο μάζας m κρέμεται δεμένο στον τοίχο με το σχοινί 1 και στην οροφή με το σχοινί 2. Το σχοινί 1 βρίσκεται σε γωνία $\phi = 40^\circ$ με την οριζόντιο το σχοινί 2 βρίσκεται σε γωνία θ . (α) Για ποια τιμή της θ ελαχιστοποιείται η τάση στο σχοινί 2; (β) Πόση είναι η ελάχιστη τάση στο σχοινί 2, εκφρασμένη με το βάρος mg ;



Σχήμα 12-69 Πρόβλημα 60.

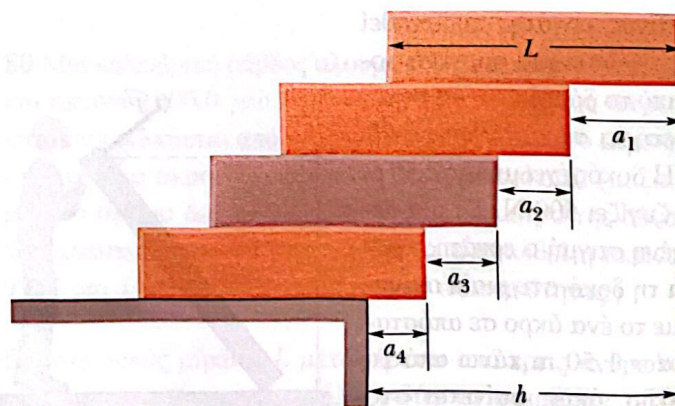
61 Η δύναμη $\vec{F}$ στο Σχ. 12-70 διατηρεί το σώμα των 6.40 kg και τις τροχαλίες σε ισορροπία. Οι τροχαλίες έχουν αμελητέα μάζα και τριβή. Να υπολογίσετε την τάση T στο επάνω σχοινί. (Υπόδειξη: Όταν ένα σχοινί είναι τυλιγμένο στη μισή περίμετρο τροχαλίας όπως εδώ, το μέτρο της συνολικής του δύναμης στην τροχαλία είναι διπλάσιο της τάσης του σχοινιού.)



Σχήμα 12-70 Πρόβλημα 61.

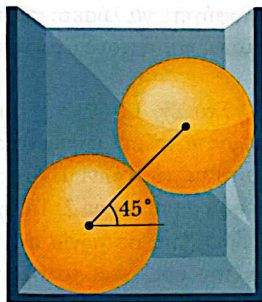
62 Ένας ανελκυστήρας ορυχείου κρέμεται μ' ένα μοναδικό ατσάλινο συρματόσχοινο διαμέτρου 2.5 cm . Η συνολική μάζα του κλωβού του ανελκυστήρα και των επιβαινόντων είναι 670 kg . Κατά πόσο εκτείνεται το συρματόσχοινο όταν ο ανελκυστήρας κρέμεται (α) με συρματόσχοινο μήκους 12 m και (β) με συρματόσχοινο μήκους 362 m ; (Αγνοήστε τη μάζα του συρματόσχοινου.)

63 Τέσσερα τούβλα μήκους L , όμοια και ομογενή, στοιβάζονται το ένα πάνω στο άλλο (Σχ. 12-71) με τέτοιο τρόπο ώστε μέρος από το καθένα να προεξέχει από το προηγούμενο. Να βρείτε, σαν συνάρτηση του L , τις μέγιστες τιμές (α) του a_1 , (β) του a_2 , (γ) του a_3 , (δ) του a_4 και (ε) του h , έτσι ώστε η στοίβα να βρίσκεται σε ισορροπία.



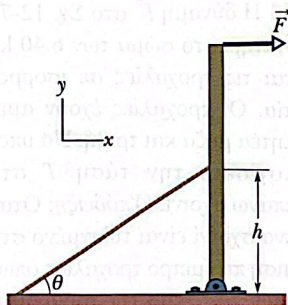
Σχήμα 12-71 Πρόβλημα 63.

64 Στο Σχ. 12-72 δύο πανομοιότυπες, ομογενείς σφαίρες χωρίς τριβή, κάθε μία μάζας m , ηρεμούν μέσα σε άκαμπτο, ορθογώνιο δοχείο. Η ευθεία που ενώνει τις δύο σφαίρες βρίσκεται σε γωνία 45° ως προς την οριζόντιο. Να βρείτε τα μέτρα των δυνάμεων στις σφαίρες από (α) το κάτω μέρος του δοχείου, (β) την αριστερή πλευρά του δοχείου, (γ) τη δεξιά πλευρά του δοχείου και (δ) μεταξύ τους. (Υπόδειξη: Η δύναμη της μιας σφαίρας στην άλλη έχει φορέα την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας τους.)



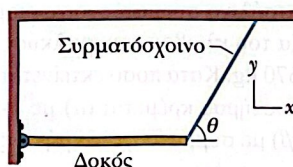
Σχήμα 12-72 Πρόβλημα 64.

65 Στο Σχ. 12-73 μια ομογενής δοκός με βάρος 60 N και μήκος 3.2 m αρθρώνεται στο κατώτερο άκρο της και μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 50 N δρα στο πάνω άκρο. Η δοκός συγκρατείται κατακόρυφη από συρματόσχοινο το οποίο σχηματίζει γωνία $\theta = 25^\circ$ με το έδαφος και είναι δεμένο στη δοκό σε ύψος $h = 2.0$ m. Πόση είναι (α) η τάση στο συρματόσχοινο και (β) η δύναμη στη δοκό από την άρθρωση, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων;



Σχήμα 12-73 Πρόβλημα 65.

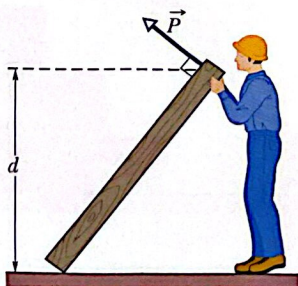
66 Μια ομογενής δοκός έχει μήκος 5.0 m και μάζα 53 kg. Στο Σχ. 12-74 η δοκός στηρίζεται σε οριζόντια θέση από μια άρθρωση κι ένα συρματόσχοινο σε γωνία $\theta = 60^\circ$. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόση είναι η δύναμη στη δοκό από την άρθρωση;



Σχήμα 12-74 Πρόβλημα 66.

67 Ένας συμπαγής χάλκινος κύβος έχει μήκος ακμής 85.5 cm. Πόση τάση πρέπει να εφαρμοστεί στον κύβο για να ελαττωθεί το μήκος ακμής στα 85.0 cm; Το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας του χαλκού είναι 1.4×10^{11} N/m².

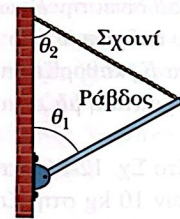
68 Ένας εργάτης προσπαθεί ν' ανυψώσει μια ομογενή δοκό από το δάπεδο και να τη τοποθετήσει σε κατακόρυφη θέση. Η δοκός έχει μήκος 2.50 m και ζυγίζει 500 N. Σε μια δεδομένη στιγμή ο εργάτης κρατάει τη δοκό στιγμιαία ακίνητη με το ένα άκρο σε απόσταση $d = 1.50$ m πάνω από το δάπεδο, όπως φαίνεται στο Σχ. 12-75, ασκώντας δύναμη



Σχήμα 12-75 Πρόβλημα 68.

$\vec{P}$ στη δοκό, κάθετα σ' αυτή. (α) Πόσο είναι το μέτρο P ; (β) Πόσο είναι το μέτρο της συνολικής (συνισταμένης) δύναμης του δαπέδου στη δοκό; (γ) Πόση είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της δοκού και του δαπέδου έτσι ώστε να μην ολισθήσει η δοκός τη δεδομένη χρονική στιγμή;

69 Στο Σχ. 12-76 μια ομογενής ράβδος μάζας m αρθρώνεται σε κτήριο στο κάτω της άκρο ενώ το άνω της άκρο συγκρατείται στη θέση του με σχοινί που είναι δεμένο στον τοίχο. Εάν $\theta_1 = 60^\circ$, ποια τιμή πρέπει να έχει η γωνία θ_2 έτσι ώστε η τάση στο σχοινί να είναι ίση με $mg/2$;

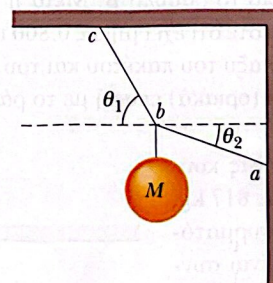


Σχήμα 12-76 Πρόβλημα 69.

70 Ένας άνθρωπος 73 kg στέκεται σε οριζόντια γέφυρα μήκους L . Βρίσκεται σε απόσταση $L/4$ από το ένα άκρο της. Η γέφυρα είναι ομογενής βάρους 2.7 kN. Πόσα είναι τα μέτρα των κατακόρυφων δυνάμεων στη γέφυρα από τα στηρίγματα (α) στο πιο απομακρυσμένο από τον άνθρωπο άκρο και (β) στο πλησιέστερο στον άνθρωπο άκρο;

71 Ένας ομογενής κύβος ακμής 8.0 cm ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του κύβου και του δαπέδου είναι μ . Οριζόντια δύναμη έλξης $\vec{P}$ εφαρμόζεται κάθετα σε μια από τις κατακόρυφες έδρες του κύβου, σε απόσταση 7.0 cm πάνω από το δάπεδο στην κατακόρυφη διάμεσο της έδρας. Το μέτρο της $\vec{P}$ αυξάνεται σταδιακά. Κατά την αύξηση, για ποιες τιμές του μ ο κύβος (α) θ' αρχίσει τελικά να ολισθαίνει και (β) θ' αρχίσει να γέρνει; (Υπόδειξη: Κατά την έναρξη της ανατροπής, πού βρίσκεται η κάθετη δύναμη από το δάπεδο;)

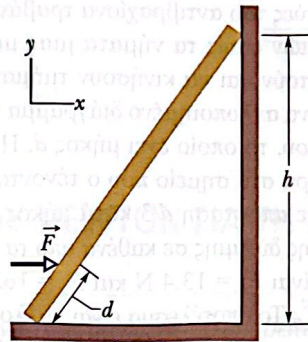
72 Το σύστημα του Σχ. 12-77 βρίσκεται σε ισορροπία. Οι γωνίες είναι $\theta_1 = 60^\circ$ και $\theta_2 = 20^\circ$ ενώ η μπάλα έχει μάζα $M = 2.0$ kg. Πόση είναι η τάση (α) στο νήμα ab και (β) στο νήμα bc ;



Σχήμα 12-77 Πρόβλημα 72.

73 Μια ομοιογενής σκάλα έχει μήκος 10 m και βάρος 200 N. Στο Σχ. 12-78 η σκάλα γέρνει σε κατακόρυφο τοίχο χωρίς τριβές σε ύψος $h = 8.0$ m πάνω από το έδαφος. Μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ εφαρμόζεται στη σκάλα σε απόσταση $d = 2.0$ m από τη βάση (μετρημένη κατά μήκος της σκάλας). (α) Εάν το μέτρο της δύναμης είναι $F = 50$ N, ποια είναι η τάση στο νήμα ab ;

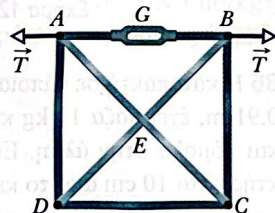
έδαφος από τη σκάλα, σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων; (β) Εάν $F = 150 \text{ N}$, πόση είναι η δύναμη στο έδαφος από τη σκάλα, επίσης σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων; (γ) Υποθέστε ότι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της σκάλας και του εδάφους είναι 0.38 για ποια ελάχιστη τιμή του μέτρου F της δύναμης η βάση της σκάλας μόλις που θ' αρχίσει να κινείται προς τον τοίχο;



Σχήμα 12-78 Πρόβλημα 73.

74 Ένας ζυγός ακριβείας αποτελείται από μια άκαμπτη, αβαρή ράβδο μ' ένα δίσκο στερεωμένο στο κάθε του άκρο. Η ράβδος στηρίζεται και είναι ελεύθερη να περιστρέφεται γύρω από σημείο που δεν είναι το κέντρο της. Ισορροπεί από άνισες μάζες τοποθετημένες στους δύο δίσκους. Όταν μια άγνωστη μάζα m τοποθετηθεί στον αριστερό δίσκο, εξισορροπείται από μια μάζα m_1 που τοποθετείται στο δεξιό δίσκο όταν η μάζα m τοποθετείται στο δεξιό δίσκο εξισορροπείται από μια μάζα m_2 στον αριστερό δίσκο. Να δείξετε ότι $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

75 Το τετράγωνο άκαμπτο πλαίσιο στο Σχ. 12-79 αποτελείται από τις τέσσερις πλευρικές ράβδους AB , BC , CD και DA συν δύο διαγώνιες ράβδους AC και BD οι οποίες διασταυρώνονται ελεύθερα στο E . Με τον σφιγκτήρα G η ράβδος AB τίθεται σε τάση σαν τα άκρα της να υπόκειντο σε οριζόντιες δυνάμεις T μέτρου 535 N προς τα έξω. (α) Ποια άλλη ράβδος βρίσκεται σε εφελκυσμό; Ποιά είναι τα μέτρα (β) των δυνάμεων που προκαλούν εφελκυσμό σ' αυτές τις ράβδους και (γ) των δυνάμεων που προκαλούν συμπίεση στις άλλες ράβδους; (Υπόδειξη: Η θεώρηση συμμετριών μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική απλοποίηση του προβλήματος.)



Σχήμα 12-79 Πρόβλημα 75.

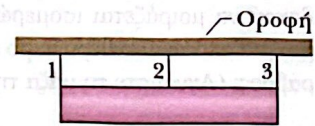
76 Μία αθλήτρια με μάζα 46.0 kg στέκεται στο άκρο οριζόντιας δοκού ισορροπίας όπως φαίνεται στο Σχ. 12-80. Η δοκός έχει μήκος 5.00 m και μάζα 250 kg (εξαιρούνται οι μάζες των δύο στηριγμάτων). Κάθε στηρίγμα απέχει 0.540 m από το πλησιέστερο άκρο της ράβδου. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, να βρεθούν οι δυνάμεις στη δοκό εξαιτίας (α) του στηρίγματος 1 και (β) του στηρίγματος 2;



Σχήμα 12-80 Πρόβλημα 76.

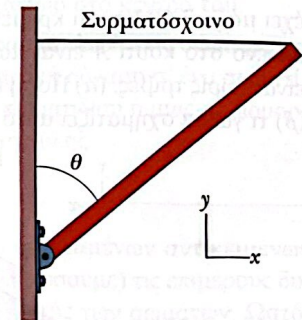
77 Το Σχήμα 12-81 δείχνει έναν κύλινδρο μάζας 300 kg που είναι οριζόντιος, κρεμασμένος από την οροφή με τρία ατσάλινα συρματόσχοινα. Τα συρματόσχοινα 1 και 3 είναι δεμένα

στα άκρα του κυλίνδρου ενώ το συρματόσχοινο 2 είναι δεμένο στο κέντρο του. Τα συρματόσχοινα έχουν το καθένα εμβαδό διατομής $2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Αρχικά (πριν τοποθετηθεί ο κύλινδρος) τα συρματόσχοινα 1 και 3 είχαν μήκος 2.00 m ενώ το συρματόσχοινο 2 ήταν 6.00 mm μακρύτερο. Τώρα (με τον κύλινδρο στη θέση του) και τα τρία συρματόσχοινα έχουν επιμηκυνθεί. Πόση είναι η τάση (α) στο συρματόσχοινο 1 και (β) στο συρματόσχοινο 2;



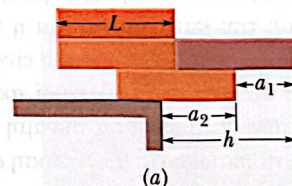
Σχήμα 12-81 Πρόβλημα 77.

78 Στο Σχ. 12-82 μια ομογενής δοκός μήκους 12.0 m στηρίζεται με οριζόντιο συρματόσχοινο και άρθρωση σε γωνία $\theta = 50.0^\circ$. Η τάση στο συρματόσχοινο είναι 400 N . Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόση είναι (α) η βαρυτική δύναμη στη δοκό και (β) η δύναμη από την άρθρωση στη δοκό;

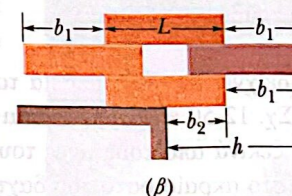


Σχήμα 12-82 Πρόβλημα 78.

79 Τέσσερα τούβλα μήκους L , όμοια και ομογενή, στοιβάζονται σε τραπέζι με δύο τρόπους, όπως φαίνεται στο Σχ. 12-83 (συγκρίνετε με το Πρόβλημα 63). Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την απόσταση h κατά την οποία προεξέχουν και στις δύο περιπτώσεις. Να βρείτε τις βέλτιστες αποστάσεις a_1 , a_2 , b_1 και b_2 και να υπολογίσετε το h για κάθε περίπτωση.



(α)



(β)

Σχήμα 12-83 Πρόβλημα 79.

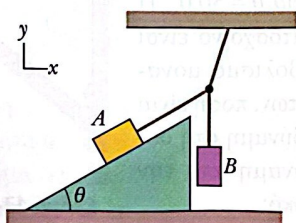
80 Μια κυλινδρική ράβδος αλουμινίου με αρχικό μήκος 0.8 m και ακτίνα $1000.0 \text{ }\mu\text{m}$, στερεώνεται στο ένα της άκρο και κατόπιν εφελκύεται από μηχανή, παράλληλα με το μήκος της από το άλλο άκρο. Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα όγκου) δεν αλλάζει, να βρείτε το μέτρο της δύναμης που απαιτείται από τη μηχανή για να ελαττωθεί η ακτίνα σε $999.9 \text{ }\mu\text{m}$. (Δεν υπερβαίνουμε το όριο ελαστικότητας.)

81 Μια δοκός μήκους L μεταφέρεται από τρεις ανθρώπους, ένας στο ένα άκρο και οι άλλοι δύο να στηρίζουν τη δοκό ανάμεσά τους με μια εγκάρσια ράβδο έτσι ώστε το φορτίο της

δοκού να μοιράζεται ισομερώς ανάμεσα στους τρεις. Πόσο μακριά από το ελεύθερο άκρο είναι τοποθετημένη η εγκάρσια ράβδος; (Αγνοήστε τη μάζα της ράβδου.)

82 Εάν η (τετράγωνη) δοκός στο Σχ. 12-6α και στο αντίστοιχο Ενδεικτικό Πρόβλημα είναι από έλατο Douglas, πόσο πρέπει να είναι το πάχος της για να διατηρηθεί η τάση συμπίεσης σ' αυτή στο $1/6$ της μέγιστης αντοχής;

83 Το Σχήμα 12-84 δείχνει μια στατική διάταξη δύο κουτιών γεμάτα με γραφική ύλη και τρία νήματα. Το κουτί A έχει μάζα 11.0 kg και βρίσκεται σε ράμπα γωνίας $\theta = 30.0^\circ$ το κουτί B έχει μάζα 7.00 kg και κρέμεται με νήμα. Το νήμα που είναι δεμένο στο κουτί A είναι παράλληλο με τη ράμπα, η οποία είναι χωρίς τριβές. (α) Πόση είναι η τάση στο επάνω νήμα και (β) τι γωνία σχηματίζει αυτό το νήμα με την οριζόντιο;

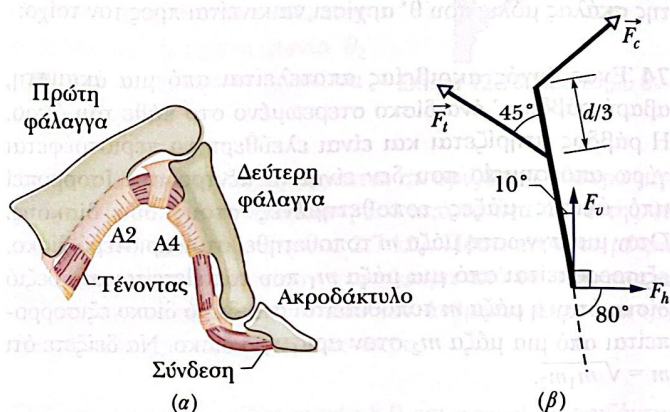


Σχήμα 12-84 Πρόβλημα 83.

84 Μια αυτοσχέδια κούνια κατασκευάζεται σχηματίζοντας μια θηλιά στο ένα άκρο ενός σχοινιού και δένοντας το άλλο στο κλαδί ενός δέντρου. Ένα παιδί κάθεται στη θηλιά με το σχοινί να είναι κατακόρυφο, όταν ο πατέρας του το τραβάει με οριζόντια δύναμη και το μετατοπίζει προς τη μία μεριά. Μόλις πριν το παιδί αφεθεί από την ακινησία, το σχοινί σχηματίζει γωνία 15° με την κατακόρυφο και η τάση του είναι 280 N . (α) Πόσο ζυγίζει το παιδί; (β) Πόσο είναι το μέτρο της οριζόντιας δύναμης του πατέρα στο παιδί ακριβώς πριν το αφήσει; (γ) Εάν η μέγιστη οριζόντια δύναμη που μπορεί ν' ασκήσει ο πατέρας στο παιδί είναι 93 N , πόση είναι η μέγιστη γωνία με την κατακόρυφο που μπορεί να σχηματίσει το σχοινί ενόσω ο πατέρας τραβάει οριζόντια;

85 Το Σχ. 12-85α δείχνει με λεπτομέρεια το δάχτυλο της αναρριχητήριας του Σχ. 12-50 καθώς κρατιέται απ' το βράχο. Ένας τένοντας που ξεκινά από τους μύες του αντιβραχίονα είναι συνδεδεμένος στο ακραίο οστό του δαχτύλου. Ο τένοντας περνάει από διάφορους οδηγούς που λέγονται τροχιλίες. Η τροχίλια A_2 είναι συνδεδεμένη στο πρώτο οστό του δαχτύλου η τροχίλια A_4 είναι συνδεδεμένη στο δεύτερο οστό του δαχτύλου. Για να τραβήξετε το δάχτυλο προς την παλάμη οι

μύες του αντιβραχίονα τραβάνε τον τένοντα μέσω των τροχιλών όπως τα νήματα μιας μαριονέτας μπορούν να τραβηχτούν και να κινήσουν τμήματά της. Το Σχήμα 12-85β είναι ένα απλοποιημένο διάγραμμα του δεύτερου οστού του δαχτύλου, το οποίο έχει μήκος d . Η έλξη $\vec{F}_t$ του τένοντα στο οστό δρα στο σημείο που ο τένοντας εισέρχεται στην τροχίλια A_4 , σε απόσταση $d/3$ κατά μήκος του οστού. Εάν οι συνιστώσες της δύναμης σε καθένα από τα τέσσερα δάχτυλα του Σχ. 12-50 είναι $F_h = 13.4 \text{ N}$ και $F_v = 162.4 \text{ N}$, πόσο είναι το μέτρο της $\vec{F}_t$; Το αποτέλεσμα είναι μάλλον ανεκτό, αλλά εάν η αναρριχητήρια κρατιέται μόνο από ένα ή δύο δάχτυλα, οι τροχιλίες A_2 και A_4 μπορεί να σπάσουν, συνηθισμένη πάθηση των αναρριχητών.



Σχήμα 12-85 Πρόβλημα 85.

86 Η καταπακτή σε κάποια οροφή είναι τετράγωνη με πλευρά 0.91 m , έχει μάζα 11 kg και μεντεσέδες στη μία της πλευρά και πόμολο στην άλλη. Εάν το κέντρο βάρους της καταπακτής είναι 10 cm από το κέντρο της προς την πλευρά με τους μεντεσέδες, πόσα είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται από την πόρτα (α) στο πόμολο και (β) στους μεντεσέδες;

87 Σ' ένα σωματίδιο ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1 = 8.40\hat{i} - 5.70\hat{j}$ και $\vec{F}_2 = 16.0\hat{i} + 4.10\hat{j}$, σε newton. (α) Πόση είναι η συνιστώσα x και (β) η συνιστώσα y της δύναμης $\vec{F}_3$, η οποία εξισορροπεί το άθροισμα αυτών των δύο δυνάμεων; (γ) Πόση γωνία σχηματίζει η $\vec{F}_3$ ως προς τον άξονα x ;

88 Ο κεκλιμένος Πύργος της Πίζα είναι 59.1 m ψηλός και 7.44 m σε διάμετρο. Η κορυφή του πύργου έχει μετατοπιστεί 4.01 m από την κατακόρυφο. Θεωρήστε τον πύργο σαν έναν ομογενή, κυκλικό κύλινδρο. (α) Πόση επιπλέον μετατόπιση, μετρημένη από την κορυφή, θα έφερνε τον πύργο στο όριο ανατροπής; (β) Πόση γωνία θα σχημάτιζε τότε ο πύργος με την κατακόρυφο;