

Διανύσματα

3-1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΟΥΣ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 3.01** Να προσθέτετε διανύσματα σχεδιάζοντάς τα σε διάταξη τέλους-αρχής, δηλαδή, με την τοποθέτηση του τέλους ενός διανύσματος στην αρχή του άλλου, εφαρμόζοντας την αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα.
- 3.02** Να αφαιρείτε ένα διάνυσμα από ένα δεύτερο διάνυσμα.
- 3.03** Να υπολογίζετε τις συνιστώσες ενός διανύσματος σε δε-

δομένο σύστημα συντεταγμένων, παρουσιάζοντάς τες σε κάποιο σχεδιάγραμμα.

- 3.04** Δεδομένων των συνιστωσών ενός διανύσματος, να σχεδιάζετε το διάνυσμα και να προσδιορίζετε το μέτρο του και την κατεύθυνσή του.

- 3.05** Να μετατρέπετε τιμές γωνιών μεταξύ μοιρών και ακτινίων.

Βασικές Ιδέες

- Τα βαθμωτά μεγέθη, όπως η θερμοκρασία, έχουν μόνο μέτρο. Προσδιορίζονται με έναν αριθμό μαζί με μια μονάδα (10°C) και υπακούνε στους κανόνες της αριθμητικής και της συνήθους άλγεβρας. Τα διανύσματα, όπως η μετατόπιση, έχουν και μέτρο και κατεύθυνση (5 m, βόρεια), και υπακούουν στους κανόνες της διανυσματικής άλγεβρας.

- Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούν να προστεθούν γεωμετρικά με το να σχεδιαστούν σε κοινή κλίμακα και να τοποθετηθούν έτσι ώστε η αρχή του ενός να είναι στο τέλος του προηγούμενου. Το διάνυσμα που συνδέει την αρχή του πρώτου με το τέλος του δεύτερου είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{s}$. Για να αφαιρέσετε το $\vec{b}$ από το $\vec{a}$, αντιστρέψτε την κατεύθυνση του $\vec{b}$ ώστε να πάρετε το $-\vec{b}$ και κατόπιν προσθέστε το $-\vec{b}$ στο $\vec{a}$. Η διανυσματική πρόσθεση είναι αντιμεταθετική και υπακούει στην προσεταιριστική ιδιότητα.

- Οι (βαθμωτές) συνιστώσες a_x και a_y , οποιουδήποτε δισδιάστατου διανύσματος $\vec{a}$, κατά μήκος των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, βρίσκονται αν φέρουμε κάθετες ευθείες από τα άκρα του $\vec{a}$ στους άξονες του συστήματος. Οι συνιστώσες δίνονται από

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{και} \quad a_y = a \sin \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x και της κατεύθυνσης του $\vec{a}$. Το αλγεβρικό πρόσημο μιας συνιστώσας υποδηλώνει την κατεύθυνση κατά μήκος του αντίστοιχου άξονα. Όταν δίνονται οι συνιστώσες, μπορούμε να βρούμε το μέτρο και τον προσανατολισμό του διανύσματος $\vec{a}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{και} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}.$$

Φυσική Σημασία

Η Φυσική ασχολείται με πολλά μεγέθη που έχουν τόσο μέτρο, όσο και κατεύθυνση και γι' αυτό χρειάζεται μια ειδική μαθηματική γλώσσα – τη γλώσσα των διανυσμάτων – για να τα περιγράψει. Αυτή η γλώσσα χρησιμοποιείται επίσης από μηχανικούς και άλλους επιστήμονες, ακόμα και στον καθημερινό μας λόγο. Αν ποτέ δώσατε οδηγίες όπως «προχωρήστε πέντε τετράγωνα σ' αυτό τον δρόμο και μετά στρίψτε αριστερά», έχετε χρησιμοποιήσει τη γλώσσα των διανυσμάτων. Στην πραγματικότητα, κάθε είδους πλοήγηση βασίζεται σε διανύσματα, ωστόσο οι φυσικοί και οι μηχανικοί τα χρειάζονται με πιο εξειδικευμένο τρόπο στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν φαινόμενα όπως η περιστροφή και ο μαγνητισμός (με τα οποία θ' ασχοληθούμε σε επόμενα κεφάλαια). Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εστιάσουμε στα βασικά της γλώσσας των διανυσμάτων.

Διανύσματα και Βαθμωτά Μεγέθη

Ένα σωματίδιο που κινείται σε ευθεία γραμμή μπορεί να κινηθεί μόνο προς δύο κατευθύνσεις. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνησή του είναι θετική προς τη μία από αυτές τις κατευθύνσεις και αρνητική προς την άλλη. Ωστόσο,

για σωματίδιο που κινείται στις τρεις διαστάσεις το πρόσημο συν ή πλην δεν είναι πλέον αρκετό για να προσδιορίσει την κατεύθυνση. Αντιθέτως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα **διάνυσμα**.

Τα **διανύσματα** έχουν μέτρο και κατεύθυνση, και ο συνδυασμός τους ακολουθεί συγκεκριμένους (διανυσματικούς) κανόνες, τους οποίους θα εξετάσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο. Ένα **διανυσματικό φυσικό μέγεθος** είναι ένα μέγεθος που έχει τόσο μέτρο, όσο και κατεύθυνση και συνεπώς μπορεί να παρασταθεί με διάνυσμα. Κάποια διανυσματικά φυσικά μεγέθη είναι η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση. Θα δείτε πολλά περισσότερα τέτοια μεγέθη σε αυτό το βιβλίο, συνεπώς η εκμάθηση των κανόνων συνδυασμού διανυσμάτων θα σας βοηθήσει σημαντικά στα επόμενα κεφάλαια.

Δεν εμπεριέχουν όλα τα φυσικά μεγέθη την κατεύθυνση. Η θερμοκρασία, η πίεση, η ενέργεια, η μάζα και ο χρόνος, για παράδειγμα, δεν «δείχνουν» με τη χωρική έννοια. Τέτοια μεγέθη τα λέμε **βαθμωτά** και τα χειριζόμαστε με τους κανόνες της συνήθους άλγεβρας. Μόνο η τιμή, μαζί με το πρόσημο (όπως σε μια θερμοκρασία -40°C), προσδιορίζει το βαθμωτό.

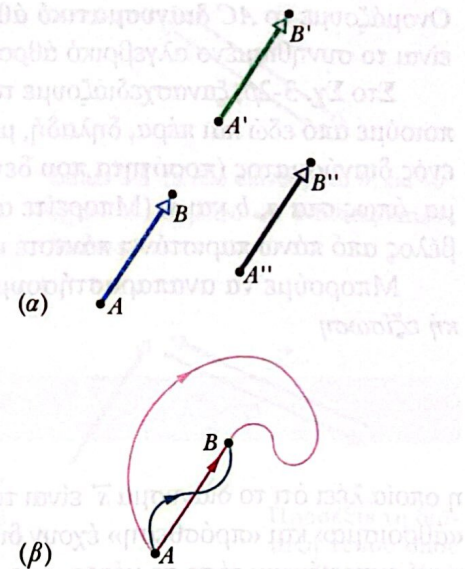
Το απλούστερο διανυσματικό μέγεθος είναι η μετατόπιση, ή αλλιώς η μεταβολή της θέσης. Το διάνυσμα που παριστάνει μία μετατόπιση, λέγεται, όπως είναι λογικό, **διάνυσμα μετατόπισης**. (Ομοίως έχουμε διανύσματα ταχύτητας και διανύσματα επιτάχυνσης). Αν ένα σωματίδιο μεταβάλει τη θέση του κινούμενο από το σημείο A στο σημείο B , όπως στο Σχ. 3-1α, λέμε ότι έχει υποστεί μετατόπιση από το A στο B , την οποία παριστάνουμε με ένα βέλος από το A στο B . Το βέλος προσδιορίζει το διάνυσμα γραφικά. Για να ξεχωρίσουμε τα βέλη των διανυσμάτων από άλλα βέλη, σ' αυτό το βιβλίο χρησιμοποιούμε το περίγραμμα ενός τριγώνου ως την αρχή του βέλους.

Στο Σχ. 3-1α, τα βέλη από το A στο B , από το A' στο B' και από το A'' στο B'' έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση. Συνεπώς παριστάνουν ίδια διανύσματα μετατόπισης και αντιπροσωπεύουν την **ίδια μεταβολή θέσης** για κάποιο σωματίδιο. Ένα διάνυσμα μπορεί να μετατοπιστεί χωρίς να αλλάξει η τιμή του αν δεν αλλάξει το μήκος και η κατεύθυνσή του.

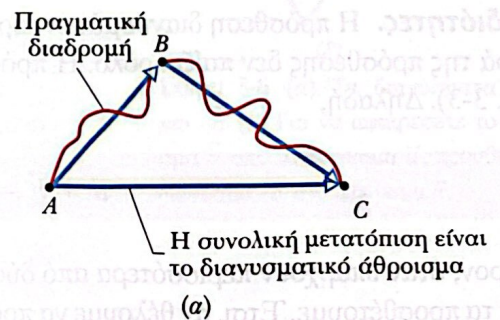
Το διάνυσμα μετατόπισης δεν μας λέει τίποτα για την πραγματική τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο. Στο Σχ. 3-1β, για παράδειγμα, και οι τρεις τροχιές που ενώνουν τα σημεία A και B αντιστοιχούν στο ίδιο διάνυσμα μετατόπισης, αυτό του Σχ. 3-1α. Τα διανύσματα μετατόπισης παριστάνουν μόνο το συνολικό αποτέλεσμα της κίνησης, όχι την ίδια κίνηση.

Γεωμετρική Πρόσθεση Διανυσμάτων

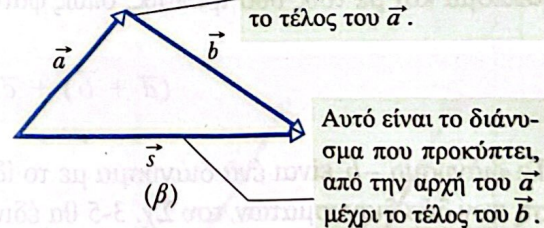
Υποθέστε ότι, όπως στο διανυσματικό διάγραμμα του Σχ. 3-2α, ένα σωματίδιο κινείται από το A στο B και στη συνέχεια από το B στο C . Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη συνολική του μετατόπιση (άσχετα με την πραγματική του τροχιά) με δύο διαδοχικά διανύσματα μετατόπισης, AB και BC . Η **συνολική μετατόπιση** αυτών των δύο μετατοπίσεων είναι μία μοναδική μετατόπιση από το A στο C .



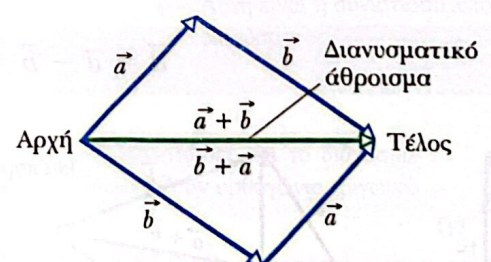
Σχήμα 3-1 (α) Και τα τρία βέλη έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση, οπότε αντιπροσωπεύουν την ίδια μετατόπιση. (β) Και οι τρεις τροχιές που ενώνουν τα δύο σημεία αντιστοιχούν στο ίδιο διάνυσμα μετατόπισης.



Για να προσθέσετε το $\vec{a}$ και το $\vec{b}$, σχεδιάστε με τρόπο ώστε η αρχή του $\vec{b}$ να είναι το τέλος του $\vec{a}$.



Σχήμα 3-2 (α) Το AC είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων AB και BC . (β) Τα ίδια διανύσματα με διαφορετική ονομασία.



Θα πάρετε το ίδιο διανυσματικό αποτέλεσμα με όποια σειρά κι αν προσθέσετε τα διανύσματα.

Σχήμα 3-3 Τα δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούν να προστεθούν είτε με τη μία, ή είτε την άλλη σειρά, βλ. Εξ. 3-2.

Ονομάζουμε το AC διανυσματικό άθροισμα (ή συνισταμένη) των διανυσμάτων AB και BC . Αυτό το άθροισμα δεν είναι το συνηθισμένο αλγεβρικό άθροισμα.

Στο Σχ. 3-2β, ξανασχεδιάζουμε τα διανύσματα του Σχ. 3-2α και τα συμβολίζουμε με τον τρόπο που θα χρησιμοποιούμε από εδώ και πέρα, δηλαδή, με ένα βέλος πάνω από πλάγιο γράμμα, όπως στο $\vec{a}$. Αν θέλουμε μόνο το μέτρο ενός διανύσματος (ποσότητα που δεν έχει πρόσημο ή κατεύθυνση), θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το πλάγιο γράμμα, όπως στα a , b και s . (Μπορείτε απλά να χρησιμοποιήσετε ένα γράμμα όπως στο χειρόγραφο.) Γράμμα με ένα βέλος από πάνω παριστάνει πάντοτε και τις δύο ιδιότητες ενός διανύσματος, το μέτρο και την κατεύθυνση.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη σχέση μεταξύ των τριών διανυσμάτων του Σχ. 3-2β με τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (3-1)$$

η οποία λέει ότι το διάνυσμα $\vec{s}$ είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Το σύμβολο $+$ στην Εξ. 3-1 και οι λέξεις «άθροισμα» και «πρόσθεση» έχουν διαφορετική σημασία για τα διανύσματα από αυτήν της συνηθισμένης αλγεβρας γιατί εμπεριέχουν τόσο το μέτρο, όσο και την κατεύθυνση.

Το Σχ. 3-2 δείχνει έναν τρόπο πρόσθεσης δύο δισδιάστατων διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ γεωμετρικά. (1) Σχεδιάστε στο χαρτί σας το διάνυσμα $\vec{a}$ σε βολική κλίμακα και στη σωστή γωνία. (2) Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{b}$ με την ίδια κλίμακα και πάλι στη σωστή γωνία, με την αρχή του στο τέλος του διανύσματος $\vec{a}$. (3) Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{s}$ είναι το διάνυσμα που εκτείνεται από την αρχή του $\vec{a}$ μέχρι το τέλος του $\vec{b}$.

Ιδιότητες. Η πρόσθεση διανυσμάτων, οριζόμενη καθ' αυτόν τον τρόπο, έχει δύο σημαντικές ιδιότητες. Πρώτον, η σειρά της πρόσθεσης δεν παίζει ρόλο. Η πρόσθεση του $\vec{a}$ με το $\vec{b}$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την πρόσθεση του $\vec{b}$ με το $\vec{a}$ (Σχ. 3-3). Δηλαδή,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα}). \quad (3-2)$$

Δεύτερον, όταν υπάρχουν περισσότερα από δύο διανύσματα, μπορούμε να τα ομαδοποιήσουμε με οποιαδήποτε σειρά καθώς τα προσθέτουμε. Έτσι, αν θέλουμε να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$, μπορούμε να προσθέσουμε αρχικά τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και στη συνέχεια να προσθέσουμε το διανυσματικό τους άθροισμα με το $\vec{c}$. Μπορούμε, επίσης, να προσθέσουμε αρχικά τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ και στη συνέχεια να προσθέσουμε αυτό το άθροισμα με το $\vec{a}$. Θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα και με τους δύο τρόπους, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-4. Δηλαδή,

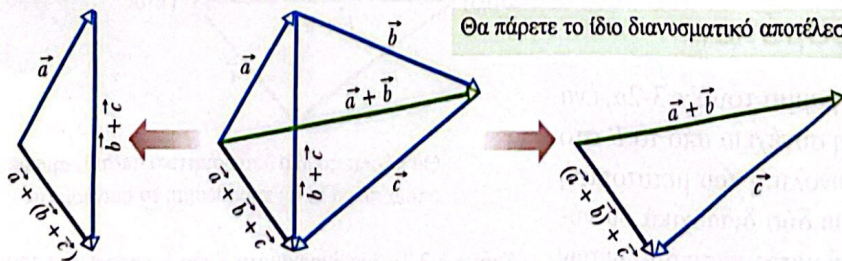
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα}). \quad (3-3)$$

Το διάνυσμα $-\vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα με το ίδιο μέτρο με το $\vec{b}$ αλλά με αντίθετη κατεύθυνση (βλ. Σχ. 3-5). Η πρόσθεση των δύο διανυσμάτων του Σχ. 3-5 θα έδινε

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0.$$

Δηλαδή, η πρόσθεση του $-\vec{b}$ έχει ως αποτέλεσμα την αφαίρεση του $\vec{b}$. Χρησιμοποιούμε αυτήν την ιδιότητα για να ορίσουμε τη διαφορά δύο διανυσμάτων: έστω ότι $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Τότε

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{αφαίρεση διανυσμάτων}). \quad (3-4)$$



Σχήμα 3-4 Τα τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ μπορούν να ομαδοποιηθούν με οποιοδήποτε τρόπο καθώς προστίθενται, βλ. Εξ. 3-3.

δηλαδή, βρίσκουμε τη διαφορά δύο $\vec{d}$ διανυσμάτων προσθέτοντας το διάνυσμα $-\vec{b}$ στο διάνυσμα $\vec{a}$. Το Σχήμα 3-6 δείχνει πώς γίνεται αυτό γεωμετρικά.

Όπως στη συνήθη άλγεβρα, μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο που έχει το σύμβολο του διανύσματος από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο, ωστόσο πρέπει να του αλλάξουμε το πρόσημο. Για παράδειγμα, αν μας δίνεται η Εξ. 3-4 και χρειάζεται να επιλύσουμε ως προς $\vec{a}$, μπορούμε να αναδιατάξουμε την εξίσωση ως εξής:

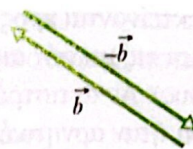
$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad \text{και} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}.$$

Να θυμάστε ότι, παρόλο που εδώ χρησιμοποιήσαμε διανύσματα μετατόπισης, οι κανόνες της άθροισης και της αφαίρεσης ισχύουν για διανύσματα οποιουδήποτε είδους, είτε αντιπροσωπεύουν ταχύτητες, είτε επιταχύνσεις, είτε οποιοδήποτε άλλο διανυσματικό μέγεθος. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να προσθέσουμε διανύσματα μόνο του ίδιου είδους. Για παράδειγμα, μπορούμε να προσθέσουμε δύο μετατοπίσεις ή δύο ταχύτητες, αλλά η πρόσθεση μετατόπισης και ταχύτητας δεν έχει νόημα. Στην αριθμητική των βαθμωτών μεγεθών αυτό θα ήταν σαν να προσπαθούμε να προσθέσουμε 21 s σε 12 m.

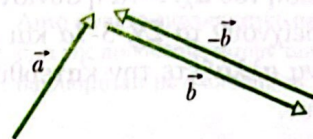


ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1

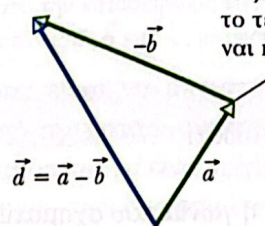
Τα μέτρα των μετατοπίσεων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι 3 m και 4 m, αντίστοιχα, και $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Θεωρώντας διάφορους προσανατολισμούς των $\vec{a}$ και $\vec{b}$, πόσο είναι (α) το μέγιστο δυνατό μέτρο και (β) το ελάχιστο δυνατό μέτρο για το $\vec{c}$;



Σχήμα 3-5 Τα δύο διανύσματα $\vec{b}$ και $-\vec{b}$ έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετες κατευθύνσεις.



(α)



(β)

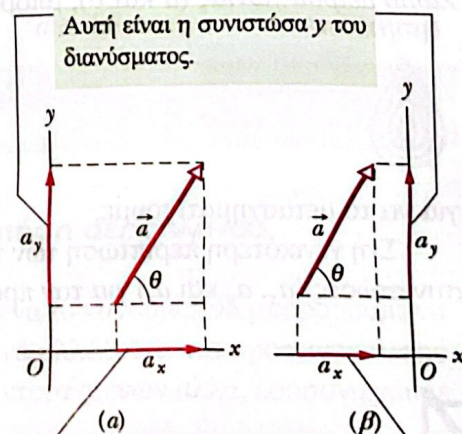
Σχήμα 3-6 (α) Τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $-\vec{b}$ (β) Για να αφαιρέσετε το διάνυσμα $\vec{b}$ από το διάνυσμα $\vec{a}$, προσθέστε το διάνυσμα $-\vec{b}$ στο διάνυσμα $\vec{a}$.

Συνιστώσες των Διανυσμάτων

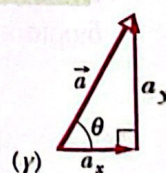
Η γεωμετρική πρόσθεση διανυσμάτων μπορεί να γίνει κουραστική. Μια απλούστερη και ευκολότερη τεχνική χρησιμοποιεί άλγεβρα, αλλά προϋποθέτει ότι τα διανύσματα εκφράζονται σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Οι άξονες x και y σχεδιάζονται συνήθως στο επίπεδο της σελίδας, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-7α. Ο άξονας z περνάει από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, είναι κάθετος στη σελίδα κι έχει κατεύθυνση προς τα έξω (δηλαδή από τη σελίδα προς τον αναγνώστη). Προς το παρόν τον αγνοούμε και επικεντρωνόμαστε σε διανύσματα δύο διαστάσεων.

Συνιστώσα ενός διανύσματος είναι η προβολή του διανύσματος σε κάποιον άξονα. Στο Σχ. 3-7α, για παράδειγμα, a_x είναι η συνιστώσα του διανύσματος $\vec{a}$ στον (ή κατά μήκος του) άξονα x και a_y είναι η συνιστώσα κατά μήκος του άξονα y . Για να βρούμε την προβολή ενός διανύσματος σε κάποιον άξονα, σχεδιάζουμε κάθετες ευθείες από τα δύο άκρα του διανύσματος προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η προβολή ενός διανύσματος στον άξονα x είναι η **συνιστώσα x** του και ομοίως η προβολή του στον άξονα y είναι η **συνιστώσα y** . Η διαδικασία εύρεσης των συνιστωσών ενός διανύσματος ονομάζεται **ανάλυση διανύσματος**.

Η συνιστώσα ενός διανύσματος έχει την ίδια κατεύθυνση (κατά τον άξονα) με το διάνυσμα. Στο Σχ. 3-7 τα a_x και a_y είναι και τα δύο θετι-



Οι συνιστώσες και το διάνυσμα σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.



(γ)

Σχήμα 3-7 (α) Οι συνιστώσες a_x και a_y του διανύσματος $\vec{a}$. (β) Οι συνιστώσες δεν αλλάζουν αν το διάνυσμα μετατοπιστεί, εφόσον το μέτρο και η κατεύθυνσή του διατηρούνται. (γ) Οι συνιστώσες αποτελούν τις πλευρές ενός ορθογωνίου, τριγώνου του οποίου η υποτείνουσα είναι το μέτρο του διανύσματος.

κά γιατί εκτείνονται προς τη θετική κατεύθυνση και των δύο αξόνων. (Προσέξτε τις μικρές αιχμές των βελών που δείχνουν την κατεύθυνσή τους). Αν αντιστρέψαμε το διάνυσμα $\vec{a}$, τότε και οι δύο συνιστώσες θα ήταν αρνητικές και οι αιχμές των βελών θα έδειχναν προς την αρνητική πλευρά των x και y . Η αντιστροφή του διανύσματος $\vec{b}$ στο Σχ. 3-8 οδηγεί σε θετική συνιστώσα b_x και σε αρνητική συνιστώσα b_y .

Γενικά, ένα διάνυσμα έχει τρεις συνιστώσες, παρόλο που στην περίπτωση του Σχ. 3-7α η συνιστώσα κατά τον άξονα z είναι μηδέν. Όπως δείχνουν τα Σχ. 3-7α και β, αν μετατοπίσετε ένα διάνυσμα χωρίς να αλλάξετε την κατεύθυνσή του, οι συνιστώσες του δεν αλλάζουν.

Εύρεση Συνιστωσών. Μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{a}$ στο Σχ. 3-7α γεωμετρικά από το εκεί ορθογώνιο τρίγωνο:

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{και} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (3-5)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και a είναι το μέτρο του $\vec{a}$. Το Σχήμα 3-7γ δείχνει ότι το $\vec{a}$ και οι συνιστώσες του x και y σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Δείχνει, επίσης, πώς μπορούμε να συνθέσουμε ένα διάνυσμα από τις συνιστώσες του: τοποθετούμε στο τέλος της μιας συνιστώσας την αρχή της άλλης. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε το ορθογώνιο τρίγωνο με το διάνυσμα που σχηματίζει την υποτείνουσα, από την αρχή της μιας συνιστώσας στο τέλος της άλλης.

Όταν ένα διάνυσμα έχει αναλυθεί στις συνιστώσες του σε κάποιο σύστημα αξόνων, αυτές οι συνιστώσες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί του διανύσματος. Για παράδειγμα, το $\vec{a}$ στο Σχ. 3-7α δίνεται (πλήρως προσδιορισμένο) από το a και το θ . Μπορεί επίσης να δοθεί από τις συνιστώσες του, a_x και a_y . Και τα δύο ζεύγη τιμών περιέχουν την ίδια πληροφορία. Αν γνωρίζουμε ένα διάνυσμα σε **συμβολισμό συνιστωσών** (a_x και a_y) και το θέλουμε σε **συμβολισμό μέτρου-γωνίας** (a και θ), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{και} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x} \quad (3-6)$$

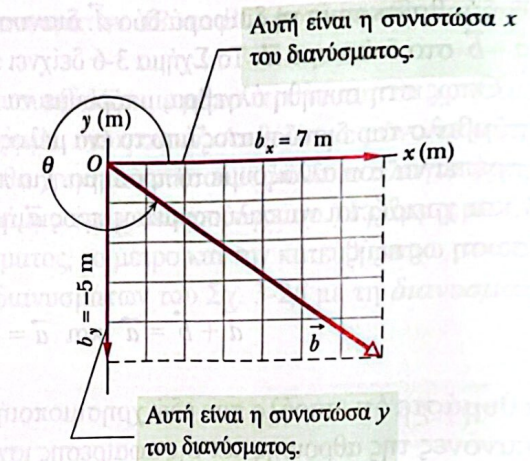
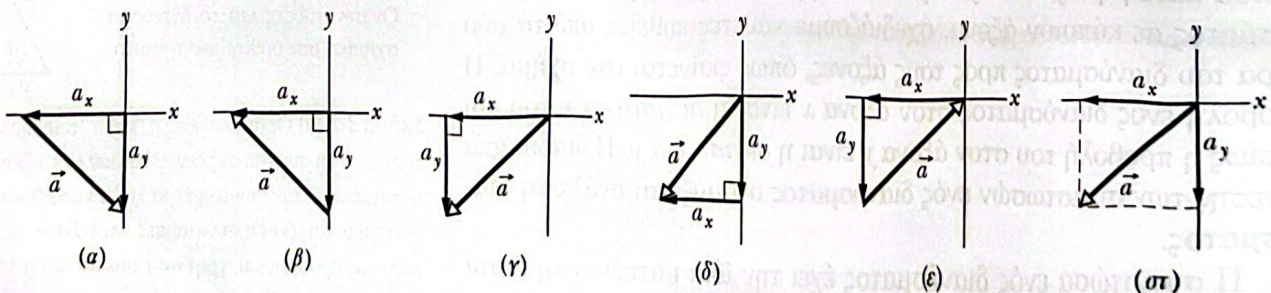
για να το μετασχηματίσουμε.

Στη γενικότερη περίπτωση των τριών διαστάσεων χρειαζόμαστε το μέτρο και δύο γωνίες (π.χ., a , θ , και ϕ) ή τρεις συνιστώσες (a_x , a_y , και a_z) για τον προσδιορισμό του διανύσματος.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2

Στο σχήμα, ποιοι τρόποι σύνθεσης των συνιστωσών x και y του διανύσματος $\vec{a}$ είναι οι κατάλληλοι να προσδιορίσουν το διάνυσμα;



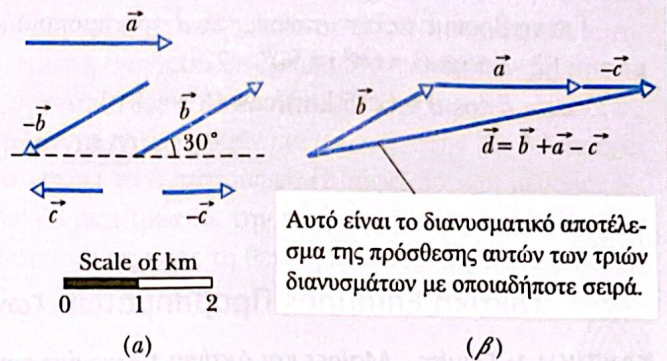
Σχήμα 3-8 Η συνιστώσα του $\vec{b}$ κατά τον άξονα x είναι θετική, ενώ η συνιστώσα του κατά τον άξονα y είναι αρνητική.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-01 Προσθέτοντας διανύσματα γραφικά, προσανατολισμός

Σε μάθημα προσανατολισμού με πυξίδα και χάρτη έχετε ως στόχο να μετακινηθείτε όσο πιο μακριά γίνεται (απόσταση σε ευθεία γραμμή) από την κατασκήνωση που είναι η βάση σας, κάνοντας τρεις ευθύγραμμες κινήσεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ακόλουθες μετατοπίσεις με οποιαδήποτε σειρά: (α) $\vec{a}$, 2.0 km ανατολικά (κατ' ευθείαν προς την ανατολή), (β) $\vec{b}$, 2.0 km 30° βορειοανατολικά (σε γωνία 30° από την ανατολική κατεύθυνση προς τον βορρά), (γ) $\vec{c}$, 1.0 km προς τα δυτικά. Εναλλακτικά, μπορείτε να αντικαταστήσετε με $-\vec{b}$ το $\vec{b}$ ή με $-\vec{c}$ το $\vec{c}$. Πόση είναι η μεγαλύτερη απόσταση από τη βάση (την κατασκήνωση) που μπορείτε να έχετε στο τέλος της τρίτης μετατόπισης;

Σκεπτικό: Χρησιμοποιώντας κατάλληλη κλίμακα σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ και $-\vec{c}$ όπως στο Σχ. 3-9α. Στη συνέχεια μετακινούμε νοερά τα διανύσματα πάνω στη σελίδα, ενώνοντας τρία από αυτά κάθε φορά με διάταξη η αρχή του ενός στο τέλος του προηγούμενου, για να βρούμε το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{d}$. Η αρχή του πρώτου διανύσματος αντιπροσωπεύει τη βάση (την κατασκήνωση). Το τέλος του τρίτου διανύσματος αντιπροσωπεύει το σημείο στο οποίο σταματάτε. Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{d}$ εκτείνεται από την αρχή του πρώτου διανύσματος έως το τέλος του τρίτου διανύσματος. Το μέτρο του, d , είναι η απόστασή σας από την κατασκήνωση.



Σχήμα 3-9 (α) Διανύσματα μετατόπισης. Θα χρησιμοποιηθούν τρία από αυτά. (β) Η απόστασή σας από την κατασκήνωση είναι μεγαλύτερη αν πραγματοποιήσετε τις μετατοπίσεις $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $-\vec{c}$, με οποιαδήποτε σειρά.

Εδώ ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε αυτή την απόσταση από την κατασκήνωση-βάση.

Βρίσκουμε ότι η απόσταση d είναι μεγαλύτερη για τη διάταξη «τέλος - αρχή» των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $-\vec{c}$. Τα διανύσματα μπορούν να είναι σε οποιαδήποτε σειρά γιατί το διανυσματικό τους άθροισμα είναι ίδιο, ανεξάρτητα από τη σειρά. Η σειρά που φαίνεται στο Σχ. 3-9β είναι για το διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c})$$

Χρησιμοποιώντας την κλίμακα που δίνεται στο Σχ. 3-9α, μετράμε το μήκος d αυτού του διανυσματικού αθροίσματος, βρίσκοντας

$$d = 4,8 \text{ m} \quad (\text{Απάντηση})$$



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-02 Βρίσκοντας τις συνιστώσες, πτήση αεροπλάνου

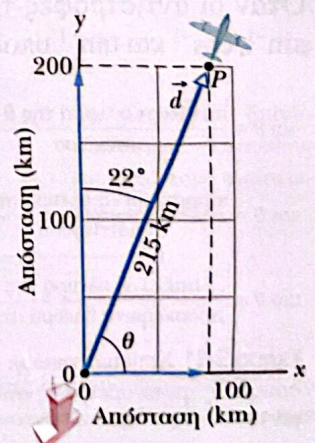
Ένα μικρό αεροπλάνο φεύγει από το αεροδρόμιο μια συνεφιασμένη ημέρα και αργότερα εντοπίζεται 215 km μακριά, σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 22° ανατολικά της βορεινής κατεύθυνσης. Πόσο μακριά ανατολικά και πόσο βόρεια από το αεροδρόμιο βρίσκεται στο αεροπλάνο στη θέση που εντοπίζεται;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Μας δίνεται το μέτρο (215 km) και η γωνία (22° από τον βορρά προς την ανατολή) ενός διανύσματος και πρέπει να βρούμε τις συνιστώσες του.

Υπολογισμοί: Σχεδιάζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων xy με θετική κατεύθυνση του x προς την ανατολή και την αντίστοιχη του y προς τον βορρά (Σχ. 3-10). Για ευκολία, η αρχή των αξόνων τοποθετείται στο αεροδρό-

μιο. (Δεν χρειάζεται να το κάνουμε. Θα μπορούσαμε να μετατοπίσουμε και να αλλάξουμε τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων αλλά, εφόσον έχουμε



Σχήμα 3-10 Ένα αεροπλάνο απογειώνεται από το αεροδρόμιο στην αρχή των αξόνων και αργότερα εντοπίζεται στο P.

επιλογή, γιατί να δυσκολέψουμε το πρόβλημα;) Η μετατόπιση του αεροπλάνου $\vec{d}$ δείχνει από την αρχή των αξόνων προς το σημείο που εμφανίζεται.

Για να βρούμε τις συνιστώσες του $\vec{d}$ χρησιμοποιούμε την Εξ. 3-5 με $\theta = 68^\circ (= 90^\circ - 22^\circ)$:

$$d_x = d \cos \theta = (215 \text{ km})(\cos 68^\circ) = 81 \text{ km} \quad (\text{Απάντηση})$$

$$d_y = d \sin \theta = (215 \text{ km})(\sin 68^\circ) = 199 \text{ km} = 2.0 \times 10^2 \text{ km}$$

(Απάντηση)

Συνεπώς, το αεροπλάνο βρίσκεται 81 km ανατολικά και 2.0×10^2 km βόρεια του αεροδρομίου.



Τακτική Επίλυσης Προβλημάτων Γωνίες και τριγωνομετρικές συναρτήσεις

ΤΑΚΤΙΚΗ 1: Γωνίες – Μοίρες και Ακτίνια Οι γωνίες που μετρούνται ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x είναι θετικές, αν μετρούνται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητικές αν μετρούνται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Για παράδειγμα, 210° και -150° είναι η ίδια γωνία.

Οι γωνίες μπορεί να μετρούνται σε μοίρες ή σε ακτίνια (rad). Για να συνδέσετε τις δύο μονάδες θυμηθείτε ότι ένας πλήρης κύκλος είναι 360° και 2π rad. Για να μετατρέψετε, για παράδειγμα, 40° σε ακτίνια, γράψτε

$$40^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0.70 \text{ rad}.$$

ΤΑΚΤΙΚΗ 2: Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις Θα πρέπει να γνωρίζετε τους ορισμούς των πιο συνηθισμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων – ημιτόνου, συνημίτονου κι εφαπτομένης – επειδή αποτελούν μέρος της γλώσσας της επιστήμης. Το Σχ. 3-11 τις δίνει σε μορφή ανεξάρτητη από τις πλευρές τριγώνου.

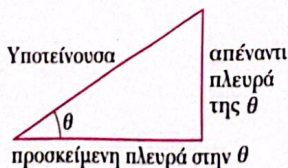
Θα πρέπει, επίσης, να είστε σε θέση να σχεδιάσετε το πώς μεταβάλλονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τη γωνία, όπως στο Σχ. 3-12, ώστε να μπορείτε να κρίνετε αν το αποτέλεσμα ενός υπολογιστή τσέπης είναι λογικό. Ακόμη και η γνώση του προσήμου αυτών των συναρτήσεων στα διάφορα τεταρτημόρια μπορεί να είναι βοηθητική.

ΤΑΚΤΙΚΗ 3: Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις Όταν οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ και $\tan^{-1}$ υπολογίζονται με υπολογιστή τσέ-

$$\sin \theta = \frac{\text{απέναντι πλευρά της } \theta}{\text{υποτείνουσα}}$$

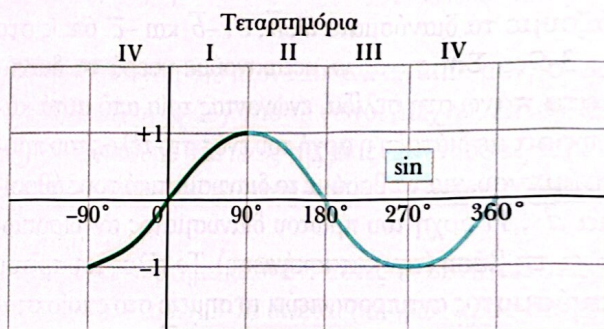
$$\cos \theta = \frac{\text{προσκειμένη πλευρά στην } \theta}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{απέναντι πλευρά της } \theta}{\text{προσκειμένη πλευρά στην } \theta}$$

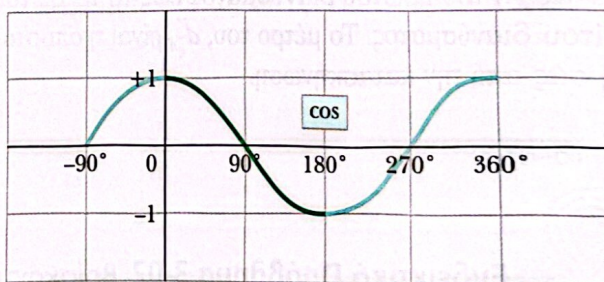


Σχήμα 3-11 Χρησιμοποιούμε ένα (ορθογώνιο) τρίγωνο για να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Δείτε επίσης το Παράρτημα Ε.

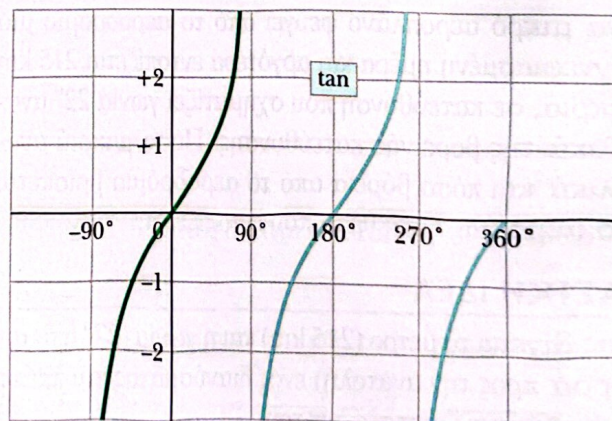
πης, πρέπει να εξετάζετε αν η απάντηση που παίρνετε είναι λογική, γιατί συνήθως υπάρχει και άλλη πιθανή απάντηση που δεν θα σας τη δώσει ένας υπολογιστής τσέπης. Στο Σχήμα 3-12 φαίνεται το εύρος λειτουργίας



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 3-12 Τρεις καμπύλες που είναι χρήσιμο να θυμάστε. Το εύρος λειτουργίας μιας αριθμομηχανής για τον υπολογισμό αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων φαίνεται με τα πιο έντονα τμήματα των έγχρωμων καμπύλων.

ενός υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, το $\sin^{-1} 0.5$ αντιστοιχεί στις γωνίες 30° (που δίνεται από έναν υπολογιστή τσέπης αφού οι 30° βρίσκονται στο εύρος λειτουργίας της) και 150° . Για να δείτε και τις δύο τιμές χαράξτε μια οριζόντια ευθεία που να περνάει από το 0.5 στο Σχ. 3-12α και σημειώστε πού τέμνει την καμπύλη του ημιτόνου.

Πώς ξεχωρίζετε τη σωστή απάντηση; Είναι αυτή που φαίνεται πιο λογική για τη δεδομένη περίπτωση.

ΤΑΚΤΙΚΗ 4: Μετρώντας τις Γωνίες των Διανυσμάτων
Οι εξισώσεις για το $\cos \theta$ και το $\sin \theta$ στην Εξ. 3-5 και για την $\tan \theta$ στην Εξ. 3-6 ισχύουν μόνο αν η γωνία μετρείται ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Αν μετρείται σε σχέση με κάποια άλλη κατεύθυνση, τότε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στην Εξ. 3-5 μπορεί να πρέπει να εναλλαχθούν και ο λόγος στην Εξ. 3-6 μπορεί να πρέπει να αντιστραφεί. Η ασφαλέστερη μέθοδος είναι να μετατρέψετε την τιμή της γωνίας σε εκείνη που μετρείται ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x .



3-2 ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

3.06 Να μετατρέπετε ένα διάνυσμα από σημειογραφία μέτρου-γωνίας σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και αντίστροφα.

3.07 Να προσθέτετε και να αφαιρείτε διανύσματα σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας και σε σημειογραφία μοναδιαίου διανυσμάτων.

3.08 Να κατανοείτε ότι, για δεδομένο διάνυσμα, στροφή του συστήματος συντεταγμένων γύρω από την αρχή μπορεί να μεταβάλει τις συνιστώσες του διανύσματος, όχι όμως και το ίδιο το διάνυσμα.

Βασικές Ιδέες

• Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ έχουν μέτρο μονάδα και κατευθύνονται προς τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων x , y και z , αντίστοιχα, σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Μπορούμε να γράψουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ ως προς τα μοναδιαία διανύσματα ως

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k},$$

(όπου $a_x \hat{i}$, $a_y \hat{j}$ και $a_z \hat{k}$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του $\vec{a}$ και a_x , a_y και a_z είναι το μέτρο του).

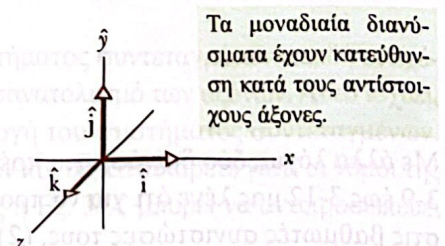
• Για να προσθέσουμε διανύσματα στη μορφή συνιστωσών, χρησιμοποιούμε τους κανόνες

$$r_x = a_x + b_x, r_y = a_y + b_y, r_z = a_z + b_z.$$

Εδώ $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι τα διανύσματα που προστίθενται και $\vec{r}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα. Σημειώστε ότι προσθέτουμε τις συνιστώσες κατά άξονα.

Μοναδιαία Διανύσματα

Μοναδιαίο διάνυσμα είναι το διάνυσμα που έχει μέτρο ακριβώς 1 και δείχνει προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Δεν έχει ούτε διαστάσεις ούτε μονάδες. Μοναδικός του σκοπός είναι να δείχνει· δηλαδή, να προσδιορίζει μια κατεύθυνση. Τα μοναδιαία διανύσματα προς τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων x , y και z συμβολίζονται με $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ αντίστοιχα, όπου χρησιμοποιείται το σύμβολο $\hat{}$ αντί του βέλους όπως για τα υπόλοιπα διανύσματα (Σχ. 3-13). Η διάταξη των αξόνων στο Σχ. 3-13 είναι ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Το σύστημα παραμένει δεξιόστροφο αν στραφεί ως κάτι ενιαίο. Σ' αυτό το βιβλίο χρησιμοποιούμε αποκλειστικά δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων.



Σχήμα 3-13 Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ ορίζουν τις κατευθύνσεις ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων.

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι πολύ βοηθητικά όταν θέλουμε να εκφράσουμε άλλα διανύσματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να εκφράσουμε τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ των Σχ. 3-7 και 3-8 ως

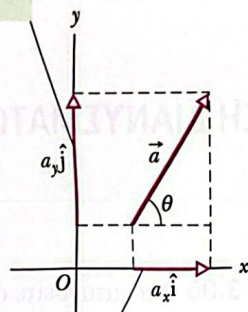
$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (3-7)$$

και

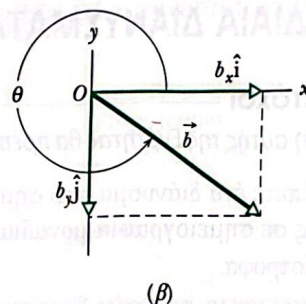
$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}. \quad (3-8)$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις παριστάνονται γραφικά στο Σχ. 3-14. Τα $a_x \hat{i}$ και $a_y \hat{j}$ είναι διανύσματα που λέγονται **διανυσματικές συνιστώσες** του $\vec{a}$. Οι ποσότητες a_x και a_y είναι βαθμωτά που λέγονται **βαθμωτές συνιστώσες** του $\vec{a}$ (ή, όπως πριν, απλά συνιστώσες).

Αυτή είναι η συνιστώσα y του διανύσματος.



Αυτή είναι η συνιστώσα x του διανύσματος.



Σχήμα 3-14 (α) Οι διανυσματικές συνιστώσες του διανύσματος $\vec{a}$. (β) Οι διανυσματικές συνιστώσες του διανύσματος $\vec{b}$.

Πρόσθεση Διανυσμάτων με τις Συνιστώσες τους

Μπορούμε να προσθέσουμε διανύσματα γεωμετρικά κάνοντας το κατάλληλο σχήμα. Σε έναν υπολογιστή τσέπης με τη δυνατότητα πρόσθεσης διανυσμάτων μπορούμε να τα προσθέσουμε απευθείας και να πάρουμε το αποτέλεσμα στην οθόνη. Ένας τρίτος τρόπος να προσθέτουμε διανύσματα είναι να συνθέσουμε τις συνιστώσες τους ανά άξονα, κάτι που θα εξετάσουμε εδώ.

Για αρχή θεωρήστε τη σχέση

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \quad (3-9)$$

η οποία λέει ότι το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{a} + \vec{b}$. Συνεπώς, κάθε συνιστώσα του $\vec{r}$ πρέπει να είναι ίση με την αντίστοιχη συνιστώσα του $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \quad (3-11)$$

$$r_y = a_y + b_y \quad (3-12)$$

$$r_z = a_z + b_z. \quad (3-13)$$

Με άλλα λόγια, δύο διανύσματα πρέπει να είναι ίσα, αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες. Οι Εξισώσεις 3-9 έως 3-12 μας λένε ότι για να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, πρέπει (1) να αναλύσουμε τα διανύσματα στις βαθμωτές συνιστώσες τους, (2) να τις συνδυάσουμε κατά άξονα για να βρούμε τις συνιστώσες του αθροίσματος $\vec{r}$ και (3) να συνδυάσουμε τις συνιστώσες του $\vec{r}$ ώστε να πάρουμε το ίδιο το $\vec{r}$. Στο βήμα 3 έχουμε τη δυνατότητα επιλογής. Μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{r}$ σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος ή σε σημειο-

Αυτή η διαδικασία για την άθροιση διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες τους εφαρμόζεται και στην αφαίρεση διανυσμάτων. Θυμηθείτε ότι η αφαίρεση, όπως η $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, μπορεί να ξαναγραφεί σαν πρόσθεση, $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Για να αφαιρέσουμε, προσθέτουμε το $\vec{a}$ και το $-\vec{b}$ κατά τις συνιστώσες τους, για να πάρουμε

$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y, \quad \text{και} \quad d_z = a_z - b_z,$$

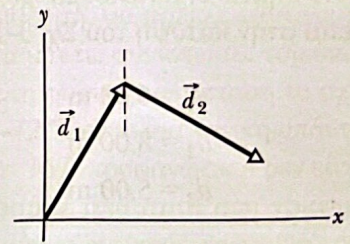
όπου

$$\vec{d} = d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}. \quad (3-13)$$



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3

(α) Στο διπλανό σχήμα, ποια είναι τα πρόσημα των συνιστωσών x των διανυσμάτων $\vec{d}_1$ και $\vec{d}_2$; (β) Ποια είναι τα πρόσημα των συνιστωσών y των διανυσμάτων $\vec{d}_1$ και $\vec{d}_2$; (γ) Ποια είναι τα πρόσημα των συνιστωσών x και y του διανύσματος $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$;



Διανύσματα και Νόμοι της Φυσικής

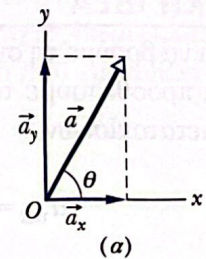
Μέχρι τώρα, σε κάθε σχήμα που περιλαμβάνει κάποιο σύστημα συντεταγμένων, οι άξονες x και y είναι παράλληλοι στις πλευρές της σελίδας του βιβλίου. Κατ'έκτασιν, όταν έχουμε το διάνυσμα $\vec{a}$, οι συνιστώσες του $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ είναι επίσης παράλληλες στις πλευρές (όπως στο Σχ. 3-15α). Ο μόνος λόγος για αυτόν τον προσανατολισμό των αξόνων είναι ότι φαίνεται «κατάλληλος». Δεν υπάρχει κάποιος βαθύτερος λόγος. Θα μπορούσαμε, αντί αυτού, να στρέψουμε τους άξονες (αλλά όχι το διάνυσμα $\vec{a}$) κατά γωνία ϕ όπως στο Σχ. 3-15β, στην οποία περίπτωση οι συνιστώσες θα έχουν τις νέες τιμές $\vec{a}'_x$ και $\vec{a}'_y$. Καθώς υπάρχει άπειρο πλήθος επιλογών για την ϕ , υπάρχει άπειρο πλήθος από διαφορετικά ζεύγη συνιστωσών για το $\vec{a}$.

Επομένως, ποιο είναι το «σωστό» ζεύγος συνιστωσών; Η απάντηση είναι ότι όλα είναι εξίσου σωστά γιατί κάθε ζεύγος (με τους άξονές του) απλώς μας δίνει ένα διαφορετικό τρόπο για να περιγράψουμε το ίδιο διάνυσμα $\vec{a}$. Όλα τα ζεύγη δίνουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση για το διάνυσμα. Από το Σχ. 3-15 έχουμε

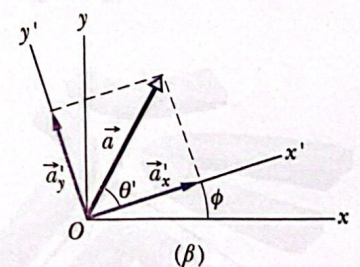
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \quad (3-14)$$

και

$$\theta = \theta' + \phi \quad (3-15)$$



Μια στροφή των αξόνων μεταβάλλει τις συνιστώσες, αλλά όχι το διάνυσμα.



Σχήμα 3-15 (α) Το διάνυσμα $\vec{a}$ και οι συνιστώσες του. (β) Το ίδιο διάνυσμα, με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων στραμμένους κατά γωνία ϕ .

Το σημαντικό σημείο είναι ότι έχουμε μεγάλη ελευθερία στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων επειδή οι σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων δεν εξαρτώνται από τη θέση της αρχής ή τον προσανατολισμό των αξόνων. Αυτό ισχύει, επίσης, για τις εξισώσεις της Φυσικής. Όλες είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Προσθέστε σε αυτό την απλότητα και τον πλούτο της γλώσσας των διανυσμάτων και θα καταλάβετε γιατί οι νόμοι της φυσικής παρουσιάζονται σχεδόν πάντα σε αυτή τη γλώσσα: μια εξίσωση, όπως η Εξ. 3-9, μπορεί να αντιπροσωπεύει τρεις (ή και παραπάνω) σχέσεις, όπως οι Εξ. 3-10, 3-11 και 3-12.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-03 Αναζήτηση σε έναν κήπο-λαβύρινθο

Ένας κήπος-λαβύρινθος είναι ένας λαβύρινθος σχηματισμένος από ψηλούς φράκτες θάμνων. Αφού εισέλθετε, ψάχνετε το κεντρικό σημείο και κατόπιν την έξοδο. Το Σχ. 3-16α δείχνει την είσοδο ενός τέτοιου λαβύρινθου και τις δύο πρώτες επιλογές που κάνουμε στις διασταυρώσεις που συναντάμε κινούμενοι από το σημείο i στο σημείο c . Εκτελούμε τρεις μετατοπίσεις όπως φαίνεται στην κάτοψη του Σχ. 3-16β,

$$\begin{aligned} d_1 &= 6.00 \text{ m} & \theta_1 &= 40^\circ \\ d_2 &= 8.00 \text{ m} & \theta_2 &= 30^\circ \\ d_3 &= 5.00 \text{ m} & \theta_3 &= 0^\circ, \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο τμήμα είναι παράλληλο στον υπερτιθέμενο άξονα x . Όταν φτάσουμε στο σημείο c , πόσο είναι το μέτρο και πόση η γωνία της συνολικής μας μετατόπισης $\vec{d}_{\text{net}}$ από το σημείο i ;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

(1) Για να βρούμε τη συνολική μετατόπιση $\vec{d}_{\text{net}}$, θα πρέπει να προσθέσουμε τα διανύσματα των τριών επιμέρους μετατοπίσεων,

$$\vec{d}_{\text{net}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3.$$

(2) Για να το κάνουμε, πρώτα υπολογίζουμε αυτό το άθροισμα μόνο για τη συνιστώσα x ,

$$d_{\text{net},x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} \quad (3-16)$$

και κατόπιν μόνο για τη συνιστώσα y ,

$$d_{\text{net},y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y}. \quad (3-17)$$

(3) Τέλος, κατασκευάζουμε το $\vec{d}_{\text{net}}$ από τις συνιστώσες του x και y .

Υπολογισμοί: Για να υπολογίσουμε τις Εξ. 3-16 και 3-17, βρίσκουμε τις συνιστώσες x και y κάθε μετατόπισης. Για παράδειγμα, οι συνιστώσες για την πρώτη μετατόπιση φαίνονται στο Σχ. 3-16γ. Σχεδιάζουμε παρόμοια διαγράμματα για τις άλλες δύο μετατοπίσεις και κατόπιν εφαρμόζουμε το πρώτο μέρος της Εξ. 3-5 σε κάθε μετατόπιση, χρησιμοποιώντας γωνίες ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x .

$$d_{1x} = (6.00 \text{ m}) \cos 40^\circ = 4.60 \text{ m}$$

$$d_{2x} = (8.00 \text{ m}) \cos(-60^\circ) = 4.00 \text{ m}$$

$$d_{3x} = (5.00 \text{ m}) \cos 0^\circ = 5.00 \text{ m}.$$

Τότε η Εξ. 3-16 μας δίνει

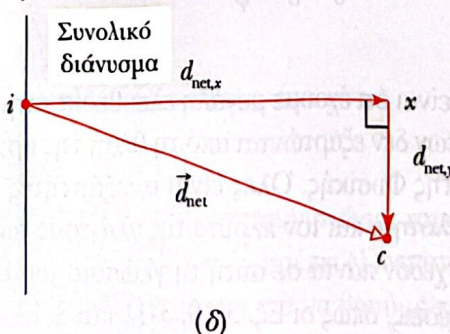
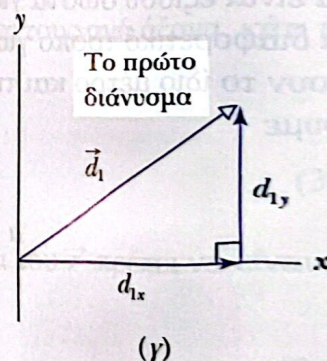
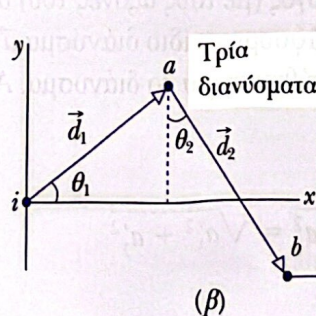
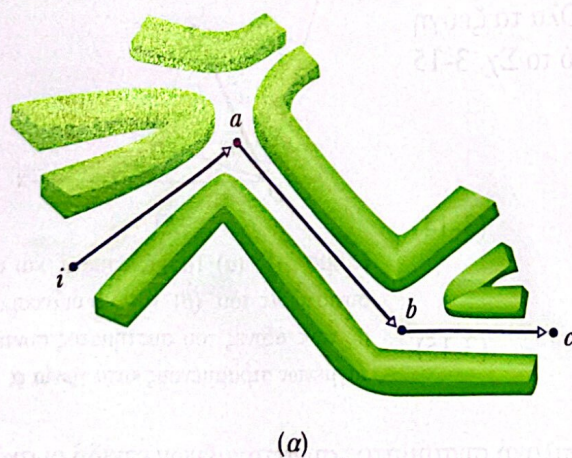
$$d_{\text{net},x} = +4.60 \text{ m} + 4.00 \text{ m} + 5.00 \text{ m} = 13.60 \text{ m}.$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε την Εξ. 3-17, εφαρμόζουμε το δεύτερο μέρος της Εξ. 3-5 σε κάθε μετατόπιση.

$$d_{1y} = (6.00 \text{ m}) \sin 40^\circ = 3.86 \text{ m}$$

$$d_{2y} = (8.00 \text{ m}) \sin(-60^\circ) = -6.93 \text{ m}$$

$$d_{3y} = (5.00 \text{ m}) \sin 0^\circ = 0 \text{ m}.$$



Σχήμα 3-16 (α) Τρεις μετατοπίσεις σ' έναν κήπο-λαβύρινθο. (β) Τα διανύσματα των μετατοπίσεων. (γ) Το διάνυσμα της πρώτης μετατόπισης και οι συνιστώσες του. (δ) Το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης και οι συνιστώσες του.

Τότε η Εξ. 3-17 μας δίνει

$$d_{\text{net},y} = +3.86 \text{ m} - 6.93 \text{ m} + 0 \text{ m} = -3.07 \text{ m}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτές τις συνιστώσες $\vec{d}_{\text{net}}$ για να κατασκευάσουμε το διάνυσμα όπως φαίνεται στο Σχ. 3-16δ. Οι συνιστώσες τύπου βρίσκονται σε διάταξη τέλος-αρχή, αποτελούν τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου και το διάνυσμα αποτελεί την υποτείνουσα. Βρίσκουμε το μέτρο και τη γωνία του $\vec{d}_{\text{net}}$ με την Εξ. 3-6. Το μέτρο είναι

$$\begin{aligned} d_{\text{net}} &= \sqrt{d_{\text{net},x}^2 + d_{\text{net},y}^2} \\ &= \sqrt{(13.60 \text{ m})^2 + (-3.07 \text{ m})^2} = 13.9 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3-18)$$

(Απάντηση)

Για να βρούμε τη γωνία (μετρημένη από τη θετική κατεύθυνση του άξονα x), παίρνουμε την αντίστροφη εφαπτομένη,

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{d_{\text{net},y}}{d_{\text{net},x}} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-3.07 \text{ m}}{13.60 \text{ m}} \right) = -12.7^\circ. \end{aligned} \quad (3-19)$$

(Απάντηση)

Η γωνία είναι αρνητική επειδή μετρείται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (αριστερόστροφα) ως προς τον θετικό x . Θα πρέπει να βρισκόμαστε πάντοτε σε ετοιμότητα όταν παίρνουμε μια αντίστροφη εφαπτομένη σε έναν υπολογιστή τσέπης. Η απάντηση που παρουσιάζει είναι μαθηματικά σωστή, αλλά μπορεί να μην είναι η σωστή απάντηση για τη φυσική κατάσταση. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να προσθέσουμε 180° στην εμφανιζόμενη απάντηση ώστε να αντιστρέψουμε το διάνυσμα. Για επαλήθευση, θα πρέπει πάντοτε να σχεδιάζουμε το διάνυσμα και τις συνιστώσες του όπως κάναμε στο Σχ. 3-16δ. Στη φυσική κατάσταση το σχήμα μας δείχνει ότι η $\theta = -12.7^\circ$ είναι μια λογική απάντηση, ενώ η $-12.7^\circ + 180^\circ = 167^\circ$ προφανώς και δεν είναι.

Μπορούμε να τα δούμε όλα αυτά στη γραφική παράσταση της εφαπτομένης ως προς τη γωνία, στο Σχ. 3-12γ. Στο πρόβλημά μας με τον λαβύρινθο το όρισμα της αντίστροφης εφαπτομένης είναι $-3.07/13.60$ ή -0.226 . Στη γραφική παράσταση σχεδιάστε μια οριζόντια ευθεία διαμέσου αυτής της τιμής στον κατακόρυφο άξονα. Η ευθεία τέμνει τον πιο σκούρο κλάδο στις -12.7° και επίσης τον ανοιχτόχρωμο κλάδο στις 167° . Η πρώτη τομή είναι αυτό που εμφανίζει ο υπολογιστής τσέπης.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-04 Πρόσθεση διανυσμάτων με σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος

Το Σχήμα 3-17α δείχνει τα ακόλουθα τρία διανύσματα:

$$\vec{a} = (4.2 \text{ m})\hat{i} - (1.5 \text{ m})\hat{j},$$

$$\vec{b} = (-1.6 \text{ m})\hat{i} + (2.9 \text{ m})\hat{j},$$

$$\vec{c} = (-3.7 \text{ m})\hat{j}.$$

και

Πόσο είναι το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{r}$ που επίσης φαίνεται στο σχήμα;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Μπορούμε να αθροίσουμε τα τρία διανύσματα με τις συνιστώσες τους ανά άξονα και στη συνέχεια να συνδυάσουμε τις συνιστώσες για να γράψουμε το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{r}$.

Υπολογισμοί: Για τον άξονα x , αθροίζουμε τις συνιστώσες x των $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ για να βρούμε τη συνιστώσα x του διανυσματικού αθροίσματος $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x + c_x \\ &= 4.2 \text{ m} - 1.6 \text{ m} + 0 = 2.6 \text{ m}. \end{aligned}$$

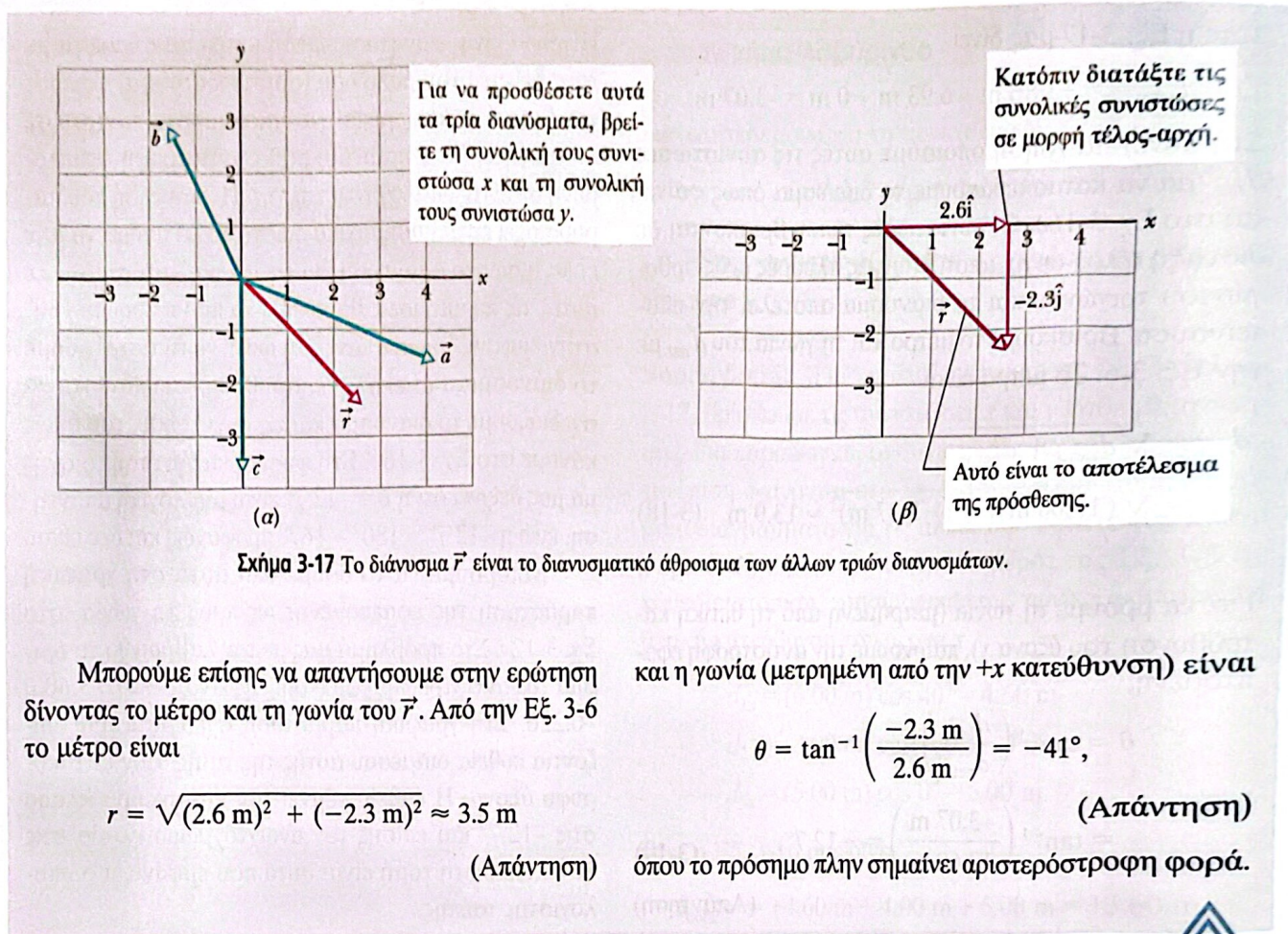
Ομοίως, για τον άξονα y ,

$$\begin{aligned} r_y &= a_y + b_y + c_y \\ &= -1.5 \text{ m} + 2.9 \text{ m} - 3.7 \text{ m} = -2.3 \text{ m}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια συνδυάζουμε αυτές τις συνιστώσες του $\vec{r}$ για να γράψουμε το διάνυσμα σε σημειογραφία μοναδιαίων διανυσμάτων:

$$\vec{r} = (2.6 \text{ m})\hat{i} - (2.3 \text{ m})\hat{j}, \quad (\text{Απάντηση})$$

όπου $(2.6 \text{ m})\hat{i}$ είναι η διανυσματική συνιστώσα του $\vec{r}$ κατά τον άξονα x και $-(2.3 \text{ m})\hat{j}$ είναι η συνιστώσα κατά τον άξονα y . Το Σχήμα 3-17β παρουσιάζει έναν τρόπο σύνθεσης των συνιστωσών για τον σχηματισμό του $\vec{r}$. (Μπορείτε να σχεδιάσετε τον άλλο τρόπο;)



3-3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 3.09** Να πολλαπλασιάζετε διανύσματα με μεγέθη βαθμωτά.
- 3.10** Να αναγνωρίζετε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με μέγεθος βαθμωτό δίνει ένα διάνυσμα, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο δίνει ένα βαθμωτό μέγεθος και παίρνοντας το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δίνει ένα νέο διάνυσμα που είναι κάθετο στα δύο αρχικά.
- 3.11** Να βρίσκετε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας και σε σημειογραφία μοναδιαίων διανυσμάτων.
- 3.12** Να βρίσκετε τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων παίρνοντας το εσωτερικό τους γινόμενο και σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας και σε σημειογραφία μοναδιαίων διανυσμάτων.
- 3.13** Δεδομένων δύο διανυσμάτων, να χρησιμοποιείτε το εσωτερικό γινόμενο για να βρείτε πόσο μέρος από το ένα διάνυσμα κείται κατά μήκος του άλλου διανύσματος.
- 3.14** Να βρίσκετε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας και σε σημειογραφία μοναδιαίων διανυσμάτων.
- 3.15** Να χρησιμοποιείτε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να βρείτε την κατεύθυνση του διανύσματος που προκύπτει από ένα εξωτερικό γινόμενο.
- 3.16** Σε σύνθετα γινόμενα, όπου το ένα γινόμενο είναι εντός κάποιου άλλου, να ακολουθείτε τη συνήθη αλγεβρική διαδικασία ξεκινώντας από το εσωτερό γινόμενο και να εργαστείτε προς τα έξω.

Βασικές Ιδέες

- Το γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους s και ενός διανύσματος $\vec{v}$ είναι ένα νέο διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι sn και του οποίου η κατεύθυνση είναι ίδια με εκείνη του $\vec{v}$ αν το s είναι θετικό και αντίθετη εκείνης του $\vec{v}$ αν το s είναι αρνητικό. Για να διαιρέσετε το $\vec{v}$ με s , πολλαπλασιάστε το $\vec{v}$ με $1/s$.
- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ γράφεται $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και είναι το βαθμωτό μέγεθος που δίνεται από

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi,$$
 στην οποία ϕ είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$

και $\vec{b}$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος και του μέτρου της συνιστώσας του δεύτερου διανύσματος κατά μήκος της κατεύθυνσης του πρώτου διανύσματος. Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανυσμάτος,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}),$$

η οποία μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα. Σημειώστε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

• Το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ γράφεται $\vec{a} \times \vec{b}$ και είναι ένα διάνυσμα $\vec{c}$ του οποίου το μέτρο c δίνεται από τη

$$c = ab \sin \phi,$$

στην οποία ϕ είναι η μικρότερη από τις γωνίες μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Η κατεύθυνση του $\vec{c}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-19. Σημειώστε ότι $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανυσμάτος,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}),$$

το οποίο μπορεί να αναπτυχθεί με την επιμεριστική ιδιότητα.

• Σε σύνθετα γινόμενα, όπου το ένα γινόμενο είναι μέσα σε κάποιο άλλο, ακολουθήστε τη συνηθισμένη αλγεβρική διαδικασία ξεκινώντας με το εσωτερικό γινόμενο και εργαζόμενοι προς τα έξω.

Πολλαπλασιασμός Διανυσμάτων*

Υπάρχουν τρεις τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε διανύσματα, αλλά κανένας δεν είναι ακριβώς όπως ο συνηθισμένος αλγεβρικός πολλαπλασιασμός. Καθώς θα διαβάσετε αυτή την ενότητα, έχετε κατά του ότι ένας υπολογιστής τσέπης που μπορεί να χειριστεί διανύσματα θα σας βοηθήσει να πολλαπλασιάσετε διανύσματα μόνο αν καταλαβαίνετε τους βασικούς κανόνες αυτού του πολλαπλασιασμού.

Πολλαπλασιασμός Διανύσματος με Βαθμωτό Μέγεθος

Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ με ένα βαθμωτό μέγεθος s , παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα. Το μέτρο του είναι το γινόμενο του μέτρου του $\vec{a}$ και της απόλυτης τιμής του s . Η κατεύθυνσή του είναι η κατεύθυνση του $\vec{a}$ αν το s είναι θετικό και η αντίθετη κατεύθυνση αν το s είναι αρνητικό. Για να διαιρέσουμε το $\vec{a}$ με το s , πολλαπλασιάζουμε με $1/s$.

Πολλαπλασιάζοντας Διάνυσμα με Διάνυσμα

Υπάρχουν δύο τρόποι για να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με ένα άλλο διάνυσμα: ο ένας τρόπος δίνει βαθμωτό μέγεθος (και λέγεται *εσωτερικό γινόμενο*), ενώ ο άλλος δίνει ένα νέο διάνυσμα (και λέγεται *εξωτερικό γινόμενο* ή *διανυσματικό γινόμενο*). Πολλοί φοιτητές συχνά μπερδεύουν τα δύο γινόμενα.

Εσωτερικό Γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ του Σχ. 3-18α γράφεται ως $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και ορίζεται να είναι

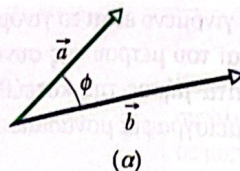
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi \quad (3-20)$$

όπου a είναι το μέτρο του $\vec{a}$, b είναι το μέτρο του $\vec{b}$ και ϕ είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ (ή, ορθότερα, μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$). Στην πράξη υπάρχουν δύο τέτοιες γωνίες: ϕ και $360^\circ - \phi$. Και οι δύο μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην Εξ. 3-20 γιατί τα συνημίτονά τους είναι ίσα.

* Το υλικό αυτής της ενότητας δεν θα χρησιμοποιηθεί παρά αργότερα (στο Κεφάλαιο 7 για το εσωτερικό γινόμενο και στο Κεφάλαιο 11 για το διανυσματικό/εξωτερικό γινόμενο), οπότε ο καθηγητής σας μπορεί να επιλέξει να την αναβάλει γι' αργότερα.

Προσέξτε ότι υπάρχουν μόνο βαθμωτά μεγέθη στο δεξιό μέλος της Εξ. 3-20 (συμπεριλαμβανομένου του $\cos \phi$). Συνεπώς, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ στο αριστερό μέλος αντιπροσωπεύει ένα βαθμωτό μέγεθος.

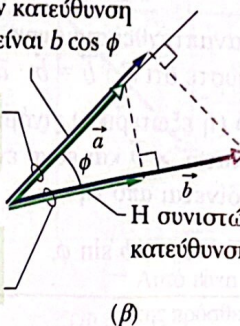
Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως το γινόμενο δύο ποσοτήτων: (1) του μέτρου του ενός από τα δύο διανύσματα και (2) το μέτρο της συνιστώσας του δεύτερου διανύσματος κατά την κατεύθυνση του πρώτου. Για παράδειγμα, στο Σχ. 3-18β το $\vec{a}$ έχει μέτρο $a \cos \phi$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{b}$. Σημειώστε ότι η κάθετος που φέρεται από το τέλος του διανύσματος $\vec{a}$ προς το $\vec{b}$ προσδιορίζει το μέτρο. Με τον ίδιο τρόπο το b έχει μέτρο $b \cos \phi$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{a}$.



Η συνιστώσα του $\vec{b}$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{a}$ είναι $b \cos \phi$

Ο πολλαπλασιασμός αυτών δίνει το εσωτερικό γινόμενο.

Ή ο πολλαπλασιασμός αυτών δίνει το εσωτερικό γινόμενο.



(β)

Σχήμα 3-18 (α) Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, με γωνία ϕ μεταξύ τους. (β) Κάθε διάνυσμα έχει συνιστώσα κατά μήκος της κατεύθυνσης του άλλου διανύσματος



Αν η γωνία ϕ μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι 0° , η συνιστώσα του ενός διανύσματος κατά την κατεύθυνση του άλλου είναι μέγιστη και το ίδιο ισχύει για το εσωτερικό τους γινόμενο. Αν, αντιθέτως, η ϕ είναι 90° , η συνιστώσα του ενός διανύσματος κατά μήκος του άλλου είναι μηδέν, οπότε και το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Η Εξίσωση 3-20 μπορεί να ξαναγραφεί με τον παρακάτω τρόπο για να δοθεί έμφαση στις συνιστώσες:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \quad (3-21)$$

Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Όταν δύο διανύσματα δίνονται στη σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, γράφουμε το εσωτερικό τους γινόμενο ως

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3-22)$$

που μπορούμε να το αναπτύξουμε σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα: παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο κάθε συνιστώσας του πρώτου διανύσματος με κάθε συνιστώσα του δεύτερου διανύσματος. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3-23)$$



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4

Τα διανύσματα $\vec{C}$ και $\vec{D}$ έχουν μέτρα 3 μονάδες και 4 μονάδες μέτρησης, αντίστοιχα. Πόση είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{C}$ και $\vec{D}$ αν το $\vec{C} \cdot \vec{D}$ ισούται με (α) μηδέν, (β) 12 μονάδες μέτρησης, και (γ) -12 μονάδες μέτρησης;

Διανυσματικό Γινόμενο

Το διανυσματικό γινόμενο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$, που γράφεται ως $\vec{a} \times \vec{b}$, δίνει ένα τρίτο διάνυσμα $\vec{c}$ του οποίου το μέτρο είναι

$$c = ab \sin \phi. \quad (3-24)$$

όπου ϕ είναι η μικρότερη από τις δύο γωνίες μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη μικρότερη από τις δύο γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων γιατί τα $\sin \phi$ και $\sin(360^\circ - \phi)$ διαφέρουν ως προς το αλγεβρικό τους πρόσημο. Λόγω του συμβολισμού, το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι επίσης γνωστό ως **εξωτερικό γινόμενο**.



Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι παράλληλα ή αντιπαράλληλα, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Το μέτρο του $\vec{a} \times \vec{b}$, που γράφεται ως $|\vec{a} \times \vec{b}|$, είναι μέγιστο όταν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Η κατεύθυνση του $\vec{c}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που περιέχει τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Το Σχήμα 3-19α δείχνει πώς προσδιορίζεται η κατεύθυνση του $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ με τον **κανόνα του δεξιού χεριού**. Τοποθετήστε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έτσι ώστε οι αρχές των διανυσμάτων να συμπίπτουν χωρίς να αλλάξετε τον προσανατολισμό τους και φανταστείτε μια ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδό τους στο σημείο που ενώνονται. Τοποθετήστε το **δεξί** σας χέρι γύρω από αυτή την ευθεία με τέτοιο τρόπο ώστε τα δάχτυλά σας να στρέφουν από το $\vec{a}$ προς το $\vec{b}$ ακολουθώντας τη μικρότερη γωνία μεταξύ τους. Τότε ο τεντωμένος αντίχειράς σας δείχνει την κατεύθυνση του $\vec{c}$.

Η σειρά των διανυσμάτων στο διανυσματικό γινόμενο είναι σημαντική. Στο Σχ. 3-19β, προσδιορίζουμε την κατεύθυνση του $\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$, οπότε τα δάχτυλα τοποθετούνται ώστε να στρέφουν από το $\vec{b}$ προς το $\vec{a}$ μέσω της μικρότερης γωνίας. Ο αντίχειρας καταλήγει στην αντίθετη κατεύθυνση από πριν, οπότε θα πρέπει να είναι $\vec{c}' = -\vec{c}$, δηλαδή,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (3-25)$$

Με άλλα λόγια, στο διανυσματικό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, γράφουμε

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3-26)$$

το οποίο μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή, μέσω του διανυσματικού γινομένου κάθε συνιστώσας του πρώτου διανύσματος με κάθε συνιστώσα του δεύτερου διανύσματος. Τα διανυσματικά γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων δίνονται στο Παράρτημα Ε (βλ. «Γινόμενα Διανυσμάτων»). Για παράδειγμα, στην ανάπτυξη της Εξ. 3-26, έχουμε

$$a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) = 0,$$

επειδή τα δύο μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}$ και $\hat{i}$ είναι παράλληλα και συνεπώς έχουν διανυσματικό γινόμενο μηδέν. Ομοίως έχουμε

$$a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} = a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}.$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την Εξ. 3-24 για να βρούμε το μέτρο του $\hat{i} \times \hat{j}$ που είναι μονάδα. (Τα διανύσματα $\hat{i}$ και $\hat{j}$ έχουν το καθένα μέτρο μονάδα και η μεταξύ τους γωνία είναι 90°). Επίσης, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να βρούμε την κατεύθυνση του $\hat{i} \times \hat{j}$ που είναι προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z (και συνεπώς είναι το $\hat{k}$).

Συνεχίζοντας την ανάπτυξη της Εξ. 3-26, μπορείτε να δείξετε ότι

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}. \quad (3-27)$$

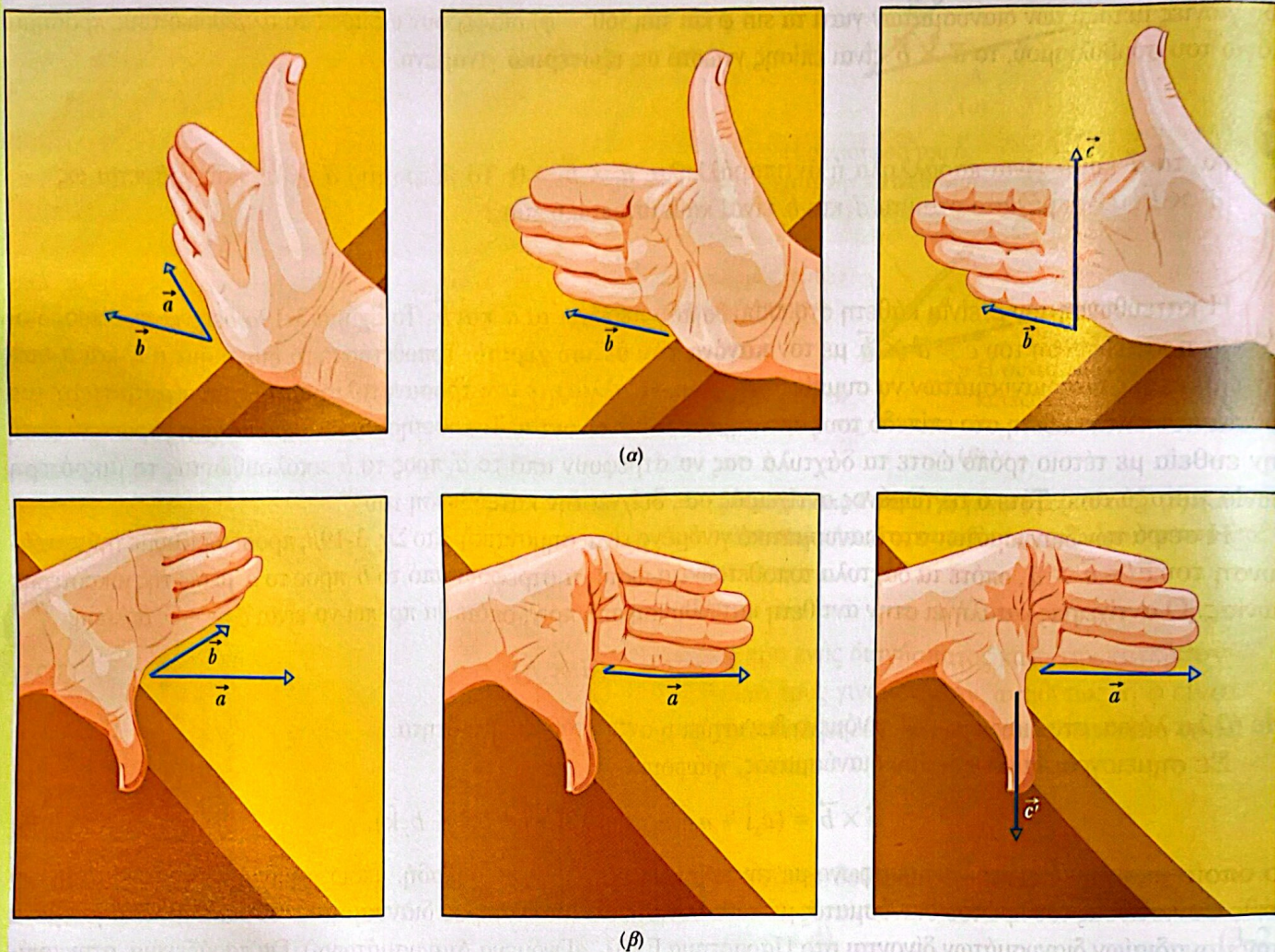
Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε τις ορίζουσες του Παραρτήματος Ε ή έναν υπολογιστή τσέπης που χειρίζεται διανύσματα.

Για να ελέγξετε αν κάποιο σύστημα συντεταγμένων xyz είναι δεξιόστροφο, χρησιμοποιήστε τον κανόνα του δεξιού χεριού για το διανυσματικό γινόμενο $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ σε αυτό το σύστημα. Αν τα δάχτυλά σας στρέφουν το $\hat{i}$ (θετική κατεύθυνση του x) προς το $\hat{j}$ (θετική κατεύθυνση του y) με τον εκτεταμένο αντίχειρα να δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του z , τότε το σύστημα είναι δεξιόστροφο.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 5

Τα διανύσματα $\vec{C}$ και $\vec{D}$ έχουν μέτρα 3 μονάδες και 4 μονάδες μέτρησης, αντίστοιχα. Πόση είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{C}$ και $\vec{D}$ αν το μέτρο του διανυσματικού γινομένου $\vec{C} \times \vec{D}$ είναι (α) μηδέν και (β) 12 μονάδες μέτρησης;



Σχήμα 3-19 Σχηματική αναπαράσταση του κανόνα του δεξιού χεριού για διανυσματικά γινόμενα (α) Σαρώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ προς το διάνυσμα $\vec{b}$ με τα δάχτυλα του δεξιού σας χεριού. Ο τεντωμένος αντίχειράς σας δείχνει την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (β) Φαίνεται ότι το $\vec{b} \times \vec{a}$ είναι αντίθετο του $\vec{a} \times \vec{b}$.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-05 Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο

Πόση είναι η γωνία ϕ μεταξύ των $\vec{a} = 3.0\hat{i} - 4.0\hat{j}$ και $\vec{b} = -2.0\hat{i} + 3.0\hat{k}$. *Προσοχή:* Παρόλο που πολλά από τα επόμενα βήματα μπορούν να παρακαμφθούν με έναν υπολογιστή τσέπης ικανή να χειριστεί διανύσματα, θα μάθετε περισσότερα για τα εσωτερικά γινόμενα αν, τουλάχιστον εδώ, ακολουθήσετε αυτά τα βήματα.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των δύο διανυσμάτων περιλαμβάνεται στον ορισμό του εσωτερικού τους γινομένου (Εξ. 3-20):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \quad (3-28)$$

Υπολογισμοί: Στην Εξ. 3-28, a είναι το μέτρο του $\vec{a}$, ή αλλιώς

$$a = \sqrt{3.0^2 + (-4.0)^2} = 5.00, \quad (3-29)$$

και b είναι το μέτρο του $\vec{b}$, δηλαδή:

$$b = \sqrt{(-2.0)^2 + 3.0^2} = 3.61. \quad (3-30)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά το αριστερό μέλος της Εξ. 3-28 γράφοντας τα διανύσματα η σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3.0\hat{i} - 4.0\hat{j}) \cdot (-2.0\hat{i} + 3.0\hat{k}) \\ &= (3.0\hat{i}) \cdot (-2.0\hat{i}) + (3.0\hat{i}) \cdot (3.0\hat{k}) \\ &\quad + (-4.0\hat{j}) \cdot (-2.0\hat{i}) + (-4.0\hat{j}) \cdot (3.0\hat{k}). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την Εξ. 3-20 για κάθε όρο της παραπάνω σχέσης. Η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων στον πρώτο όρο ($\hat{i}$ και $\hat{i}$) είναι 0° , ενώ για τους υπόλοιπους όρους είναι 90° . Έχουμε τότε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(6.0)(1) + (9.0)(0) + (8.0)(0) - (12)(0) = -6.0.$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα μαζί με τα αποτελέσματα των Εξ. 3-29 και 3-30 στην Εξ. 3-28 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -6.0 &= (5.00)(3.61) \cos \phi, \\ \phi &= \cos^{-1} \frac{-6.0}{(5.00)(3.61)} = 109^\circ \approx 110^\circ. \end{aligned}$$

(Απάντηση)



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-06 Εξωτερικό γινόμενο, κανόνας του δεξιού χεριού

Στο Σχ. 3-22, το διάνυσμα $\vec{a}$ βρίσκεται στο επίπεδο xy , έχει μέτρο 18 μονάδες μετρήσεως και δείχνει σε κατεύθυνση 250° από την κατεύθυνση $+x$. Επίσης, το διάνυσμα $\vec{b}$ έχει μέτρο 12 μονάδες μετρήσεως και δείχνει προς την κατεύθυνση $+z$. Πόσο είναι το διανυσματικό γινόμενο $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Όταν έχουμε δύο διανύσματα σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας, βρίσκουμε το μέτρο του διανυσματικού τους γινομένου με την Εξ. 3-24 και την κατεύθυνσή του με τον κανόνα του δεξιού χεριού του Σχ. 3-19.

Υπολογισμοί: Για το μέτρο γράφουμε

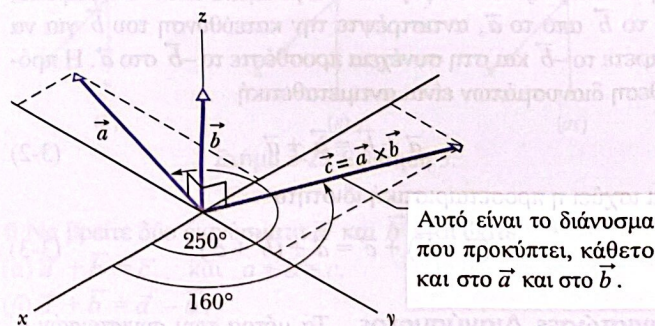
$$c = ab \sin \phi = (18)(12)(\sin 90^\circ) = 216. \quad (\text{Απάντηση})$$

Για να προσδιορίσετε την κατεύθυνση στο Σχ. 3-20, φανταστείτε ότι βάζετε τα δάχτυλα του δεξιού σας χεριού γύρω από μια ευθεία κάθετη στο επίπεδο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ (την ευθεία πάνω στην οποία φαίνεται το $\vec{c}$) έτσι ώστε

τα δάχτυλά σας να στρέφουν από το $\vec{a}$ προς το $\vec{b}$. Ο τεντωμένος αντίχειράς σας δίνει την κατεύθυνση του $\vec{c}$. Συνεπώς, όπως φαίνεται και στο σχήμα, το $\vec{c}$ βρίσκεται στο επίπεδο xy . Επειδή η κατεύθυνσή του είναι κάθετη στην κατεύθυνση του $\vec{a}$, βρίσκεται υπό γωνία

$$250^\circ - 90^\circ = 160^\circ \quad (\text{Απάντηση})$$

ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x .



Σχήμα 3-20 Το διάνυσμα $\vec{c}$ (στο επίπεδο xy) είναι το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 3-07 Εξωτερικό γινόμενο, σημειογραφία μοναδιαίων διανυσμάτων

Αν $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ και $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, πόσο είναι το $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Όταν δύο διανύσματα δίνονται σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, μπορούμε να βρούμε το διανυσματικό τους γινόμενο χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

Υπολογισμοί: Εδώ γράφουμε

$$\begin{aligned} \vec{c} &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) \\ &\quad + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε κάθε όρο με τη βοήθεια της Εξ. 3-24, βρίσκοντας την κατεύθυνση με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Για τον πρώτο όρο εδώ, η γωνία ϕ



μεταξύ των δύο διανυσμάτων των οποίων υπολογίζουμε το διανυσματικό τους γινόμενο είναι 0. Για τους υπόλοιπους όρους, η ϕ είναι 90° . Βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\vec{c} &= -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i} \\ &= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}.\end{aligned}$$

(Απάντηση)

Το διάνυσμα $\vec{c}$ είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, γεγονός που μπορείτε να ελέγξετε δείχνοντας ότι $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ και $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, δηλαδή, δεν υπάρχει συνιστώσα του $\vec{c}$ κατά την κατεύθυνση είτε του $\vec{a}$ είτε του $\vec{b}$.



Ανασκόπηση και Σύνοψη

Διανύσματα και Βαθμωτά Μεγέθη Τα βαθμωτά μεγέθη, όπως η θερμοκρασία, έχουν μόνο μέτρο. Προσδιορίζονται από έναν αριθμό με μονάδα (10°C) και υπακούουν στους κανόνες της αριθμητικής και της συνήθους άλγεβρας. Τα διανύσματα, όπως η μετατόπιση, έχουν και μέτρο και κατεύθυνση (5 m, βόρεια) και υπακούουν στους κανόνες της διανυσματικής άλγεβρας.

Γεωμετρική Πρόσθεση Διανυσμάτων Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούν να προστεθούν γεωμετρικά σχεδιάζοντάς τα σε κοινή κλίμακα και τοποθετώντας τα διαδοχικά, με τη διάταξη του τέλους του ενός στην αρχή του άλλου. Το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του πρώτου διανύσματος με το τέλος του δεύτερου ονομάζεται διανυσματικό άθροισμα $\vec{s}$. Για να αφαιρέσετε το $\vec{b}$ από το $\vec{a}$, αντιστρέψτε την κατεύθυνση του $\vec{b}$ για να πάρετε το $-\vec{b}$ και στη συνέχεια προσθέστε το $-\vec{b}$ στο $\vec{a}$. Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι αντιμεταθετική

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (3-2)$$

και ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (3-3)$$

Συνιστώσες Διανύσματος Τα μέτρα των συνιστωσών a_x και a_y ενός οποιουδήποτε διανύσματος $\vec{a}$ κατά τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων βρίσκονται φέρνοντας κάθετες ευθείες από το τέλος του $\vec{a}$ προς τους άξονες αυτούς. Τα μέτρα δίνονται από τις σχέσεις

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{και} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (3-5)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x και της κατεύθυνσης του $\vec{a}$. Το αλγεβρικό πρόσημο του μέτρου μιας συνιστώσας προσδιορίζει την κατεύθυνση ως προς τον αντίστοιχο άξονα. Όταν γνωρίζουμε τα μέτρα των συνιστωσών, μπορούμε να βρούμε το μέτρο και τον προσανατολισμό (κατεύθυνση) ενός διανύσματος $\vec{a}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{και} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x} \quad (3-6)$$

Σημειογραφία Μοναδιαίου Διανύσματος Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ έχουν μέτρο μονάδα και κατευθύνονται προς τη θετική κατεύθυνση των x , y και z , αντίστοιχα, σε δεξιό-

στροφικό σύστημα συντεταγμένων (όπως ορίζεται από τα διανυσματικά γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων). Μπορούμε να γράψουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ ως προς τα μοναδιαία διανύσματα ως

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (3-7)$$

όπου $a_x \hat{i}$, $a_y \hat{j}$ και $a_z \hat{k}$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του $\vec{a}$ και a_x , a_y και a_z είναι το μέτρο των συνιστωσών.

Πρόσθεση Διανυσμάτων με τη Μορφή Συνιστωσών Για να προσθέσουμε διανύσματα με τη μορφή συνιστωσών, χρησιμοποιούμε τους κανόνες

$$r_x = a_x + b_x, \quad r_y = a_y + b_y, \quad r_z = a_z + b_z \quad (3-10 \text{ έως } 3-12)$$

Εδώ τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι διανύσματα που θα προστεθούν, και $\vec{r}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα. Σημειώστε ότι προσθέτουμε συνιστώσες κατά άξονα. Κατόπιν μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος ή σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας.

Γινόμενο Βαθμωτού Μεγέθους με Διάνυσμα Το γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους s με ένα διάνυσμα $\vec{v}$ είναι ένα νέο διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι sv και η κατεύθυνσή του είναι η ίδια με αυτή του διανύσματος $\vec{v}$ αν το s είναι θετικό, και αντίθετη από αυτή του $\vec{v}$ αν το s είναι αρνητικό. Για να διαιρέσουμε το $\vec{v}$ με το s , πολλαπλασιάζουμε με $1/s$. Το αρνητικό πρόσημο αντιστρέφει το διάνυσμα.

Εσωτερικό Γινόμενο Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ γράφεται $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και είναι το βαθμωτό μέγεθος που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi \quad (3-20)$$

στην οποία ϕ είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος με το μέτρο συνιστώσας του δεύτερου κατά την κατεύθυνση του πρώτου. Σημειώστε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, το οποίο σημαίνει ότι για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3-22)$$

που μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

Διανυσματικό Γινόμενο Το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ γράφεται $\vec{a} \times \vec{b}$ και είναι ένα διάνυσμα $\vec{c}$ του οποίου το μέτρο c δίνεται από τη σχέση

$$c = ab \sin \phi, \quad (3-24)$$

όπου ϕ είναι η μικρότερη από τις γωνίες μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Η κατεύθυνση του $\vec{c}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και δίνεται από τον κανόνα

του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο Σχ. 3-19. Σημειώστε ότι $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, το οποίο σημαίνει ότι για το διανυσματικό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}), \quad (3-26)$$

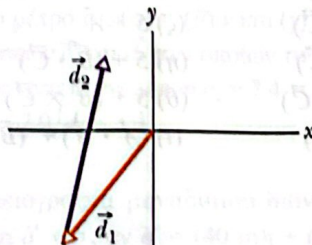
που μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.



Ερωτήσεις

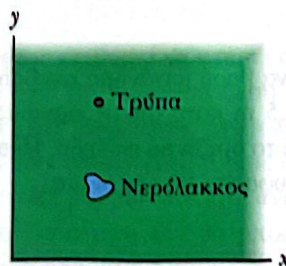
1 Μπορεί το άθροισμα των μέτρων δύο διανυσμάτων να είναι ίσο με το μέτρο του αθροίσματος των δύο διανυσμάτων; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, πότε;

2 Τα δύο διανύσματα που φαίνονται στο Σχ. 3-21 βρίσκονται στο επίπεδο xy . Ποια είναι τα πρόσημα των συνιστωσών x και y , αντίστοιχα, των (α) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$, (β) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$ και (γ) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$;



Σχ. 3-21 Ερώτηση 2.

3 Η ομάδα γκολφ του Πανεπιστημίου της Φλόριντα πρέπει να παίξει στο γηπέδο, όπου βρίσκεται και ένας μεγάλος νερό-λακκος. Το Σχ. 3-22 δείχνει την κάτοψη της περιοχής: σημειώνεται ένα σύστημα αξόνων xy . Τα μέλη της ομάδας πρέπει να χτυπήσουν τη μπάλα από την αρχή των αξόνων προς την τρύπα που βρίσκεται σε συντεταγμένες (8 m, 12 m), αλλά χρησιμοποιώντας μόνο κάποιες από τις ακόλουθες μετατοπίσεις

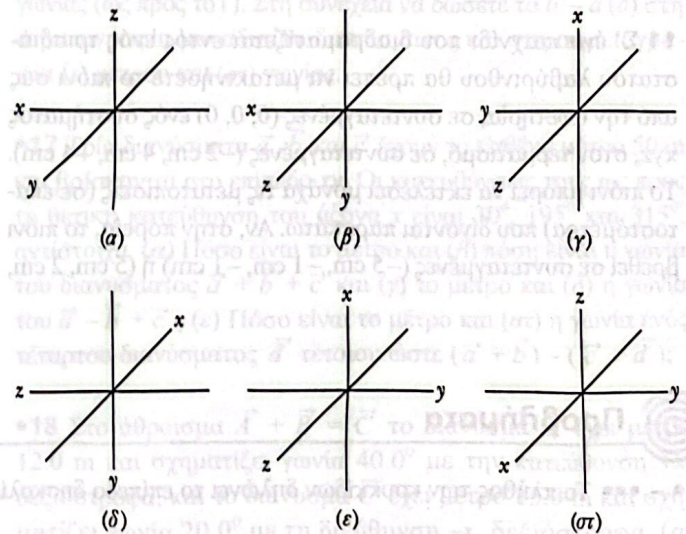


Σχ. 3-22 Ερώτηση 3.

$\vec{d}_1 = (8 \text{ m})\hat{i} + (6 \text{ m})\hat{j}$, $\vec{d}_2 = (6 \text{ m})\hat{j}$, $\vec{d}_3 = (8 \text{ m})\hat{i}$ όσες φορές θέλουν. Ο λάκκος έχει συντεταγμένες (8 m, 6 m). Αν κάποιο μέλος της ομάδας ρίξει την μπάλα στον λάκκο ή η μπάλα περάσει από τον λάκκο, παίρνει αυτόματα μεταγραφή για το Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Φλόριντα, τον κύριο ανταγωνιστή τους. Ποια σειρά μετατοπίσεων πρέπει να χρησιμοποιήσει η ομάδα ώστε ν' αποφύγει τον λάκκο;

4 Η Εξίσωση 3-2 δείχνει ότι η πρόσθεση διανυσμάτων είναι αντιμεταθετική. Αυτό σημαίνει ότι η και η αφαίρεση είναι αντιμεταθετική, έτσι ώστε $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$;

5 Ποια διάταξη αξόνων στο Σχ. 3-23 μπορεί να ονομαστεί «δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων»; Ως συνήθως, το γράμμα κάθε άξονα δηλώνει τη θετική κατεύθυνσή του.



Σχ. 3-23 Ερώτηση 5.

6 Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έτσι ώστε

(α) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ και $a + b = c$,

(β) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$,

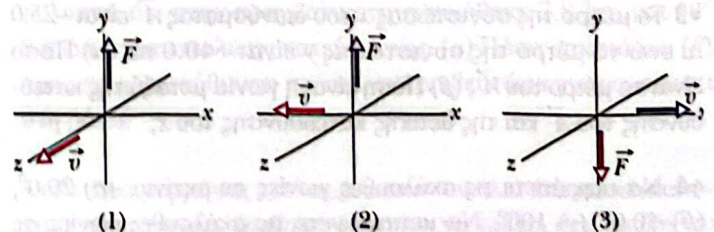
(γ) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ και $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Αν $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, είναι (α) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$,

(β) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$ και (γ) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} - \vec{b}$;

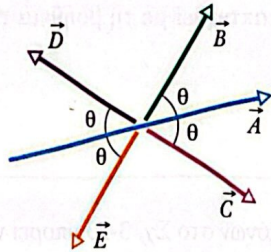
8 Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, πρέπει οπωσδήποτε το $\vec{b}$ να είναι ίσο με το $\vec{c}$;

9 Αν $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ και $\vec{v}$ είναι κάθετο στο $\vec{B}$, τότε ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{F}$ στις τρεις περιπτώσεις που φαίνονται στο Σχ. 3-24, όταν η σταθερά q είναι (α) θετική και (β) αρνητική;



Σχ. 3-24 Ερώτηση 9.

10 Το Σχήμα 3-25 δείχνει το διάνυσμα $\vec{A}$ και άλλα τέσσερα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο αλλά διαφορετικό προσανατολισμό. (α) Ποια από αυτά τα άλλα τέσσερα διανύσματα έχουν το ίδιο βαθμωτό γινόμενο με το $\vec{A}$; (β) Ποια έχουν αρνητικό βαθμωτό γινόμενο με το $\vec{A}$;



Σχήμα 3-25 Ερώτηση 10.

11 Σ' ένα παιχνίδι που διαδραματίζεται εντός ενός τρισδιάστατου λαβύρινθου θα πρέπει να μετακινήσετε το πόνι σας από την αφετηρία, σε συντεταγμένες $(0, 0, 0)$ ενός συστήματος xyz , στον τερματισμό, σε συντεταγμένες $(-2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$. Το πόνι μπορεί να εκτελέσει μονάχα τις μετατοπίσεις (σε εκατοστόμετρα) που δίνονται παρακάτω. Αν, στην πορεία, το πόνι βρεθεί σε συντεταγμένες $(-5 \text{ cm}, -1 \text{ cm}, -1 \text{ cm})$ ή $(5 \text{ cm}, 2 \text{ cm},$

$-1 \text{ cm})$, χάνετε το παιχνίδι. Με ποιες μετατοπίσεις και με ποια αλληλουχία θα φέρετε το πόνι σας στον τερματισμό;

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} & \vec{r} &= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{q} &= 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} & \vec{s} &= 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}.\end{aligned}$$

12 Οι συνιστώσες x και y τεσσάρων διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ και $\vec{d}$ δίνονται παρακάτω. Για ποια διανύσματα η αριθμομηχανή σας θα δώσει τη σωστή γωνία θ όταν τη χρησιμοποιήσετε για να βρείτε τη γωνία θ με την Εξ. 3-6; Απαντήστε εξετάζοντας πρώτα το Σχ. 3-12 και κατόπιν ελέγχοντας την απάντησή σας με την αριθμομηχανή.

$$\begin{array}{cccc} a_x = 3 & a_y = 3 & c_x = -3 & c_y = -3 \\ b_x = -3 & b_y = 3 & d_x = 3 & d_y = -3. \end{array}$$

13 Ποιες από τις παρακάτω διανυσματικές εκφράσεις είναι σωστές (έχουν νόημα); Τι είναι λάθος με τις όποιες λανθασμένες εκφράσεις;

(α) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$	(στ) $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C})$
(β) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$	(ζ) $5 + \vec{A}$
(γ) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$	(η) $5 + (\vec{B} \cdot \vec{C})$
(δ) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$	(θ) $5 + (\vec{B} \times \vec{C})$
(ε) $\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{C})$	(ι) $(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{C})$

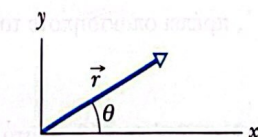
Προβλήματα

• - ••• Το πλήθος των κουκκίδων δηλώνει το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος.

Ενότητα 3-1 Τα Διανύσματα και οι Συνιστώσες τους

•1 Πόσο είναι (α) το μέτρο της συνιστώσας x και (β) το μέτρο της συνιστώσας y ενός διανύσματος $\vec{a}$ στο επίπεδο xy αν η κατεύθυνσή του είναι 250° δεξιόστροφα από τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και το μέτρο του είναι 7.3 m ;

•2 Ένα διάνυσμα μετατόπισης $\vec{r}$ στο επίπεδο xy έχει μήκος 15 m και η κατεύθυνσή του σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ στο Σχ. 3-26. Να προσδιορίσετε (α) το μέτρο της συνιστώσας x και (β) το μέτρο της συνιστώσας y του διανύσματος.



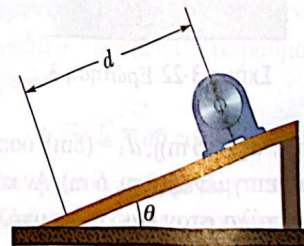
Σχήμα 3-26 Πρόβλημα 2.

•3 Το μέτρο της συνιστώσας x του διανύσματος $\vec{A}$ είναι -25.0 m ενώ το μέτρο της συνιστώσας y είναι $+40.0 \text{ m}$. (α) Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{A}$; (β) Πόση είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης του $\vec{A}$ και της θετικής κατεύθυνσης του x ;

•4 Να εκφράσετε τις ακόλουθες γωνίες σε ακτίνια: (α) 20.0° , (β) 50.0° , (γ) 100° . Να μετατρέψετε τις ακόλουθες γωνίες σε μοίρες: (δ) 0.330 rad , (ε) 2.10 rad , (στ) 7.70 rad .

•5 Ένα καράβι ξεκινά το ταξίδι του πλέοντας προς ένα σημείο 120 km βόρεια. Μια ξαφνική καταιγίδα οδηγεί το πλοίο σε σημείο 100 km ανατολικά του σημείου εκκίνησής του. (α) Πόσο μακριά και (β) προς ποια κατεύθυνση πρέπει να πλεύσει τώρα το πλοίο για να φτάσει στον αρχικό του προορισμό;

•6 Στο Σχ. 3-27 ένα βαρύ μηχάνημα ανεβαίνει ολισθαίνοντας απόσταση $d = 12.5 \text{ m}$ κατά μήκος σανίδας που σχηματίζει γωνία $\theta = 20.0^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Πόσο μακριά μετακινείται (α) κατακόρυφα και (β) οριζόντια;



Σχήμα 3-27 Πρόβλημα 6.

•7 Θεωρήστε δύο μετατοπίσεις, μία με μέγεθος 3 m και άλλη με μέγεθος 4 m . Δείξτε πώς θα μπορούσαν να συνδυαστούν τα διανύσματα μετατόπισης για να προκύψει μια μετατόπιση με γέθους (α) 7 m , (β) 1 m και (γ) 5 m .

Ενότητα 3-2 Μοναδιαία Διανύσματα, Πρόσθεση Διανυσμάτων κατά Συνιστώσες

•8 Ένας άνθρωπος διαγράφει την ακόλουθη πορεία: 3.1 km βόρεια, στη συνέχεια 2.4 km δυτικά και τέλος 5.2 km νότια. (α) Να σχεδιάσετε το διανυσματικό διάγραμμα που αντιπροσωπεύει την κίνηση αυτή. (β) Πόσο μακριά και (γ) προς ποια κατεύθυνση θα πετούσε μια μύγα σε ευθεία γραμμή από το ίδιο σημείο εκκίνησης έως το ίδιο τελικό σημείο;

•9 Δύο διανύσματα δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{a} = (4.0 \text{ m})\hat{i} - (3.0 \text{ m})\hat{j} + (1.0 \text{ m})\hat{k}$$

και $\vec{b} = (-1.0 \text{ m})\hat{i} + (1.0 \text{ m})\hat{j} + (4.0 \text{ m})\hat{k}$.

Να βρείτε στη σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος τα (α) $\vec{a} + \vec{b}$, (β) $\vec{a} - \vec{b}$ και (γ) ένα τρίτο διάνυσμα $\vec{c}$ τέτοιο ώστε $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•10 Να βρείτε το μέτρο της (α) x , (β) y και (γ) z του αθροίσματος των μετατοπίσεων $\vec{c}$ και $\vec{d}$ των οποίων το μέτρο της συνιστώσας κατά τους τρεις άξονες είναι $c_x = 7.4$, $c_y = -3.8$, $c_z = -6.1$ και $d_x = 4.4$, $d_y = -2.0$, $d_z = 3.3$.

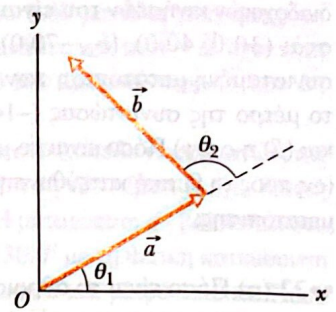
•11 (α) Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, πόσο είναι το άθροισμα $\vec{a} + \vec{b}$, αν $\vec{a} = (40 \text{ m})\hat{i} + (3.0 \text{ m})\hat{j}$ και $\vec{b} = (-13.0 \text{ m})\hat{i} + (7.0 \text{ m})\hat{j}$; (β) Πόσο είναι το μέτρο και (γ) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{a} + \vec{b}$;

•12 Ένα αυτοκίνητο κινείται ανατολικά για απόσταση 50 km, μετά βόρεια για 30 km και στη συνέχεια σε κατεύθυνση 30° ανατολικά της βορινής κατεύθυνσης για 25 km. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα μετατόπισης και να προσδιορίσετε (α) το μέτρο και (β) τη γωνία της συνολικής μετατόπισης του αυτοκινήτου από το αρχικό του σημείο.

•13 Ένας άνθρωπος επιθυμεί να φτάσει σε σημείο που βρίσκεται 3.40 km από την παρούσα θέση του και σε κατεύθυνση που είναι 35.0° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. Ωστόσο, πρέπει να κινηθεί κατά μήκος δρόμων που έχουν προσανατολισμό είτε βορρά-νότο είτε ανατολή-δύση. Πόση είναι η ελάχιστη απόσταση που θα μπορούσε να διανύσει για να φτάσει στον προορισμό του;

•14 Πρόκειται να εκτελέσετε τέσσερις ευθύγραμμες μετατοπίσεις σε επίπεδο ερημικό έδαφος, ξεκινώντας από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων xy και καταλήγοντας στις συντεταγμένες xy $(-140 \text{ m}, 30 \text{ m})$. Το μέτρο των συνιστωσών x και y των μετατοπίσεών σας είναι, αντίστοιχα και σε μέτρα, οι ακόλουθες: (20 και 60), μετά $(b_x$ και $-70)$, μετά $(-20$ και $c_y)$, μετά $(-60$ και $-70)$. Πόσο είναι (α) το μέτρο της συνιστώσας b_x και (β) το μέτρο της συνιστώσας c_y ; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία (ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x) της συνολικής μετατόπισης;

•15 Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ του Σχ. 3-28 έχουν ίσα μέτρα 10.0 m ενώ οι γωνίες είναι $\theta_1 = 30^\circ$ και $\theta_2 = 105^\circ$. Να βρείτε το μέτρο της συνιστώσας (α) x και (β) y του διανυσματικού αθροίσματος $\vec{r}$ των διανυσμάτων, γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τη θετική κατεύθυνση του άξονα x .



Σχήμα 3-28 Πρόβλημα 15.

•16 Για τα διανύσματα $\vec{a} = (3.0 \text{ m})\hat{i} + (4.0 \text{ m})\hat{j}$ και $\vec{b} = (5.0 \text{ m})\hat{i} + (-2.0 \text{ m})\hat{j}$, να δώσετε το $\vec{a} + \vec{b}$ (α) στη σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και στη σημειογραφία (β) μέτρου και (γ) γωνίας (ως προς το $\hat{i}$). Στη συνέχεια να δώσετε το $\vec{b} - \vec{a}$ (δ) στη σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και στη σημειογραφία (ε) μέτρου και (στ) γωνίας.

•17 Τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ έχουν το καθένα μέτρο 50 m και βρίσκονται στο επίπεδο xy . Οι κατευθύνσεις τους ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x είναι 30° , 195° και 315° , αντίστοιχα. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία του διανύσματος $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ και (γ) το μέτρο και (δ) η γωνία του $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; (ε) Πόσο είναι το μέτρο και (στ) η γωνία ενός τέταρτου διανύσματος $\vec{d}$ τέτοιου ώστε $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$;

•18 Στο άθροισμα $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ το διάνυσμα $\vec{A}$ έχει μέτρο 12.0 m και σχηματίζει γωνία 40.0° με την κατεύθυνση $+x$, δεξιόστροφα, και το διάνυσμα $\vec{C}$ έχει μέτρο 15.0 m και σχηματίζει γωνία 20.0° με τη διεύθυνση $-x$, δεξιόστροφα. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία (ως προς το $+x$) του $\vec{B}$;

•19 Σε ένα παιχνίδι σκακιού σε γρασίδι, όπου τα πόνια κινούνται μεταξύ των κέντρων τετραγώνων πλευράς 1.00 m, ένας ίππος κινείται με τον ακόλουθο τρόπο: (1) δύο τετράγωνα μπροστά, ένα τετράγωνο προς τα δεξιά, (2) δύο τετράγωνα προς τα αριστερά, ένα τετράγωνο μπροστά, (3) δύο τετράγωνα μπροστά, ένα τετράγωνο προς τα αριστερά. Πόσο είναι (α) το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία (ως προς το «μπροστά») της συνολικής μετατόπισης του ίππου για τη σειρά των τριών κινήσεων;

•20 Ένας εξερευνητής πέφτει σε χιονοθύελλα, στην οποία η χιονόπτωση είναι τόσο πυκνή που το έδαφος δεν ξεχωρίζει από τον ουρανό, καθώς επιστρέφει στη βάση του. Έπρεπε να κινηθεί βόρεια για 5.6 km, αλλά όταν σταματά η χιονοθύελλα, ανακαλύπτει ότι στην πραγματικότητα κινήθηκε 7.8 km και 50° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. (α) Πόσο μακριά και (β) προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί τώρα για να φτάσει στη βάση;

•21 Ένα μυρμήγκι, τρελαμένο από τον ήλιο ένα καυτό καλοκαιρινό απόγευμα, ξαφνικά ξεκινάει να τρέχει στο οριζόντιο επίπεδο xy . Το μέτρο των συνιστωσών x και y των τεσσάρων

διαδοχικών κινήσεων του είναι οι ακόλουθες, όλες σε εκατοστά: $(30.0, 40.0)$, $(b_x, -70.0)$, $(-20.0, c_y)$, $(-80.0, -70.0)$. Η συνισταμένη μετατόπιση των τεσσάρων μετατοπίσεων έχει το μέτρο της συνιστώσας $(-140, -20.0)$. Πόση είναι (α) η b_x και (β) η c_y ; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία (ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x) της συνισταμένης μετατόπισης;

••22 (α) Πόσο είναι το άθροισμα των ακόλουθων τεσσάρων διανυσμάτων, σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος; Για το άθροισμα αυτό, (β) πόσο είναι το μέτρο, (γ) πόση είναι η γωνία σε μοίρες και (δ) η γωνία σε ακτίνια;

$$\vec{E}: 6.00 \text{ m σε } +0.900 \text{ rad} \quad \vec{F}: 5.00 \text{ m σε } -75.0^\circ$$

$$\vec{G}: 4.00 \text{ m σε } +1.20 \text{ rad} \quad \vec{H}: 6.00 \text{ m σε } -210^\circ$$

••23 Αν το $\vec{B}$ προστεθεί στο $\vec{C} = (3.0 \text{ m})\hat{i} + (4.0 \text{ m})\hat{j}$, το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα y , με μέτρο ίσο με αυτό του $\vec{C}$. Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{B}$;

••24 Το διάνυσμα $\vec{A}$, το οποίο έχει κατεύθυνση ίδια με τον άξονα x , πρόκειται να προστεθεί στο διάνυσμα $\vec{B}$, το οποίο έχει μέτρο 7.0 m . Το άθροισμα είναι ένα τρίτο διάνυσμα που έχει ίδια κατεύθυνση με τον άξονα y , με μέτρο που είναι 3.0 φορές το μέτρο του $\vec{A}$. Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{A}$;

••25 Η όαση B βρίσκεται 25 km ανατολικά της όασης A . Ξεκινώντας από την όαση A , μια καμήλα διασχίζει 24 km σε κατεύθυνση 15° νότια της ανατολικής κατεύθυνσης και στη συνέχεια 8.0 km βόρεια. Πόσο μακριά βρίσκεται τότε η καμήλα από την όαση B ;

••26 Πόσο είναι το άθροισμα των ακόλουθων τεσσάρων διανυσμάτων (α) σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, και σε σημειογραφία (β) μέτρου και (γ) γωνίας;

$$\vec{A} = (2.00 \text{ m})\hat{i} + (3.00 \text{ m})\hat{j} \quad \vec{B} = 4.00 \text{ m, σε } +65.0^\circ$$

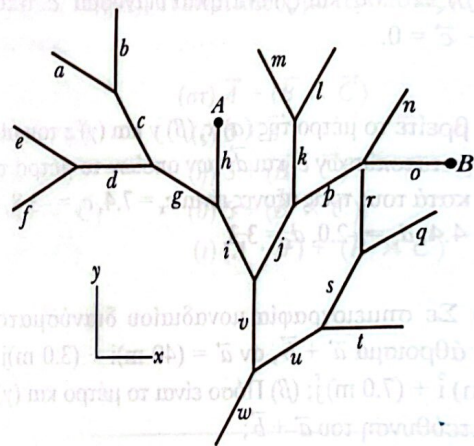
$$\vec{C} = (-4.00 \text{ m})\hat{i} + (-6.00 \text{ m})\hat{j} \quad \vec{D} = 5.00 \text{ m, σε } -235^\circ$$

••27 Αν $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ και $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ τότε πόσο είναι, στη σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, (α) $\vec{d}_1$ και (β) $\vec{d}_2$;

••28 Δύο σκαθάρια κινούνται πάνω σε επίπεδη άμμο, ξεκινώντας από το ίδιο σημείο. Το σκαθάρι 1 κινείται 0.50 m ανατολικά και στη συνέχεια 0.80 m με γωνία 30° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. Το σκαθάρι 2 εκτελεί επίσης δύο μετατοπίσεις, η πρώτη 1.6 m σε κατεύθυνση 40° ανατολικά της βορινής κατεύθυνσης. (α) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο και (β) ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της δεύτερης μετατόπισής του αν πρόκειται να καταλήξει στην τελική θέση του σκαθαριού 1;

••29 Τα συνηθισμένα μυρμήγκια της αυλής δημιουργούν συχνά ένα δίκτυο από χημικά ίχνη για να μην χάνουν το δρόμο

τους. Εκτεινόμενο έξω από τη φωλιά, ένα ίχνος διακλαδώνεται κατ' επανάληψη, με γωνία 60° μεταξύ των διακλαδώσεων. Αν ένα περιπλανώμενο μυρμήγκι βρεθεί κατά τύχη πάνω σε ένα ίχνος, ξέρει τον δρόμο προς τη φωλιά σε οποιοδήποτε σημείο της διακλάδωσης: Αν απομακρύνεται από τη φωλιά, έχει δύο επιλογές κίνησης που απαιτούν μια μικρή στροφή στην κατεύθυνση κίνησής του, είτε 30° προς τα αριστερά είτε 30° δεξιά. Αν κινείται προς τη φωλιά, έχει μόνο μια επιλογή. Το Σχήμα 3-29 δείχνει ένα τυπικό ίχνος μυρμηγκιών, με ονοματισμένα ευθύγραμμα τμήματα μήκους 2.0 cm και συμμετρική διακλάδωση 60° . (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία (ως προς τη θετική κατεύθυνση του υπερτιθέμενου άξονα x) της μετατόπισης ενός μυρμηγκιού από τη φωλιά (βρείτε τη στο σχήμα) αν το μυρμήγκι μπαίνει στο ίχνος στο σημείο A ; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία αν μπαίνει στο σημείο B ;



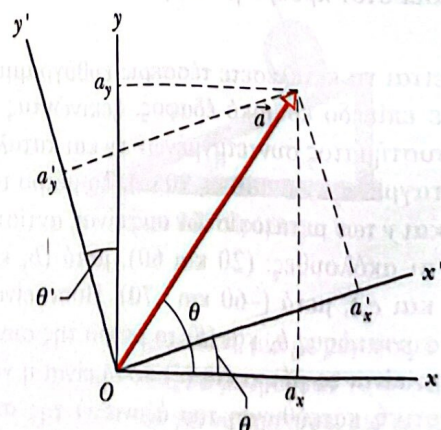
Σχήμα 3-29 Πρόβλημα 29.

••30 Εδώ δίνονται δύο διανύσματα:

$$\vec{a} = (4.0 \text{ m})\hat{i} - (3.0 \text{ m})\hat{j} \quad \text{και} \quad \vec{b} = (6.0 \text{ m})\hat{i} + (8.0 \text{ m})\hat{j}$$

(α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) η γωνία (σε σχέση με το $\hat{i}$) του $\vec{a}$; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) πόση είναι η γωνία του $\vec{b}$; (ε) πόσο είναι το μέτρο και (στ) η γωνία του $\vec{a} + \vec{b}$; (ζ) το μέτρο και (η) η γωνία του $\vec{b} - \vec{a}$; (θ) το μέτρο και (ι) η γωνία του $\vec{a} - \vec{b}$; (iy) Πόση είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων του $\vec{b} - \vec{a}$ και του $\vec{a} - \vec{b}$;

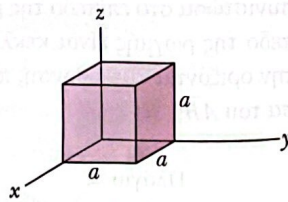
••31 Στο Σχ. 3-30 το διάνυσμα $\vec{a}$ με μέτρο 17.0 m έχει κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta = 56.0^\circ$ δεξιόστροφα με τον άξονα $+x$. Πόσο είναι το μέτρο των συνιστωσών του διανύσματος;



Σχήμα 3-30 Πρόβλημα 31.

τος (α) a_x και (β) a_y ; Ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων σχηματίζει γωνία $\theta' = 18.0^\circ$ με το πρώτο. Πόσο είναι το μέτρο των συνιστωσών (γ) a_x' και (δ) a_y' σε αυτό το τονούμενο σύστημα;

•••32 Στο Σχ. 3-31 ένας κύβος ακμής μήκους a βρίσκεται με τη μια του γωνία στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων x, y, z . Μια κύρια διαγώνιος είναι μια ευθεία που εκτείνεται από τη μια γωνία του κύβου στην άλλη μέσω του κέντρου.

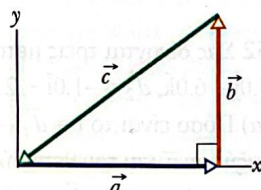


Σχ. 3-31 Πρόβλημα 32.

Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, ποια είναι η κύρια διαγώνιος που εκτείνεται από τη γωνία (α) με συντεταγμένες $(0, 0, 0)$, (β) συντεταγμένες $(a, 0, 0)$, (γ) συντεταγμένες $(0, a, 0)$ και (δ) συντεταγμένες $(a, a, 0)$; (ε) Να προσδιορίσετε τις γωνίες που σχηματίζει η κύρια διαγώνιος με τις προσκείμενες πλευρές. (στ) Να προσδιορίσετε το μήκος των κυριών διαγωνίων ως προς το a .

Ενότητα 3-3 Πολλαπλασιασμός Διανυσμάτων

•33 Για τα διανύσματα του Σχ. 3-32, με $a = 4$, $b = 3$ και $c = 5$, (α) πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{a} \times \vec{b}$, (γ) το μέτρο και (δ) η κατεύθυνση του $\vec{a} \times \vec{c}$, και (ε) το μέτρο και (στ) η κατεύθυνση του $\vec{b} \times \vec{c}$; Ο άξονας z δεν φαίνεται.



Σχ. 3-32 Προβλήματα 33 και 54.

•34 Δύο διανύσματα δίνονται ως $\vec{a} = 3.0\hat{i} + 5.0\hat{j}$ και $\vec{b} = 2.0\hat{i} + 4.0\hat{j}$. Να βρείτε τα (α) $\vec{a} \times \vec{b}$, (β) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (γ) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ και (δ) το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{a}$ κατά μήκος της κατεύθυνσης του $\vec{b}$. Υπόδειξη: Για το (δ), θεωρήστε την Εξ. 3-20 και το Σχ. 3-18.

•35 Δύο διανύσματα, $\vec{r}$ και $\vec{s}$, βρίσκονται στο επίπεδο xy . Τα μέτρα τους είναι 4.50 και 7.30 μονάδες μέτρησης, αντίστοιχα, και οι κατευθύνσεις τους είναι 320° και 85.0° , αντίστοιχα, μετρημένες δεξιόστροφα από τον θετικό άξονα x . Ποιες είναι οι τιμές των (α) $\vec{r} \cdot \vec{s}$ και (β) $\vec{r} \times \vec{s}$;

•36 Αν $\vec{d}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ και $\vec{d}_2 = -5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, τότε πόσο είναι το $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$;

•37 Τρία διανύσματα δίνονται από τις σχέσεις $\vec{a} = 3.0\hat{i} + 3.0\hat{j} - 2.0\hat{k}$, $\vec{b} = -1.0\hat{i} - 4.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$ και $\vec{c} = 2.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 1.0\hat{k}$. Να βρείτε τα (α) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, (β) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ και (γ) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.

••38 Για τα ακόλουθα τρία διανύσματα, πόσο είναι το $3\vec{c} \cdot (2\vec{a} \times \vec{b})$;

$$\vec{A} = 2.00\hat{i} + 3.00\hat{j} - 4.00\hat{k}$$

$$\vec{B} = -3.00\hat{i} + 4.00\hat{j} + 2.00\hat{k}$$

$$\vec{C} = -7.00\hat{i} + 8.00\hat{j}$$

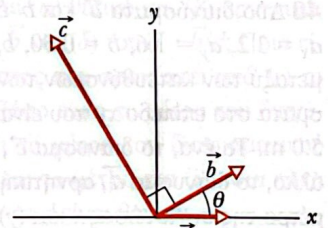
••39 Το διάνυσμα $\vec{A}$ έχει μέτρο 6.00 μονάδες μέτρησης, το διάνυσμα $\vec{B}$ έχει μέτρο 7.00 μονάδες και το $\vec{A} \cdot \vec{B}$ έχει τιμή 14.0. Πόση είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων $\vec{A}$ και $\vec{B}$;

••40 Η μετατόπιση $\vec{d}_1$ βρίσκεται στο επίπεδο yz σχηματίζοντας γωνία 63.0° με τη θετική κατεύθυνση του άξονα y , έχει θετική συνιστώσα z και μέτρο 4.50 m. Η μετατόπιση $\vec{d}_2$ βρίσκεται στο επίπεδο xz σχηματίζοντας γωνία 30.0° με τη θετική κατεύθυνση του άξονα x , έχει θετική συνιστώσα z και μέτρο 1.40 m. Πόσο είναι (α) το $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$, (β) το $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ και (γ) πόση είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{d}_1$ και $\vec{d}_2$;

••41 Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$ και το γεγονός ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ για να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων που δίνονται από τις σχέσεις $\vec{a} = 3.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ και $\vec{b} = 2.0\hat{i} + 1.0\hat{j} + 3.00\hat{k}$.

••42 Σε μια συνάντηση μίμων, ο μίμος 1 διανύει μετατόπιση $\vec{d}_1 = (4.0 \text{ m})\hat{i} + (5.0 \text{ m})\hat{j}$ ενώ ο μίμος 2 διανύει μια μετατόπιση $\vec{d}_2 = (-3.0 \text{ m})\hat{i} + (4.0 \text{ m})\hat{j}$. Πόσο είναι (α) το $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$, (β) το $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$, (γ) το $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot \vec{d}_2$ και (δ) το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{d}_1$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{d}_2$; Υπόδειξη: Για το (δ), βλ. την Εξ. 3-20 και Σχ. 3-20.

••43 Τα τρία διανύσματα του Σχ. 3-33 έχουν μέτρο $a = 3.00 \text{ m}$, $b = 4.00 \text{ m}$ και $c = 10.0 \text{ m}$ και γωνία $\theta = 30.0^\circ$. Πόση είναι (α) το μέτρο της συνιστώσας x και (β) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{a}$, (γ) το μέτρο της συνιστώσας x και (δ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{b}$ και (ε) η συνιστώσα x και (στ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{c}$; Αν $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, ποιες είναι οι τιμές των (ζ) p και (η) q ;



Σχ. 3-33 Πρόβλημα 43.

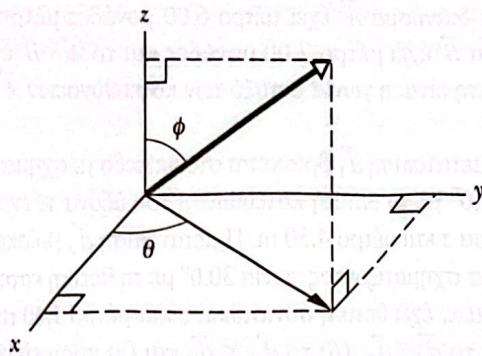
••44 Στο γινόμενο $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, θεωρήστε ότι $q = 2$,

$$\vec{v} = 2.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 6.0\hat{k} \quad \text{και} \quad \vec{B} = 4.0\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}.$$

Πόσο είναι τότε το $\vec{B}$ σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, αν $B_x = B_y$;

Συμπληρωματικά Προβλήματα

45 Τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ βρίσκονται στο επίπεδο xy . Το $\vec{A}$ έχει μέτρο 8.00 και γωνία 130° . Το $\vec{B}$ έχει μέτρο συνιστωσών $B_x = -7.22$ και $B_y = -9.20$. (α) Πόσο είναι το $5\vec{A} \cdot \vec{B}$; Πόσο είναι το $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (β) σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και (γ) σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας σε σφαιρικές συντεταγμένες (βλ. Σχ. 3-34); (δ) Πόση είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων του $\vec{A}$ και του $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (Υπόδειξη: Σκεφτείτε λίγο προτού καταφύγετε σε κάποιον υπολογισμό.) Πόσο είναι το $\vec{A} + 3.00\hat{k}$ (ε) σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και (στ) σε σημειογραφία μέτρου-γωνίας για σφαιρικές συντεταγμένες;



Σχήμα 3-34 Πρόβλημα 45.

46 Το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει μέτρο 5.0 m και κατευθύνεται ανατολικά. Το διάνυσμα $\vec{b}$ έχει μέτρο 4.0 m και κατευθύνεται 35° δυτικά της βορινής κατεύθυνσης. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{a} + \vec{b}$; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{a} - \vec{b}$; (ε) Να κάνετε το διανυσματικό διάγραμμα για κάθε περίπτωση.

47 Τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ βρίσκονται στο επίπεδο xy . Το $\vec{A}$ έχει μέτρο 8.00 και γωνία 130° . Το $\vec{B}$ έχει συνιστώσες με μέτρο $B_x = -7.72$ και $B_y = -9.20$. Ποια είναι η γωνία μεταξύ της αρνητικής κατεύθυνσης του άξονα y και (α) η κατεύθυνση του $\vec{A}$, (β) η κατεύθυνση του γινομένου $\vec{A} \times \vec{B}$ και (γ) η κατεύθυνση του $\vec{A} \times (\vec{B} + 3.00\hat{k})$;

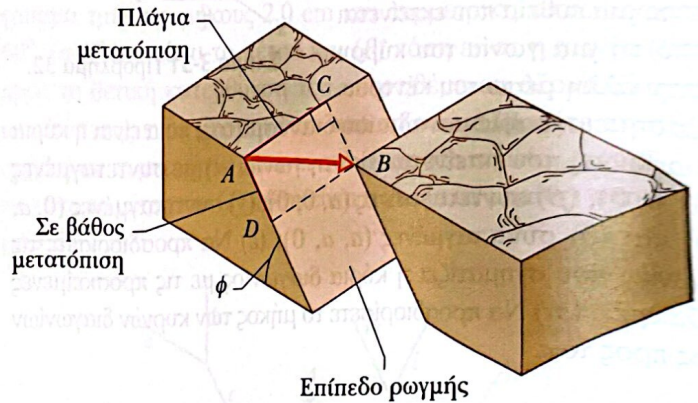
48 Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έχουν συνιστώσες, σε μέτρα, τις $a_x = 3.2$, $a_y = 1.6$, $b_x = 0.50$, $b_y = 4.5$. (α) Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Υπάρχουν δύο διανύσματα στο επίπεδο xy που είναι κάθετα στο $\vec{a}$ και έχουν μέτρο 5.0 m. Το ένα, το διάνυσμα $\vec{c}$, έχει θετική συνιστώσα x και το άλλο, το διάνυσμα $\vec{d}$, αρνητική συνιστώσα x . Πόσο είναι (β) το μέτρο της συνιστώσας x και (γ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{c}$, και (δ) το μέτρο της συνιστώσας x και (ε) το μέτρο της συνιστώσας y του διανύσματος $\vec{d}$;

49 Ένα ιστιοφόρο ξεκινά το ταξίδι του στη λίμνη Ήρι από την πλευρά των Η.Π.Α. προς την Καναδική μεριά, 90.0 km βόρεια. Ωστόσο, ο καπετάνιος κατωλίζει 50.0 km ανατολικά του σημείου εκκίνησης. (α) Πόσο μακριά και (β) προς ποια κατεύθυνση πρέπει να πλεύσει τώρα ο καπετάνιος για να φτάσει στον αρχικό του προορισμό;

50 Το διάνυσμα $\vec{d}_1$ βρίσκεται στην αρνητική κατεύθυνση του άξονα y και το διάνυσμα $\vec{d}_2$ βρίσκεται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Ποιες είναι οι κατευθύνσεις των (α) $\vec{d}_2/4$ και (β) $\vec{d}_1/(-4)$; Ποιες είναι οι τιμές των γινομένων (γ) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$ και (δ) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2/4)$; Ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος που προκύπτει από το (ε) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ και το (στ) $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$; Πόσο είναι το μέτρο του διανυσματικού γινομένου στο (ζ) ερώτημα (στ) και (θ) στο ερώτημα (στ); (ι) Πόσο είναι το μέτρο και (ια) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2/4)$;

51 Οι ραγμές των βράχων είναι θραύσεις κατά μήκος των οποίων οι απέναντι όψεις του βράχου ολισθαίνουν η μια πάνω στην άλλη. Στο Σχ. 3-35 τα σημεία A και B συνέπυταν πριν το μπροστινό τμήμα του βράχου ολισθήσει προς τα δεξιά. Η συνολική μετατόπιση $\vec{AB}$ είναι κατά μήκος του επιπέδου της ατέλειας. Η

οριζόντια συνιστώσα του $\vec{AB}$ είναι η AC . Η συνιστώσα του $\vec{AB}$ που κατευθύνεται προς τα κάτω στο επίπεδο της ραγμής είναι η AD . (α) Πόσο είναι το μέτρο της συνολικής μετατόπισης $\vec{AB}$ αν η οριζόντια συνιστώσα είναι 22.0 m και η κατακόρυφη συνιστώσα στο επίπεδο της ραγμής είναι 17.0 m; (β) Αν το επίπεδο της ραγμής είναι κεκλιμένο με γωνία $\phi = 52.0^\circ$ ως προς την οριζόντια κατεύθυνση, πόση είναι η κατακόρυφη συνιστώσα του $\vec{AB}$;



Σχήμα 3-35 Πρόβλημα 51.

52 Σας δίνονται τρεις μετατοπίσεις, όλες σε μέτρα: $\vec{d}_1 = 4.0\hat{i} + 5.0\hat{j} - 6.0\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -1.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ και $\vec{d}_3 = 4.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$. (α) Πόσο είναι το $r = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$; (β) Πόση είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{r}$ και του θετικού άξονα z ; (γ) Πόσο είναι το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{d}_1$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{d}_2$; (δ) Πόση είναι η συνιστώσα του $\vec{d}_1$ που είναι κάθετη κατεύθυνση του $\vec{d}_2$ και στο επίπεδο των $\vec{d}_1$ και $\vec{d}_2$; Υπόδειξη: Για το (γ), θεωρήστε την Εξ. 3-20 και το Σχ. 3-18, για το (δ) θεωρήστε την Εξ. 3-24.

53 Οι κατευθύνσεις του διανύσματος $\vec{a}$, μέτρου 10 μονάδων μέτρησης και του διανύσματος $\vec{b}$, μέτρου 6.0 μονάδων μέτρησης, διαφέρουν κατά 60.0° . Να βρείτε (α) το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων και (β) το μέτρο του διανυσματικού γινομένου $\vec{a} \times \vec{b}$.

54 Για τα διανύσματα του Σχ. 3-32, με $a = 4$, $b = 3$ και $c = 5$, να υπολογίσετε τα (α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (β) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ και (γ) $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

55 Ένα σωματίδιο εκτελεί τρεις διαδοχικές μετατοπίσεις σε κάποιο επίπεδο ως εξής: $\vec{d}_1$, 4.00 m νοτιοδυτικά, μετά $\vec{d}_2$, 5.00 m ανατολικά και τελικά $\vec{d}_3$, 6.00 m σε κατεύθυνση 60.0° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. Επιλέξτε σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα y να κατευθύνεται βόρεια και τον άξονα x να κατευθύνεται ανατολικά. Πόσο είναι (α) το μέτρο της συνιστώσας x και (β) η συνιστώσα y του $\vec{d}_1$; Πόση είναι (γ) το μέτρο της συνιστώσας x και (δ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{d}_2$; Πόσο είναι (ε) το μέτρο της συνιστώσας x και (στ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{d}_3$; Στη συνέχεια, θεωρήστε τη συνολική μετατόπιση του σωματιδίου για τις τρεις διαδοχικές μετατοπίσεις. Πόσο είναι (ζ) το μέτρο της συνιστώσας x , (η) το μέτρο της συνιστώσας y , (θ) το μέτρο και (ι) ποια είναι η κατεύθυνση της συνολικής μετατόπισης; Αν το σωματίδιο πρόκειται να επιστρέψει απευθείας στο σημείο εκκίνησης, (ια) πόσο μακριά και (ιβ) προς ποια κατεύθυνση θα πρέπει να κινηθεί;

56 Να βρείτε το άθροισμα των ακόλουθων τεσσάρων διανυσμάτων (α) σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος και σε σημειογραφία (β) μέτρου και (γ) γωνίας ως προς την κατεύθυνση $+x$.

$\vec{P}$: 10.0 m, σε κατεύθυνση 25.0° δεξιόστροφα της $+x$

$\vec{Q}$: 12.0 m, σε κατεύθυνση 10.0° δεξιόστροφα της $+y$

$\vec{R}$: 8.00 m, σε κατεύθυνση 20.0° αριστερόστροφα της $-y$

$\vec{S}$: 9.00 m, σε κατεύθυνση 40.0° δεξιόστροφα της $-y$

57 Αν προσθέσουμε το $\vec{B}$ στο $\vec{A}$, το αποτέλεσμα είναι $6.0\hat{i} + 1.0\hat{j}$. Αν αφαιρέσουμε το $\vec{B}$ από το $\vec{A}$ είναι $-4.0\hat{i} + 7.0\hat{j}$. Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{A}$;

58 Το διάνυσμα $\vec{d}$ έχει μέτρο 2.5 m και δείχνει προς το βορρά. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση του $4.0\vec{d}$; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση του $-3.0\vec{d}$;

59 Το $\vec{A}$ έχει μέτρο 12.0 m και σχηματίζει γωνία 60.0° δεξιόστροφα ως προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x του συστήματος συντεταγμένων xy . Επίσης, $\vec{B} = (12.00 \text{ m})\hat{i} + (8.00 \text{ m})\hat{j}$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Στρέφουμε τώρα το σύστημα δεξιόστροφα γύρω από την αρχή των αξόνων κατά 20.0° για να πάρουμε το σύστημα $x'y'$. Σε αυτό το νέο σύστημα, πόσο είναι (α) το A και (β) το B , και τα δύο σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος;

60 Αν $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$ και $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, πόσο είναι (α) το $\vec{a}$ και (β) το $\vec{b}$.

61 (α) Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, πόσο είναι το $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ αν $\vec{a} = 5.0\hat{i} + 4.0\hat{j} - 6.0\hat{k}$, $\vec{b} = -2.0\hat{i} + 2.0\hat{j} + 3.0\hat{k}$ και $\vec{c} = 4.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$; (β) Να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ του $\vec{c}$ και του θετικού άξονα z . (γ) Πόσο είναι το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{a}$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{b}$. (δ) Πόσο είναι το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{a}$ κάθετα στην κατεύθυνση του $\vec{b}$ αλλά στο επίπεδο του $\vec{a}$ και του $\vec{b}$. Υπόδειξη: Για το (γ), βλ. Εξ. 3-20 και Σχ. 3-18, για το (δ), βλ. Εξ. 3-24.

62 Ένας παίκτης του γκολφ εκτελεί τρία χτυπήματα για να βάλει τη μπάλα στην τρύπα. Το πρώτο χτύπημα στέλνει τη μπάλα 3.66 m βόρεια, το δεύτερο 1.83 m νοτιοανατολικά και το τρίτο 0.91 m νοτιοδυτικά. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση της μετατόπισης που απαιτείται για να μπει η μπάλα στην τρύπα με το πρώτο χτύπημα;

63 Εδώ δίνονται τρία διανύσματα σε μέτρα:

$$\vec{d}_1 = -3.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$$

$$\vec{d}_2 = -2.0\hat{i} - 4.0\hat{j} + 2.0\hat{k}$$

$$\vec{d}_3 = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j} + 1.0\hat{k}$$

Πόσο είναι το αποτέλεσμα των (α) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, (β) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ και (γ) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

64 Ένα δωμάτιο έχει διαστάσεις 3.00 m (ύψος) $\times$ 3.70 m $\times$

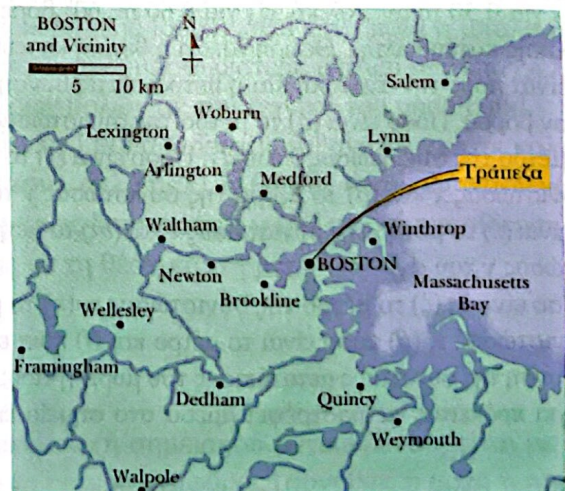
4.30 m. Μια μύγα που ξεκινάει από μια γωνία πετάει τριγύρω, καταλήγοντας στη διαγωνίως απέναντι γωνία. (α) Πόσο είναι το μέτρο της μετατόπισής της; (β) Μπορεί το μήκος της διαδρομής της να είναι μικρότερο από αυτό το μέτρο; (γ) Μεγαλύτερο; (δ) Ίσο; (ϵ) Επιλέξτε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και εκφράστε το μέτρο της συνιστώσας του διανύσματος της μετατόπισης σε αυτό το σύστημα σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος. (στ) Αν η μύγα περπατήσει, πόσο είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής; Υπόδειξη: Αυτό μπορεί να απαντηθεί χωρίς λογισμό. Το δωμάτιο είναι σαν ένα κουτί. Ξεδιπλώστε τα τοιχώματά του και απλώστε τα σε ένα επίπεδο.

65 Ένας διαδηλωτής κρατάει πλακάτ, ξεκινώντας από την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων xyz , με οριζόντιο το επίπεδο xy . Κινείται 40 m προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x , μετά 20 m κατά μήκος μιας κάθετης διαδρομής στα αριστερά του και στη συνέχεια σκαρφαλώνει 25 m πάνω σε μια δεξαμενή νερού. (α) Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, πόση είναι η μετατόπισή του από την αρχή μέχρι το τέλος; (β) Το πλακάτ που κουβαλάει πέφτει στη βάση της δεξαμενής. Πόσο είναι το μέτρο της μετατόπισης του πλακάτ από την αρχή μέχρι αυτό το νέο τελικό σημείο;

66 Θεωρήστε το $\vec{a}$ προς τη θετική κατεύθυνση x , το $\vec{b}$ προς τη θετική κατεύθυνση y και ένα βαθμωτό μέγεθος d . Ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{b}/d$ αν το d είναι (α) θετικό και (β) αρνητικό; Πόσο είναι το μέτρο (γ) του $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και (δ) του $\vec{a} \cdot \vec{b}/d$; Ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος που προκύπτει από (ϵ) το $\vec{a} \times \vec{b}$ και (στ) το $\vec{b} \times \vec{a}$; (ζ) Πόσο είναι το μέτρο του διανύσματος στο (ϵ); (η) Πόσο είναι το μέτρο του διανυσματικού γινομένου στο (στ); (θ) Πόσο είναι το μέτρο και (ι) ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{a} \times \vec{b}/d$, αν το d είναι θετικό;

67 Θεωρήστε ότι το $\hat{i}$ κατευθύνεται ανατολικά, το $\hat{j}$ βόρεια και το $\hat{k}$ προς τα πάνω. Ποιες είναι οι τιμές των γινομένων (α) $\hat{i} \cdot \hat{k}$, (β) $(-\hat{k}) \cdot (-\hat{j})$ και (γ) $\hat{j} \cdot (-\hat{j})$; Ποιες είναι οι κατευθύνσεις (για παράδειγμα ανατολικά ή κάτω) των γινομένων (δ) $\hat{k} \times \hat{j}$, (ϵ) $(-\hat{i}) \cdot (-\hat{j})$ και (στ) $(-\hat{k}) \times (-\hat{j})$;

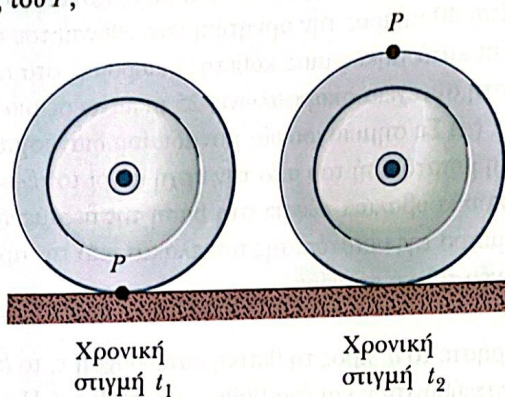
68 Στο κέντρο της Βοστώνης γίνεται ληστεία σε τράπεζα (βλ. το χάρτη στο Σχ. 3-36). Για να αποφύγουν την αστυνομία, οι



Σχήμα 3-36 Πρόβλημα 68.

ληστές διαφεύγουν με ελικόπτερο, κάνοντας τρεις διαδοχικές πτήσεις που περιγράφονται από τις ακόλουθες μετατοπίσεις: 32 km, 45° νότια της ανατολικής κατεύθυνσης· 53 km, 260 βόρεια της δυτικής κατεύθυνσης· 26 km, 18° ανατολικά της νότιας κατεύθυνσης. Στο τέλος της τρίτης πτήσης συλλαμβάνονται. Σε ποια πόλη συλλαμβάνονται;

69 Ρόδα ακτίνας 45.0 cm κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο (Σχ. 3-37). Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο P που βρίσκεται στο άκρο της ρόδας είναι το σημείο επαφής μεταξύ της ρόδας και του δαπέδου. Τη μελλοντική χρονική στιγμή t_2 η ρόδα έχει κυλήσει κατά μισή περιστροφή. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) πόση είναι η γωνία (ως προς το δάπεδο) της μετατόπισης του P ;



Σχήμα 3-37 Πρόβλημα 69.

70 Μια γυναίκα περπατά 250 m σε κατεύθυνση 30° ανατολικά της βορινής κατεύθυνσης και στη συνέχεια 175 m απευθείας ανατολικά. Να βρείτε (α) το μέτρο και (β) τη γωνία της τελικής της μετατόπισης από το σημείο εκκίνησης. (γ) Να βρείτε την απόσταση που διανύει. (δ) Ποιο είναι μεγαλύτερο, η απόσταση αυτή ή το μέτρο της μετατόπισής της;

71 Το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει μέτρο 3.0 m και κατεύθυνση προς το νότο. (α) Πόσο είναι το μέτρο και (β) ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $5.0 \vec{a}$; (γ) Πόσο είναι το μέτρο και (δ) ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $-2.0 \vec{a}$.

72 Ένα μυρμήγκι, ψάχνοντας για τροφή, εκτελεί τρεις μετατοπίσεις σε επίπεδο έδαφος: $\vec{d}_1$ για 0.40 m νοτιοδυτικά (δηλαδή 45° από τη νότια κατεύθυνση και 45° από τη δυτική κατεύθυνση), $\vec{d}_2$ για 0.50 m ανατολικά, $\vec{d}_3$ για 0.60 m, 60° βόρεια της ανατολικής κατεύθυνσης. Θεωρήστε ότι η θετική κατεύθυνση του x είναι προς την ανατολή και η θετική κατεύθυνση του y προς τον βορρά. Πόσο είναι (α) το μέτρο της συνιστώσας x και (β) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{d}_1$; Πόσο είναι (γ) το μέτρο της συνιστώσας x και (δ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{d}_2$; Πόσο είναι (ε) το μέτρο της συνιστώσας x και (στ) το μέτρο της συνιστώσας y του $\vec{d}_3$;

Πόσο είναι (ζ) το μέτρο της συνιστώσας x , (η) το μέτρο της συνιστώσας y , (θ) πόσο είναι το μέτρο και (ι) ποια είναι η κατεύθυνση της συνολικής μετατόπισης του μυρμηγκιού; Αν το μυρμήγκι πρόκειται να επιστρέψει άμεσα στο σημείο εκκίνησης, (ια) πόσο μακριά και (ιβ) προς ποια κατεύθυνση θα πρέπει να κινηθεί;

73 Δύο διανύσματα δίνονται από τις $\vec{a} = 3.0\hat{i} + 5.0\hat{j}$ και $\vec{b} = 2.0\hat{i} + 4.0\hat{j}$. Να βρείτε (α) $\vec{a} \times \vec{b}$, (β) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (γ) το $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ και (δ) το μέτρο της συνιστώσας του $\vec{a}$ κατά μήκος της κατεύθυνσης του $\vec{b}$.

74 Το διάνυσμα $\vec{a}$ βρίσκεται στο επίπεδο yz , 63.0° από τη θετική κατεύθυνση του άξονα y , έχει θετική συνιστώσα z και μέτρο 3.20 μονάδες μέτρησης. Το διάνυσμα $\vec{b}$ βρίσκεται στο επίπεδο xz , 48.0° από τη θετική κατεύθυνση του άξονα x , έχει θετική συνιστώσα z και μέτρο 1.40 μονάδες μέτρησης. Να βρείτε (α) το $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (β) το $\vec{a} \times \vec{b}$ και (γ) τη γωνία μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

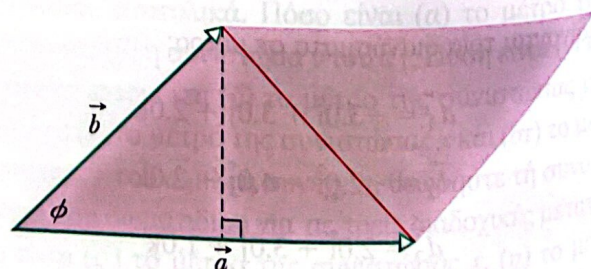
75 Να βρείτε (α) το «βόρεια εξωτερικό γινόμενο δυτικά», (β) το «κάτω εσωτερικό γινόμενο νότια», (γ) το «ανατολικά εξωτερικό γινόμενο πάνω», (δ) το «δυτικά εσωτερικό γινόμενο δυτικά» και (ε) το «νότια εξωτερικό γινόμενο νότια». Έστω ότι κάθε διάνυσμα έχει μέτρο μονάδα.

76 Το διάνυσμα $\vec{B}$, με μέτρο 8.0 m, προστίθεται στο διάνυσμα $\vec{A}$, το οποίο βρίσκεται στον άξονα x . Το άθροισμα αυτών των δύο διανυσμάτων είναι ένα τρίτο διάνυσμα που κείται στον άξονα y και έχει μέτρο που είναι δύο φορές το μέτρο του $\vec{A}$. Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{A}$;

77 Ένας άνθρωπος πηγαίνει για πεζοπορία ξεκινώντας από την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων x, y, z , με το επίπεδο xy οριζόντιο και τον άξονα x ανατολικά. Μεταφέροντας μια κάλπη δεκάρα, περπατάει 1300 m ανατολικά, 2200 m βόρεια και τότε ρίχνει τη δεκάρα από έναν γκρεμό ύψους 410 m. (α) Σε σημειογραφία μοναδιαίου διανύσματος, πόση είναι η μετατόπιση της δεκάρας από την αφετηρία μέχρι το σημείο όπου προσγειώνεται; (β) Όταν ο άνθρωπος επιστρέψει στην αρχή, πόσο είναι το μέτρο της δικής του μετατόπισης για το ταξίδι της επιστροφής;

78 Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$, αν $a = 3.90$, $b = 2.70$ και η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων είναι 63.0°;

79 Στο Σχ. 3-38 το μέτρο του $\vec{a}$ είναι 4.3, το μέτρο του $\vec{b}$ είναι 5.4 και $\phi = 46^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται μεταξύ των δύο διανυσμάτων και της λεπτής διαγωνίου ευθείας.



Σχήμα 3-38 Πρόβλημα 79.