

Κεφάλαιο 23

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου.

Ο νόμος του Gauss βασίζεται στο γεγονός ότι η ηλεκτρική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ σημειακών φορτίων ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

Μας διευκολύνει στον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου κατανομών φορτίου με υψηλό βαθμό συμμετρίας.

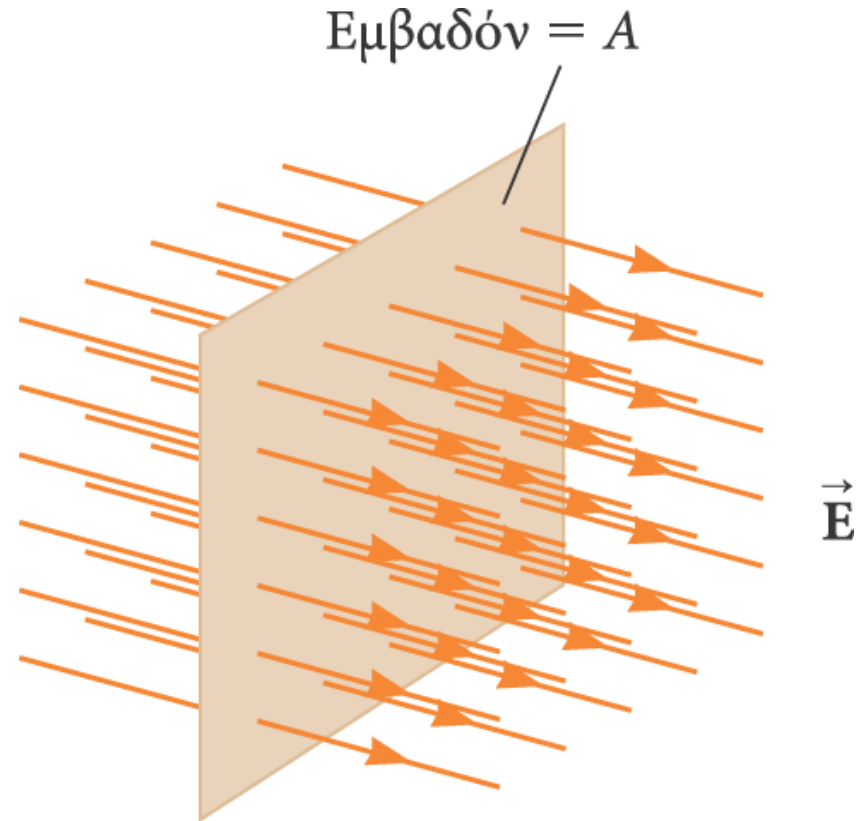
Ο νόμος του Gauss είναι σημαντικός στην κατανόηση και την επαλήθευση των ιδιοτήτων των αγωγών που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Ηλεκτρική ροή **επίπεδης** επιφάνειας κάθετης σε **ομογενές** ηλεκτρικό πεδίο

Η **ηλεκτρική ροή** ορίζεται ως το γινόμενο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου επί το εμβαδόν A της επιφάνειας που είναι κάθετη στις γραμμές του πεδίου.

$$\Phi_E = EA$$

Μονάδες: $\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$



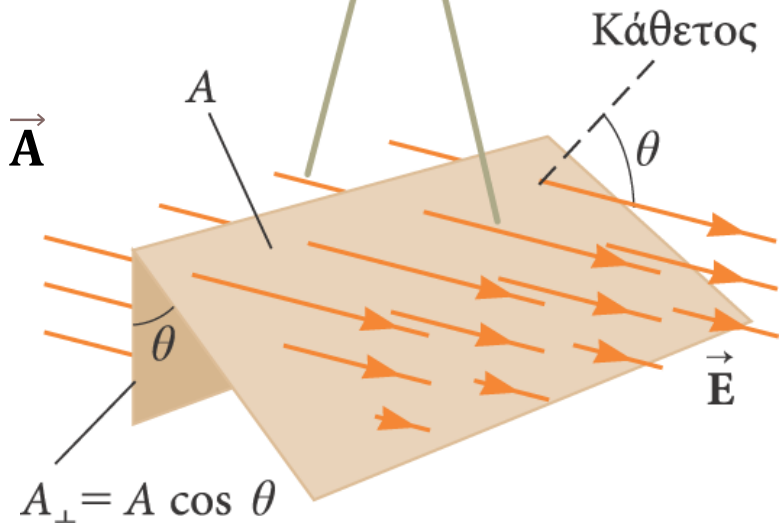
Ηλεκτρική ροή επίπεδης επιφάνειας υπό γωνία σε **ομογενές** ηλεκτρικό πεδίο

Η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν την επιφάνεια.

Οι γραμμές του πεδίου μπορεί να σχηματίζουν γωνία θ με την κάθετο στην επιφάνεια.

Σε αυτή την περίπτωση, $\Phi_E = EA \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$

Το πλήθος των γραμμών του πεδίου που διαπερνούν την επιφάνεια $A_{\perp}$ είναι ίδιο με εκείνο των γραμμών του πεδίου που διαπερνούν την επιφάνεια A .



Ηλεκτρική ροή – Κατανόηση της εξίσωσης

Η ηλεκτρική ροή έχει μέγιστη τιμή όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο.

- $\theta = 0^\circ$

Η ηλεκτρική ροή έχει μηδενική τιμή όταν η επιφάνεια είναι παράλληλη στο πεδίο.

- $\theta = 90^\circ$

Αν το πεδίο δεν έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τότε η σχέση $\Phi = EA \cos \theta$ ισχύει μόνο για μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔA .

Ηλεκτρική ροή – Γενικά

Στην πιο γενική περίπτωση, εξετάζουμε ένα στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας.

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Η σχέση αυτή γράφεται

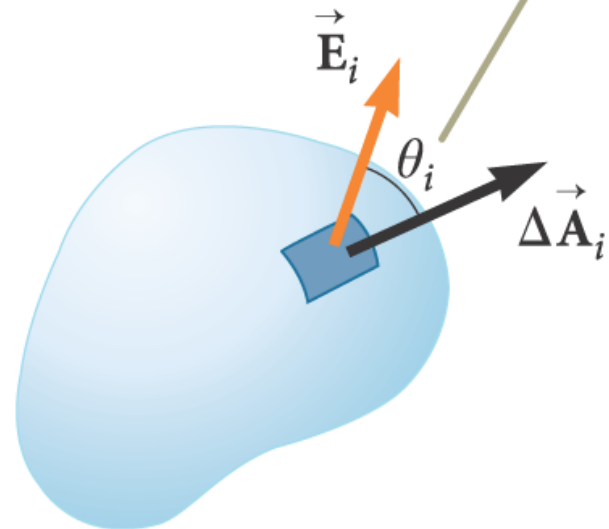
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i$$

$$\Phi_E = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα, δηλαδή πρέπει να υπολογιστεί σε ολόκληρη την υπό εξέταση επιφάνεια.

Γενικά, η τιμή της ηλεκτρικής ροής εξαρτάται τόσο από τη μορφή του πεδίου όσο και από την επιφάνεια.

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$, το οποίο είναι εξ ορισμού κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια.

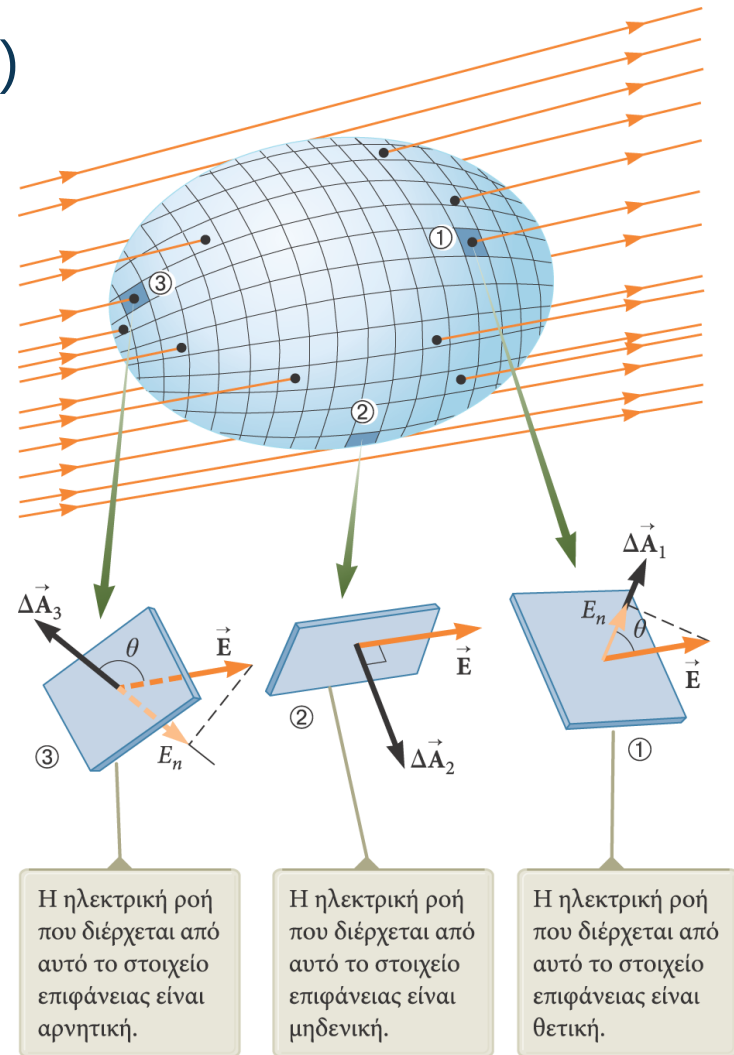


Ηλεκτρική ροή – Κλειστή επιφάνεια (1)

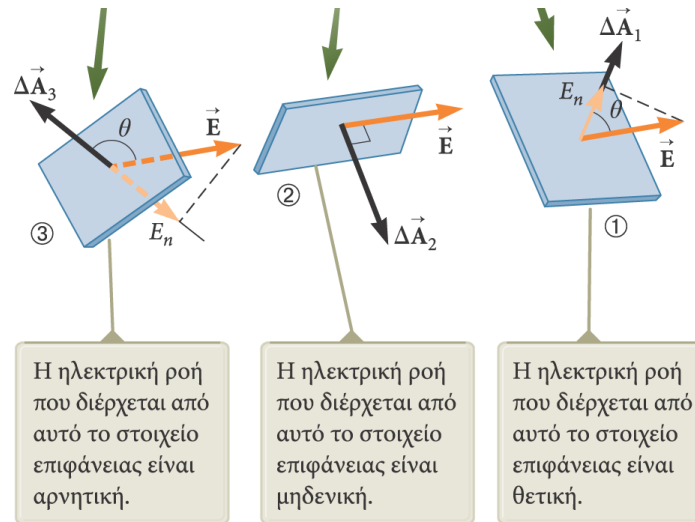
Θεωρούμε μια κλειστή επιφάνεια.

Τα διανύσματα $\Delta\vec{A}_i$ δείχνουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις.

- Σε κάθε σημείο, είναι κάθετα στην επιφάνεια.
- Λόγω σύμβασης, δείχνουν προς τα έξω.



Ηλεκτρική ροή – Κλειστή επιφάνεια (2)



Στο στοιχείο (1), οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εσωτερικό προς το εξωτερικό. $\theta < 90^\circ$ και η ροή Φ είναι θετική.

Στο στοιχείο (2), οι γραμμές του πεδίου εφάπτονται στην επιφάνεια. $\theta = 90^\circ$ και η ροή $\Phi = 0$.

Στο στοιχείο (3), οι γραμμές του πεδίου διαπερνούν την επιφάνεια από το εξωτερικό προς το εσωτερικό. $180^\circ > \theta > 90^\circ$ και η ροή Φ είναι αρνητική.

Ηλεκτρική ροή – Κλειστή επιφάνεια (3)

Η **συνολική ηλεκτρική ροή** που διέρχεται από την επιφάνεια είναι ανάλογη του συνολικού πλήθους των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια.

- Ο συνολικός αριθμός των γραμμών ισούται με τη διαφορά του πλήθους των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον το πλήθος των γραμμών που εισέρχονται σε αυτήν.

Αν E_n είναι η συνιστώσα του πεδίου η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια, τότε

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E_n dA$$

- Η ολοκλήρωση γίνεται επί της κλειστής επιφάνειας.

Ροή που διέρχεται από κύβο – Παράδειγμα

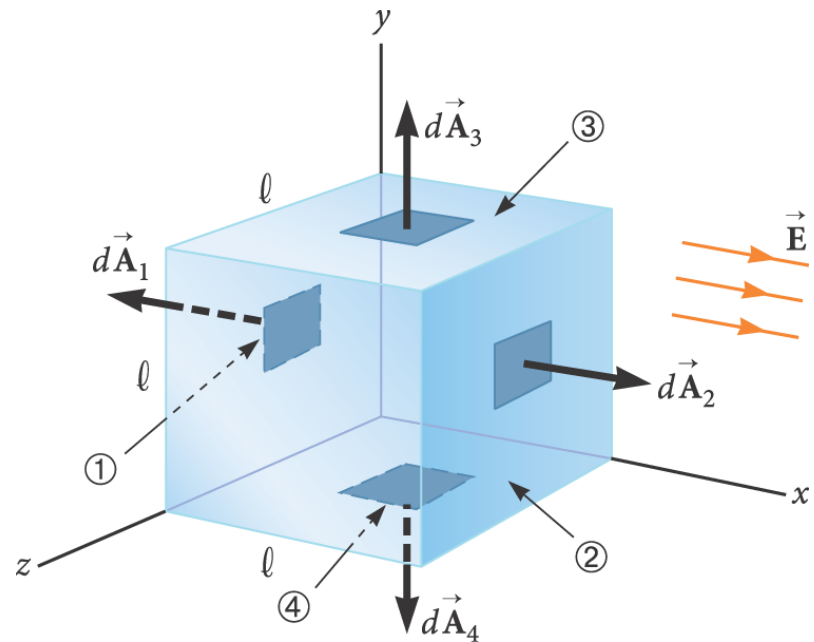
Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου διέρχονται κάθετα από δύο έδρες του κύβου και είναι παράλληλες στις άλλες τέσσερις.

Για την έδρα 1, $\Phi = -E\ell^2$

Για την έδρα 2, $\Phi = E\ell^2$

Για τις υπόλοιπες έδρες, $\Phi = 0$

Επομένως, $\Phi_{\text{συν.}} = 0$



Karl Friedrich Gauss

1777–1855

Συνεισέφερε στους παρακάτω τομείς:

- Ηλεκτρομαγνητισμό
- Θεωρία αριθμών
- Στατιστική
- Μη ευκλείδεια γεωμετρία
- Μηχανική των τροχιών των κομητών
- Ήταν ένας από τους ιδρυτές της Γερμανικής Ένωσης Μαγνητισμού.
 - Η Γ.Ε.Μ. μελετά το μαγνητικό πεδίο της Γης.



Ο νόμος του Gauss – Εισαγωγή

Ο νόμος του Gauss εκφράζει τη γενική σχέση μεταξύ της συνολικής ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που αυτή περιέχει.

- Η κλειστή επιφάνεια συχνά λέγεται και *επιφάνεια Gauss*.

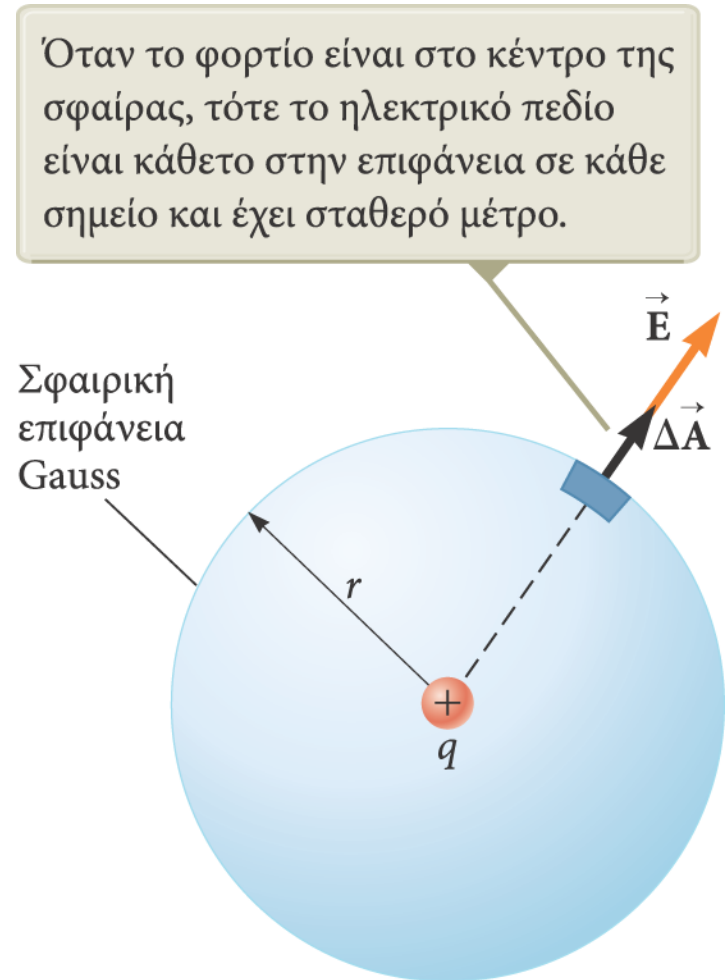
Ο νόμος του Gauss έχει θεμελιώδη σημασία στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων.

Ο νόμος του Gauss – Γενικά (1)

Στο κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα r βρίσκεται ένα θετικό σημειακό φορτίο q .

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας είναι:

$$E = k_e q / r^2$$



Ο νόμος του Gauss – Γενικά (2)

Οι γραμμές του πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω και είναι κάθετες σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oiint dA$$

Αυτή είναι η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss – στην προκειμένη περίπτωση, τη σφαίρα με ακτίνα r .

Γνωρίζουμε ότι $E = k_e q / r^2$ και $A_{\text{σφαίρας}} = 4\pi r^2$

$$\Phi_E = 4\pi k_e q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ο νόμος του Gauss – Γενικά (3)

Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια γύρω από ένα σημειακό φορτίο q δίνεται από τον λόγο q/ϵ_0 και δεν εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας αυτής.

Η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια η οποία δεν περικλείει φορτίο είναι ίση με μηδέν.

Αφού το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από πολλά φορτία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί κάθε φορτίο ξεχωριστά, η ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

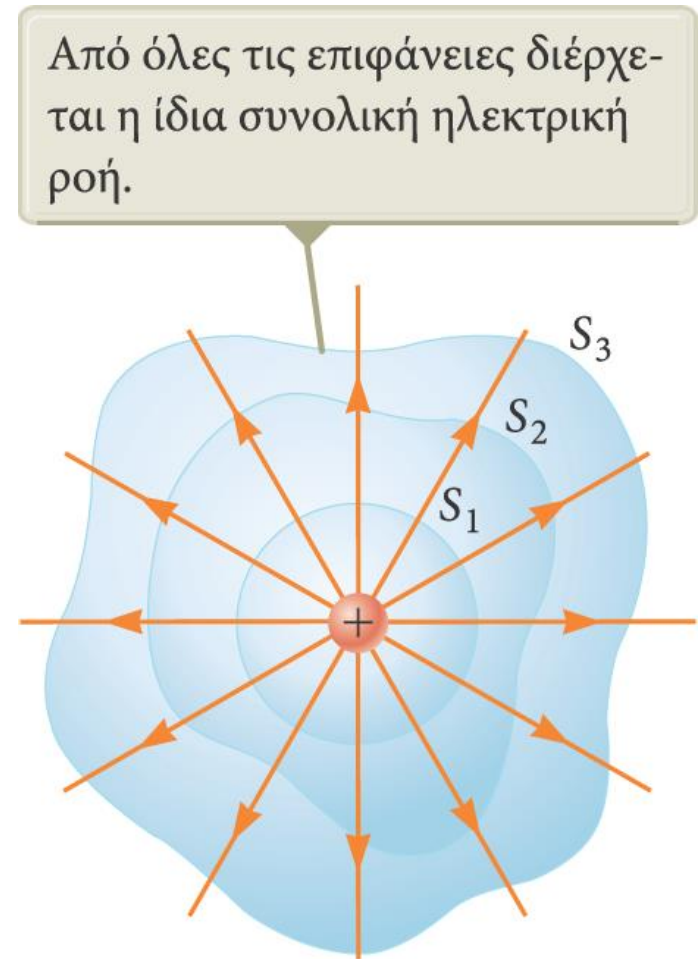
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \dots) \cdot d\vec{A}$$

Επιφάνεια Gauss – Παράδειγμα

Το φορτίο μπορεί να περιβάλλεται από κλειστές επιφάνειες διαφόρων σχημάτων.

- Μόνο η επιφάνεια S_1 είναι σφαιρική.

Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, η οποία περιβάλλει ένα σημειακό φορτίο q , δίνεται από τον λόγο q/ϵ_0 και δεν εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας.

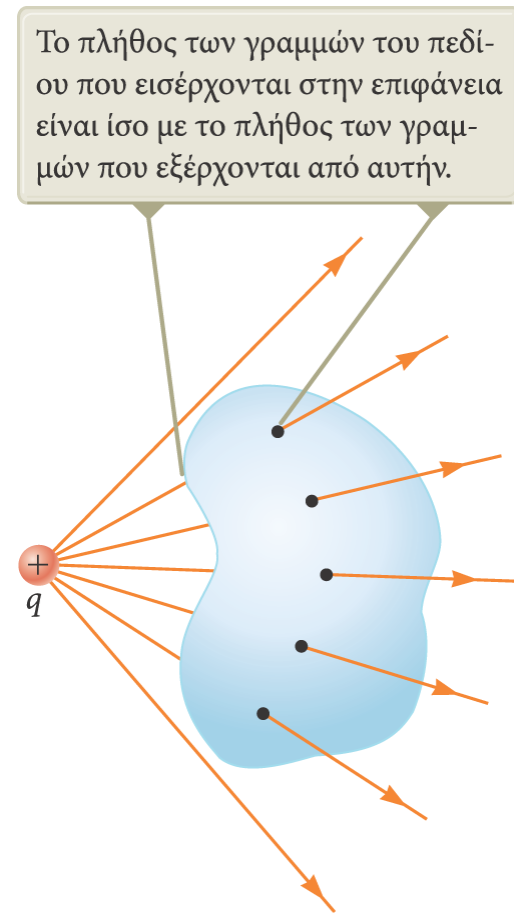


Επιφάνεια Gauss – Παράδειγμα 2

Το φορτίο βρίσκεται *εκτός* της κλειστής επιφάνειας τυχαίου σχήματος.

Κάθε γραμμή του πεδίου η οποία εισέρχεται στην επιφάνεια εξέρχεται από κάποιο άλλο σημείο της επιφάνειας.

Έτσι επιβεβαιώνεται ότι **η συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια, η οποία δεν περιβάλλει φορτίο, είναι ίση με μηδέν.**



Ο νόμος του Gauss (τελική διαφάνεια)

Η μαθηματική μορφή του νόμου του Gauss είναι:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$

- Όπου $q_{\text{εντός}}$ είναι το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας.

Το $\vec{E}$ παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας.

- $\vec{E}$ είναι το *συνολικό ηλεκτρικό πεδίο* και μπορεί να περιλαμβάνει συνεισφορές από φορτία που βρίσκονται τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό της επιφάνειας.

Αν και, θεωρητικά, μπορούμε να λύσουμε τη σχέση του νόμου του Gauss ως προς $\vec{E}$ για οποιαδήποτε διάταξη φορτίων, στην πράξη χρησιμοποιείται μόνο σε περιπτώσεις όπου υπάρχει συμμετρία.

Εφαρμογή του νόμου του Gauss

Για να χρησιμοποιήσετε τον νόμο του Gauss, επιλέξτε μια επιφάνεια Gauss η οποία επιτρέπει την απλούστευση του επιφανειακού ολοκληρώματος και τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου.

Εκμεταλλευτείτε τη συμμετρία!

Υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια Gauss είναι μια επιφάνεια που επιλέγουμε, η οποία δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με μια πραγματική επιφάνεια.

Συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η επιφάνεια Gauss

Προσπαθήστε να επιλέξετε μια επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί μία ή περισσότερες από τις παρακάτω συνθήκες:

- Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, λόγω συμμετρίας, σε ολόκληρη την επιφάνεια.
- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ μπορεί να εφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο $E dA$, επειδή τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα.
- Το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με 0, επειδή τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν στο συγκεκριμένο τμήμα επιφάνειας.

Αν η κατανομή φορτίου δεν έχει επαρκή συμμετρία, ώστε να μπορεί να βρεθεί επιφάνεια Gauss η οποία θα ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, τότε ο νόμος του Gauss θα μας φανεί χρήσιμος στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου της συγκεκριμένης κατανομής.

Ηλεκτρικό πεδίο σε σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου (1)

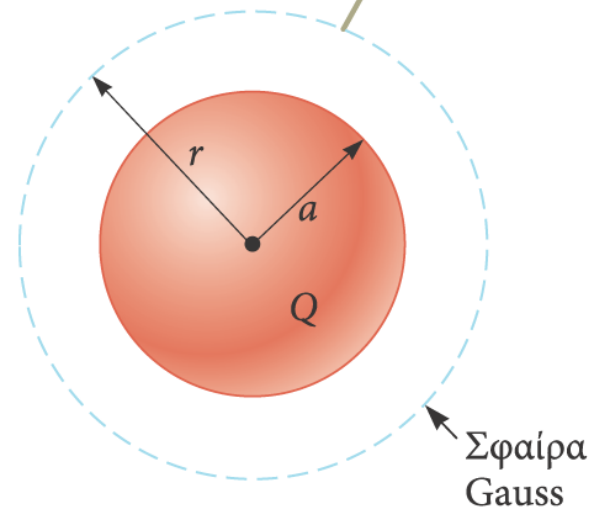
Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα.

Για $r > a$

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E dA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

Για σημεία έξω από τη σφαίρα, σχεδιάζουμε μια μεγάλη σφαιρική επιφάνεια Gauss, ομόκεντρη με τη σφαίρα.



Ηλεκτρικό πεδίο σε σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου(2)

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα, με $r < a$.

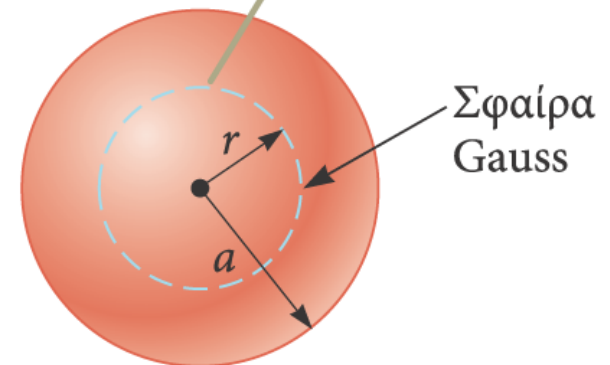
$$q_{\text{εντός}} < Q$$

$$q_{\text{εντός}} = \rho (4/3\pi r^3)$$

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E dA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{\text{εντός}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

Για σημεία μέσα στη σφαίρα, σχεδιάζουμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss, μικρότερη από τη σφαίρα.

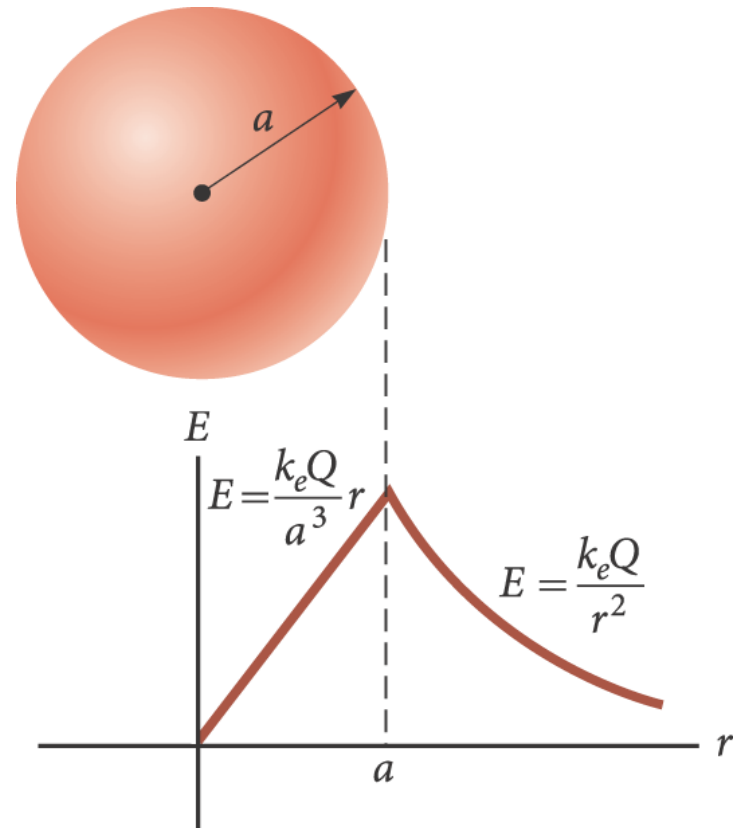


Ηλεκτρικό πεδίο σε σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου (3)

Στο εσωτερικό της σφαίρας, το E μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει του r .

- Καθώς η ακτίνα $r \rightarrow 0$, το πεδίο $E \rightarrow 0$.

Το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας είναι το ίδιο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας.



Το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από φορτισμένο ευθύγραμμο αγωγό

Επιλέγουμε μια κυλινδρική κατανομή φορτίου.

- Ο κύλινδρος έχει ακτίνα r και μήκος ℓ .

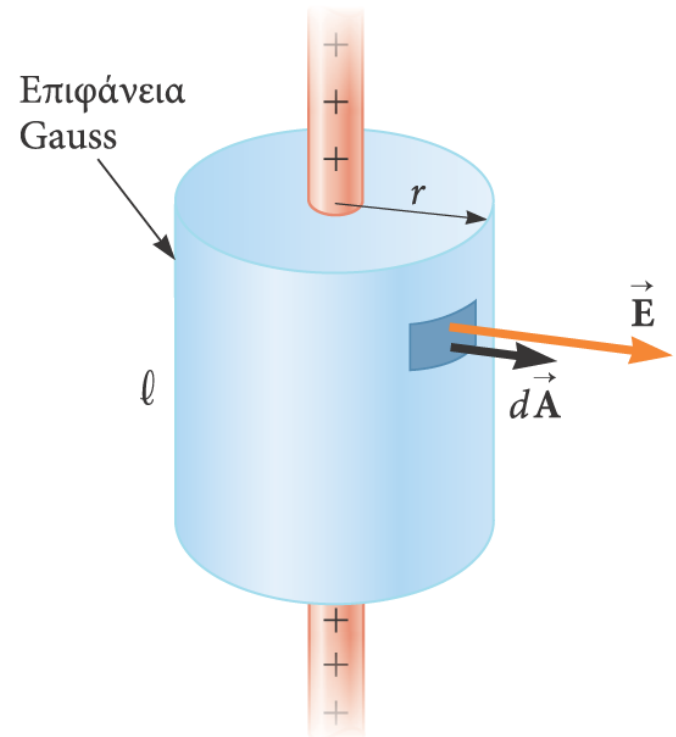
Στο καμπύλο τμήμα της επιφάνειας, το πεδίο $\vec{E}$ έχει σταθερό μέτρο και είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της.

Υπολογίζουμε το πεδίο χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

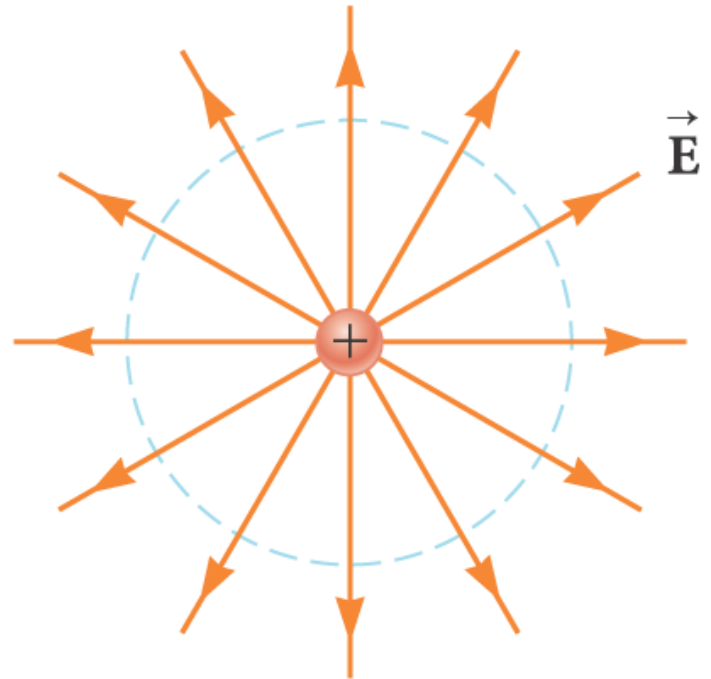
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$



Το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από φορτισμένο ευθύγραμμο αγωγό (συνέχεια)

Η όψη από τη βάση του κύλινδρου δείχνει ότι το πεδίο είναι κάθετο στην καμπύλη επιφάνεια.

Η ροή που διέρχεται από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι μηδενική, καθώς το πεδίο είναι παράλληλο με αυτές τις επιφάνειες.



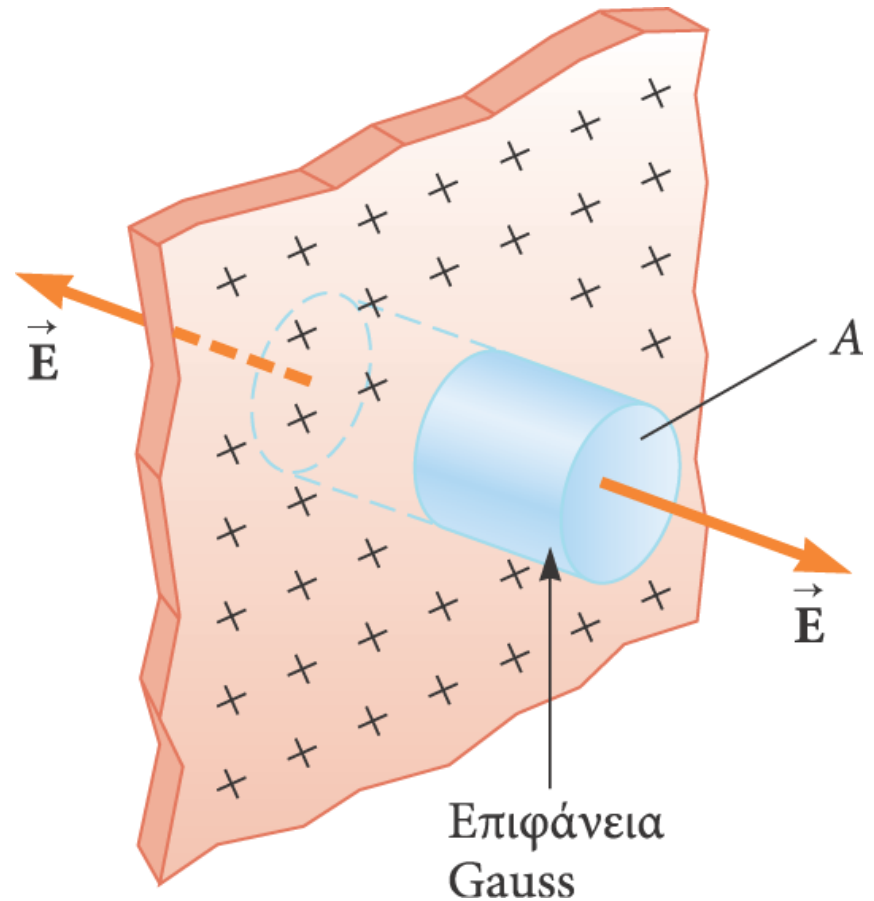
Ηλεκτρικό πεδίο σε μη αγώγιμο, λεπτό, άπειρο φύλλο

Το πεδίο $\vec{E}$ είναι κάθετο στο επίπεδο και να έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία που ισαπέχουν από το επίπεδο.

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν μικρό κύλινδρο με άξονα κάθετο στο φορτισμένο επίπεδο.

Επειδή το πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο στην καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου, το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας δεν λαμβάνεται υπόψη στο επιφανειακό ολοκλήρωμα.

Η ροή που διέρχεται από κάθε βάση του κυλίνδρου είναι EA οπότε η συνολική ροή είναι $2EA$.



Ηλεκτρικό πεδίο σε μη αγωγίμο, λεπτό, άπειρο φύλλο (συνέχεια)

Το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια είναι σA .

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss:

$$\Phi_E = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \text{ και } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Παρατηρήστε ότι το πεδίο δεν εξαρτάται από την ακτίνα r .

Άρα το πεδίο είναι παντού ομογενές.

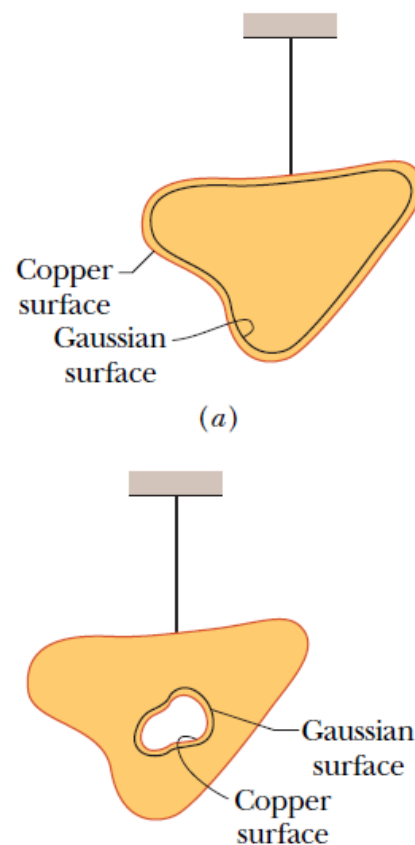
Η τελευταία εξίσωση ισχύει ικανοποιητικά και για πεπερασμένων διαστάσεων φύλλο μακριά από τα σύνορα όμως.

Ιδιότητες φορτισμένου μονωμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Όταν δεν υπάρχει κίνηση φορτίου σε έναν αγωγό, τότε λέμε ότι ο αγωγός είναι σε **ηλεκτροστατική ισορροπία**.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού (αν δεν ήταν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια θα κινούνταν παραβιάζοντας την ισορροπία).

- Ισχύει είτε ο αγωγός είναι κοίλος είτε συμπαγής.



Ιδιότητα 1: Πεδίο_{εντός} = 0

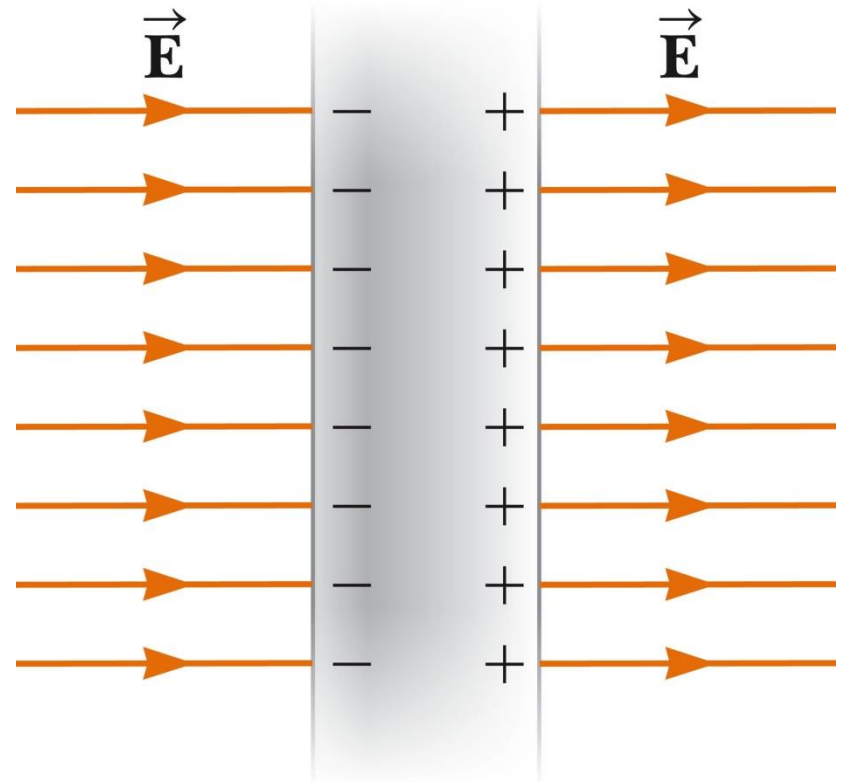
Θεωρούμε μια αγώγιμη πλάκα σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

Αν το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού ήταν μη μηδενικό, τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού θα δέχονταν μια ηλεκτρική δύναμη.

Τα ηλεκτρόνια αυτά θα επιταχύνονταν.

Τα ηλεκτρόνια δεν θα βρίσκονταν σε ισορροπία.

Επομένως, στο εσωτερικό του αγωγού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο.



Ιδιότητα 1: $\text{Πεδίο}_{\text{εντός}} = 0$ (συνέχεια)

Πριν από την εφαρμογή του εξωτερικού πεδίου, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι κατανομημένα ομοιόμορφα σε ολόκληρο τον αγωγό.

Όταν εφαρμοστεί το εξωτερικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ανακατανέμονται μέχρι το μέτρο του εσωτερικού πεδίου να είναι ίσο με το μέτρο του εξωτερικού πεδίου.

Στο εσωτερικό του αγωγού, το συνολικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν.

Η ανακατανομή γίνεται μέσα σε 10^{-16} s και μπορεί να θεωρηθεί ακαριαία.

Αν ο αγωγός είναι κοίλος, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι επίσης ίσο με μηδέν.

- Είτε θεωρήσουμε σημεία επάνω στον αγωγό είτε σημεία της κοιλότητας εντός του αγωγού.

Ιδιότητα 2: Το πλεονάζον φορτίο σε μονωμένο αγωγό συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του αγωγού

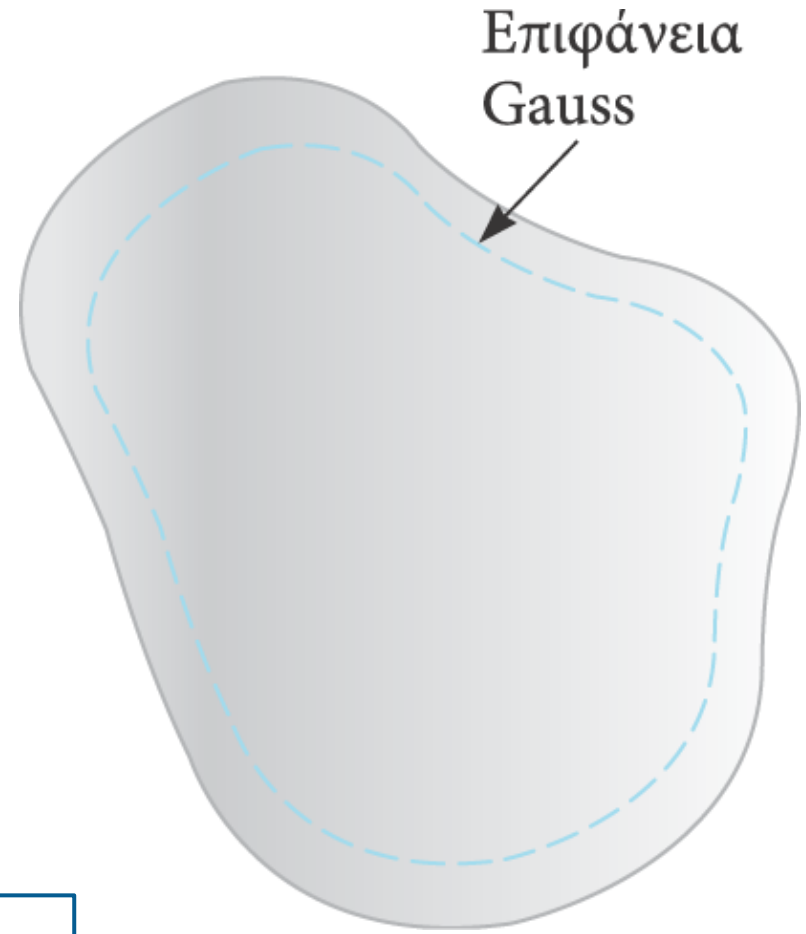
Επιλέγουμε μια επιφάνεια Gauss που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού, αλλά κοντά στην πραγματική επιφάνεια.

Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι ίσο με μηδέν (ιδιότητα 1).

Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με μηδέν.

Εφόσον μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια Gauss βρίσκεται όσοδήποτε κοντά στην πραγματική επιφάνεια, συνεπάγεται ότι στο εσωτερικό της επιφάνειας δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο.

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$



Ιδιότητα 2: Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού (συνέχεια)

Εφόσον λοιπόν δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας, το όποιο συνολικό φορτίο φέρει ο αγωγός πρέπει να βρίσκεται **επάνω** στην επιφάνειά του.

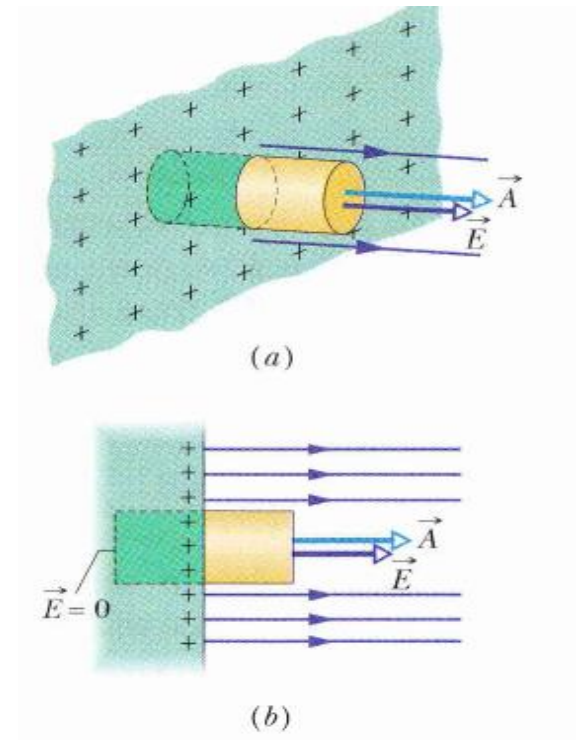
Ο νόμος του Gauss δεν επισημαίνει πώς κατανέμεται αυτό το φορτίο, αλλά μόνο ότι πρέπει να βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού.

Ιδιότητα 3: Το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου που δημιουργεί επιφάνεια μονωμένου αγωγού με πλεονάζων φορτίο

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο.

Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια.

- Αν το $\vec{E}$ είχε παράλληλη συνιστώσα, τότε τα φορτία θα δέχονταν μια δύναμη, θα επιταχύνονταν επί της επιφάνειας και, επομένως, δεν θα βρίσκονταν σε ισορροπία.



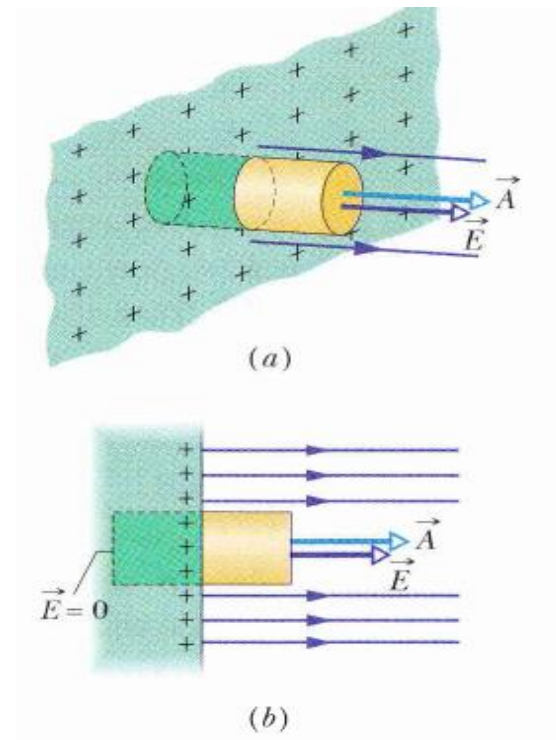
Ιδιότητα 3: Το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου (συνέχεια)

Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με εκείνη που διέρχεται μόνο από την επίπεδη βάση που βρίσκεται εκτός του αγωγού.

□ Το πεδίο σε αυτό το σημείο είναι κάθετο στην επιφάνεια.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

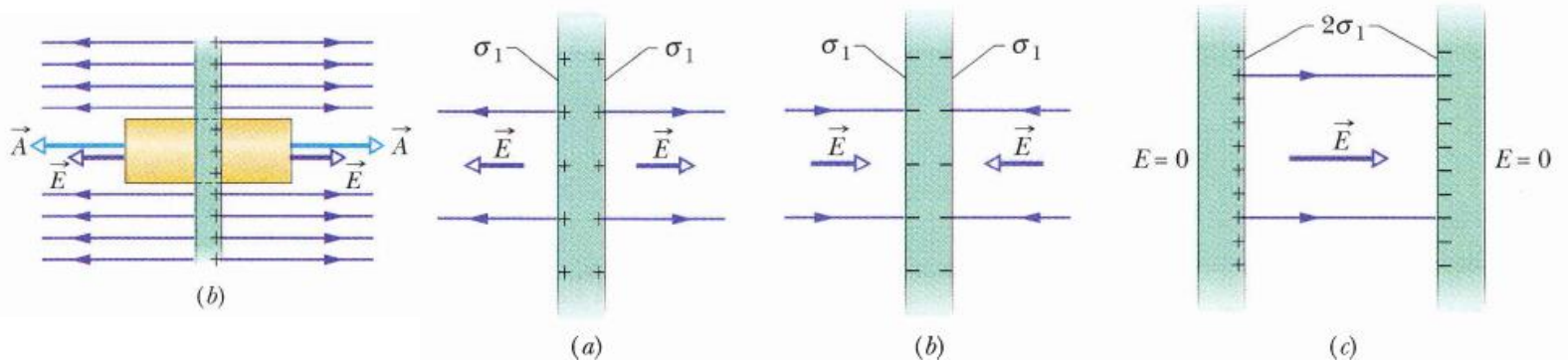
$$\Phi_E = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \text{ και } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο αγωγίμων φορτισμένων πλακών

Δύο αγωγίμες πλάκες με πλεονάζων ηλεκτρικό φορτίο, στην περιοχή ανάμεσά τους, δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης:

$$E = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}$$



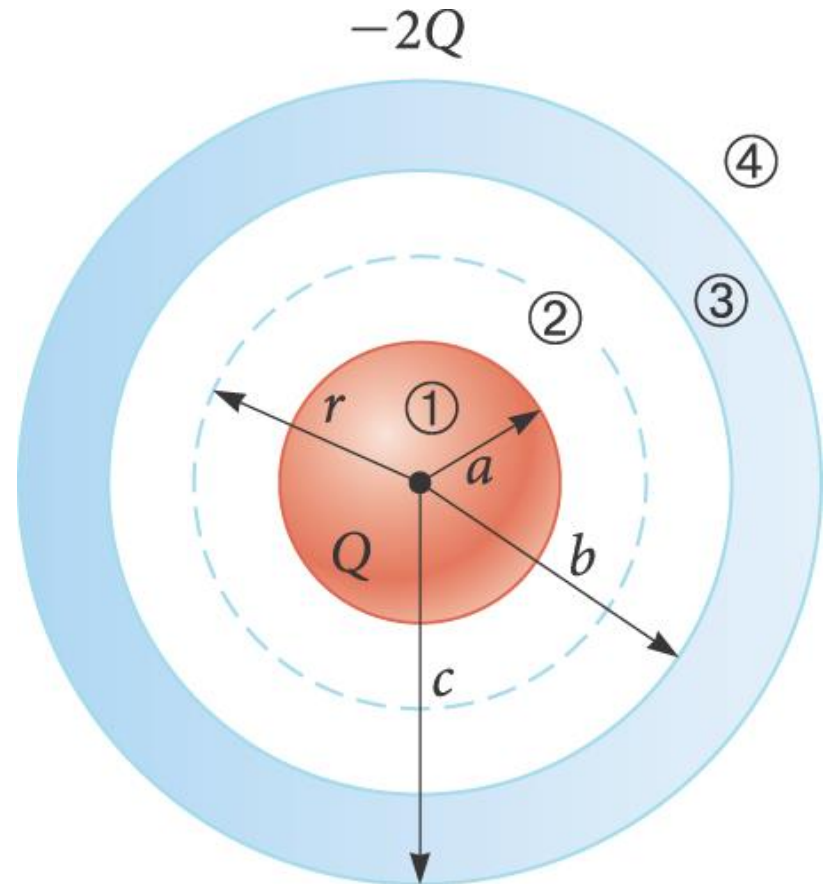
Σφαίρα και σφαιρικό κέλυφος – Παράδειγμα (1)

Μοντελοποίηση

- Αυτό το παράδειγμα είναι παρόμοιο με εκείνο της σφαίρας.
- Σε αυτή την περίπτωση, μια φορτισμένη σφαίρα περιβάλλεται από ένα κέλυφος.
- Προσέξτε τα φορτία.

Κατηγοριοποίηση

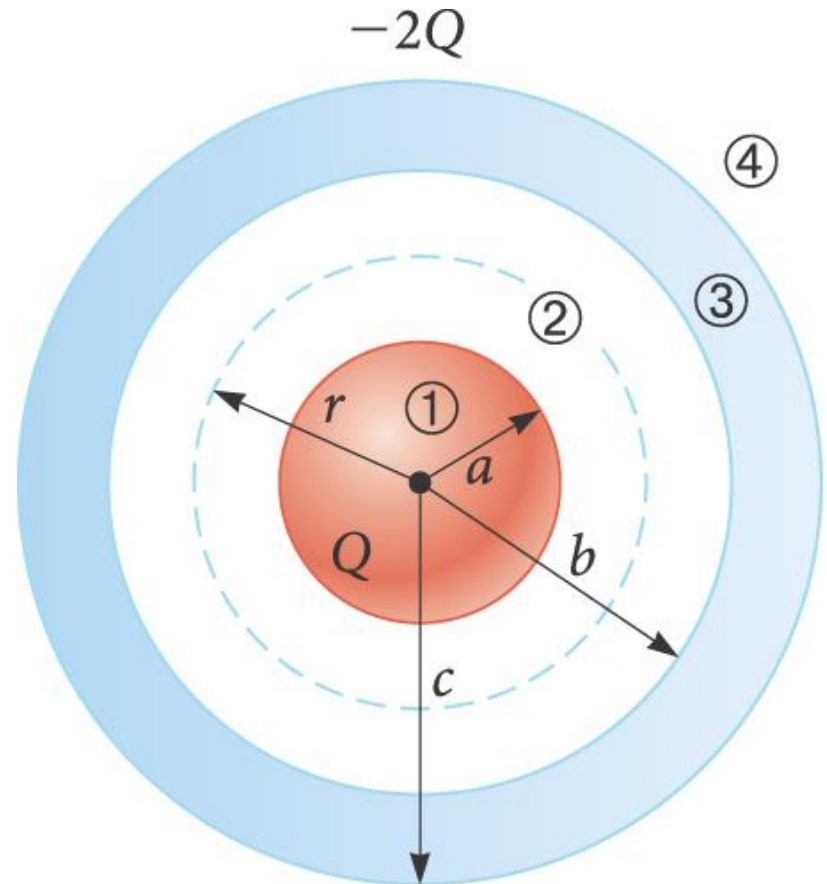
- Το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία.
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.



Σφαίρα και σφαιρικό κέλυφος – Παράδειγμα (2)

Ανάλυση

- Σχεδιάστε μια σφαίρα Gauss μεταξύ της επιφάνειας της συμπαγούς σφαίρας και της εσωτερικής επιφάνειας του κελύφους.
 - Περιοχή 2
 - $a < r < b$
 - Το φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας είναι $+Q$.
- Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω και το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό μέτρο επάνω στην επιφάνεια Gauss.



Σφαίρα και σφαιρικό κέλυφος – Παράδειγμα (3)

Ανάλυση (συνέχεια)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε περιοχή.

$$E_1 = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{για } r < a)$$

$$E_2 = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } a < r < b)$$

$$E_3 = 0 \quad (\text{για } b < r < c)$$

$$E_4 = -k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{για } r > c)$$

Σφαίρα και σφαιρικό κέλυφος – Παράδειγμα (4)

Ολοκλήρωση

- Ελέγξτε το συνολικό φορτίο.
- Σκεφτείτε άλλους πιθανούς συνδυασμούς.
 - Τι θα συνέβαινε αν η σφαίρα ήταν αγωγίμη αντί για μονωτική;

Εξετάστε τις πέντε καταστάσεις που παρουσιάζονται παρακάτω. Κάθε μια περιέχει είτε φορτίο q είτε φορτίο $2q$. Σε κάθε περίπτωση, μια επιφάνεια Gauss περιβάλλει το φορτισμένο σωματίδιο. Ποια από τις παρακάτω συγκριτικές προτάσεις είναι σωστή όσον αφορά την ηλεκτρική ροή μέσω καθεμιάς από τις επιφάνειες του Gauss;

a) $\Phi_2 = \Phi_4 > \Phi_1 = \Phi_3$

b) $\Phi_1 = \Phi_3 > \Phi_2 = \Phi_4$

c) $\Phi_2 > \Phi_1 > \Phi_4 > \Phi_3$

d) $\Phi_3 = \Phi_4 > \Phi_2 = \Phi_1$

e) $\Phi_4 > \Phi_3 > \Phi_2 > \Phi_1$

