

Κινηματική υλικού σημείου

Ευθύγραμμη κίνηση

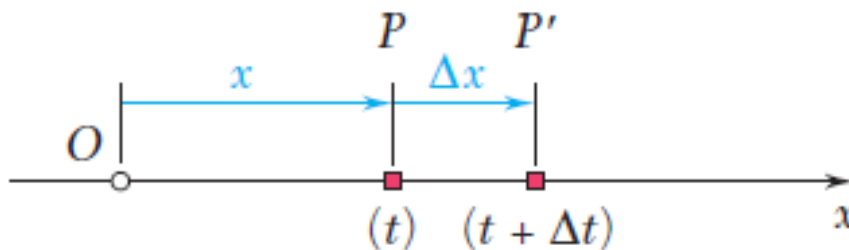
Ως υλικό σημείο νοείται είτε ένα σημειακό αντικείμενο (πχ στοιχειώδες σωματίδιο) ή ένα αντικείμενο που κινείται σαν σωματίδιο δηλαδή το κάθε σημείο του κινείται με τον ίδιο τρόπο

Θέση x : η απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

Μετατόπιση Δx : η μετακίνηση από θέση x_1 σε θέση x_2

Μέση ταχύτητα: $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/s) Στιγμιαία ταχύτητα: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ (m/s)

Μέση επιτάχυνση: $a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/s²) Στιγμιαία επιτάχυνση: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ (m/s²)



- Με απλή αντικατάσταση προκύπτει:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Ενώ με απλούς κανόνες παραγώγισης:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

- Χαρακτηριστικό της η σταθερή ταχύτητα: $\frac{dx}{dt} = v = \text{const.}$
- Η θέση στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προκύπτει εύκολα χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας ως εξής:

$$dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt \Rightarrow x - x_0 = vt \Rightarrow x = x_0 + vt$$

Προσοχή: Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν η ταχύτητα παραμένει σταθερή

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

- Χαρακτηριστικό της η σταθερή επιτάχυνση: $\frac{dv}{dt} = a = \text{const.}$
- Η ταχύτητα προκύπτει εύκολα χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας ως εξής:

$$dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow v = v_0 + at$$

- Η θέση προκύπτει αν στην τελευταία αντικαταστήσουμε όπου $v = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow dx = (v_0 + at) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

- Σε περιπτώσεις που ο χρόνος δεν ενδιαφέρει και αναζητείται η σύνδεση ταχύτητας-θέσης τότε:

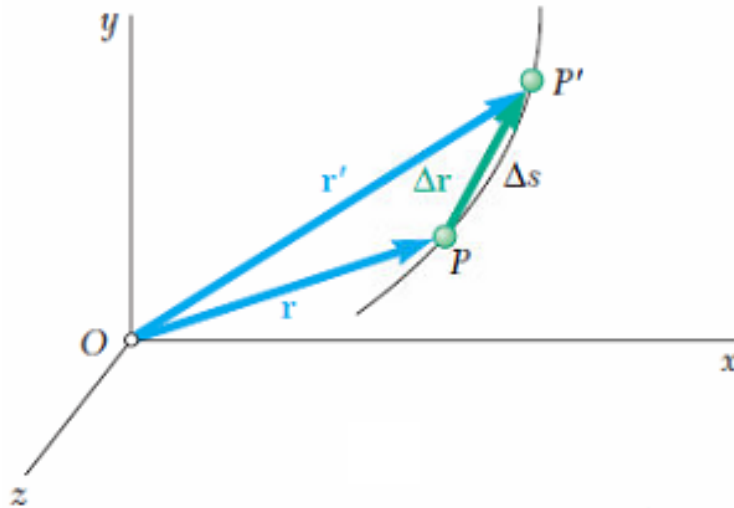
$$a = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow v dv = a dx \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Σημαντικό: ο εξ'αρχής προσδιορισμός του συστήματος συντεταγμένων

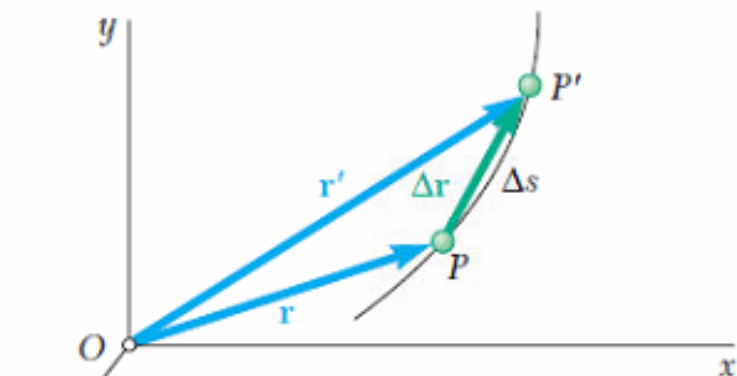
Θέση και μετατόπιση

Η θέση ενός σώματος περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}$

Η μετατόπιση του σώματος ορίζεται ως η **μεταβολή της θέσης του** $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$



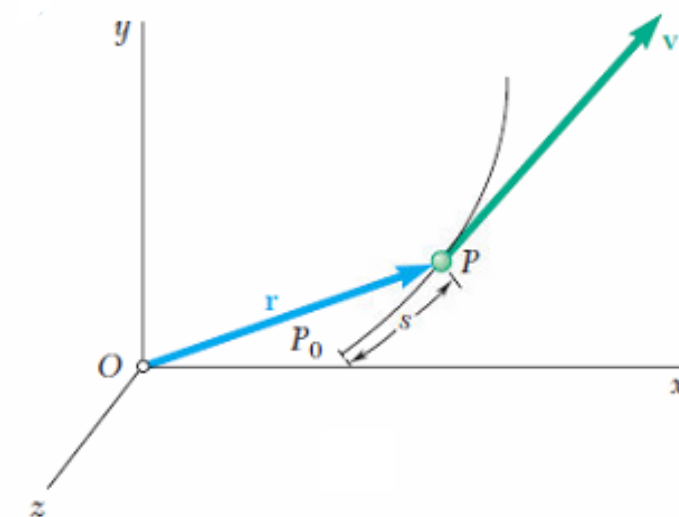
Καμπυλόγραμμη κίνηση υλικού σημείου



Καθώς το $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ τείνει στο 0 τα P και P' πλησιάζουν, συνεπώς το διάνυσμα $\Delta \vec{r}$ στο όριο θα είναι παράλληλο στην τροχιά

Στιγμαία ταχύτητα:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς ενός σωματιδίου έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο της τροχιάς και φορά ίδια με αυτή της κίνησης.

Με μέτρο:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

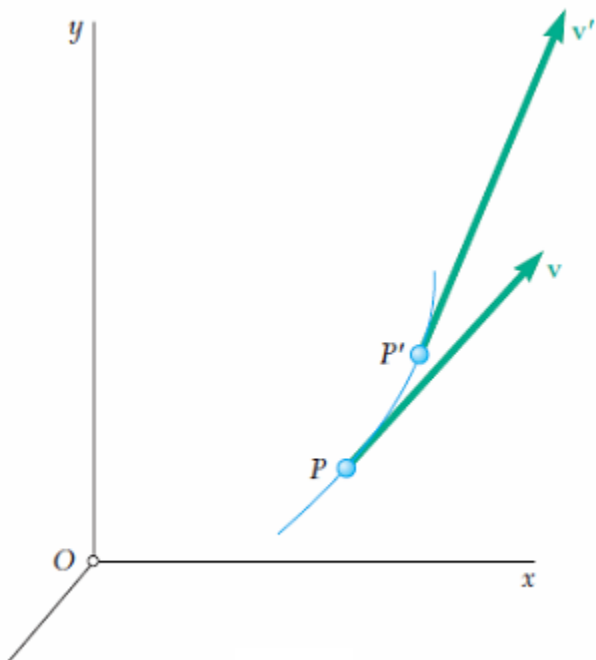
Μέση ταχύτητα

Η μέση ταχύτητα είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση.

$$\vec{v}_{\text{μέση}} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης.

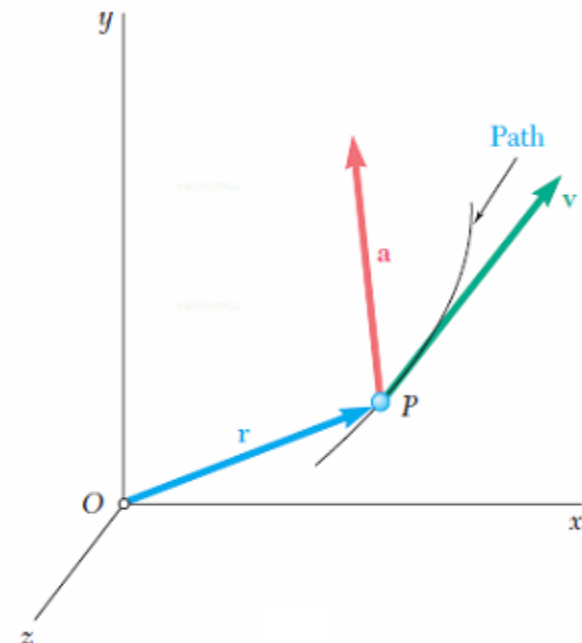
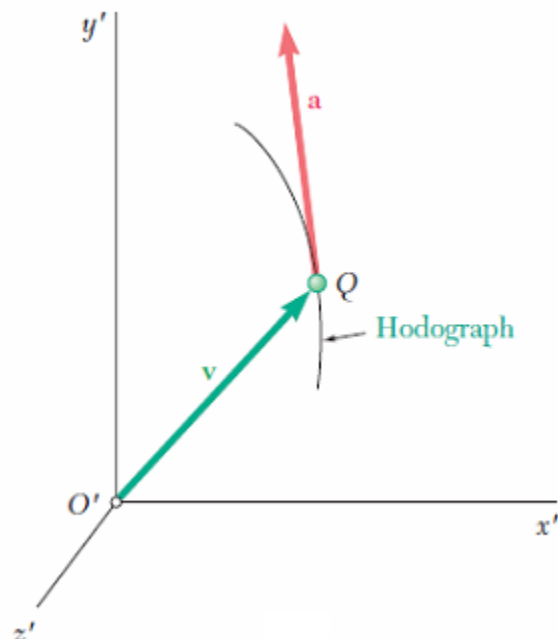
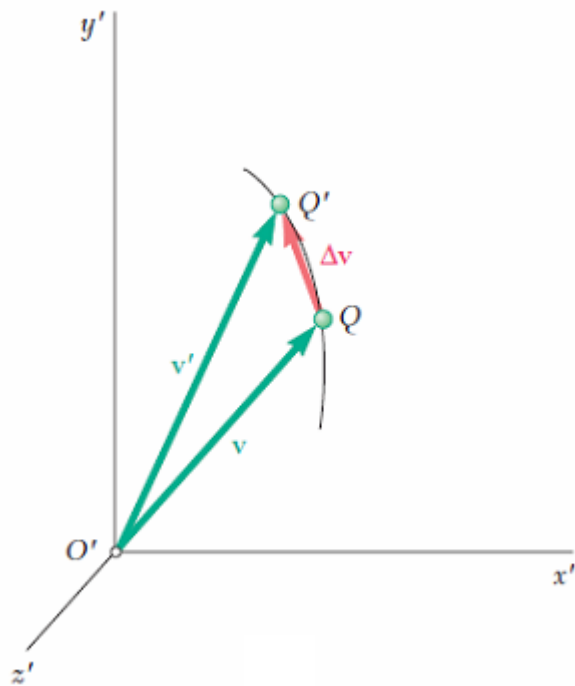
Η μέση ταχύτητα μεταξύ σημείων είναι *ανεξάρτητη από τη διαδρομή* που ακολουθείται.



Αντίστοιχα για την επιτάχυνση

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$



Μέση επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή αυτή.

$$\vec{a}_{\text{μέση}} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

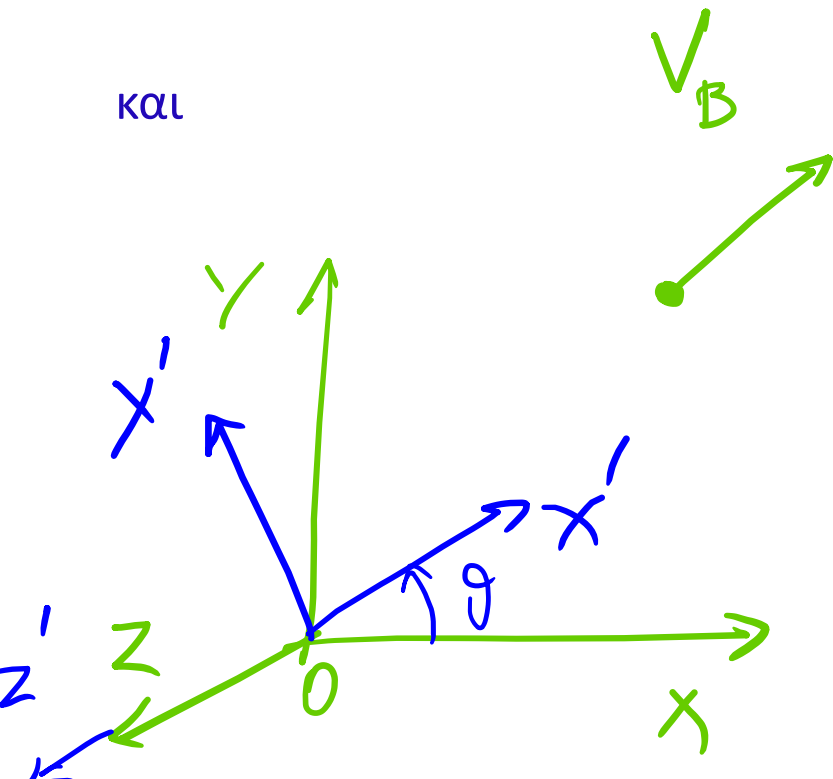
Συνιστώσες ταχύτητας-επιτάχυνσης σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Αν $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ τότε:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

και

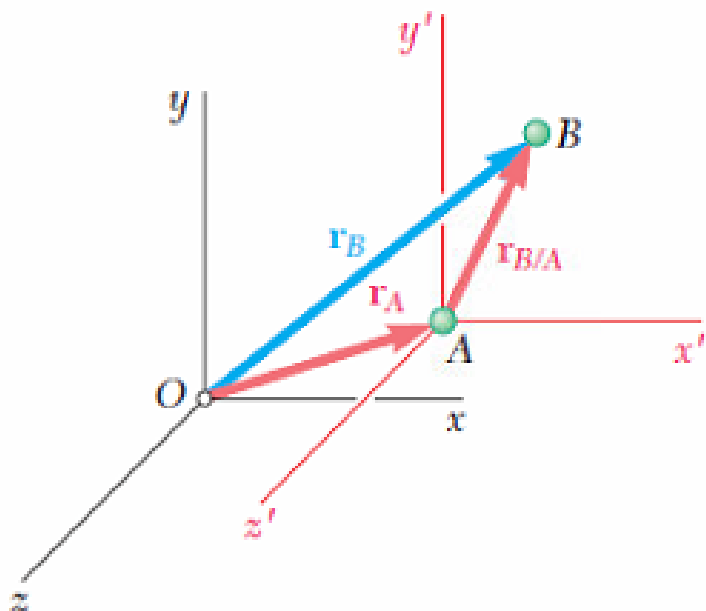
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



Εξισώσεις της κινηματικής για την κίνηση σε δύο διαστάσεις

- Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή στην κίνηση σε δύο διαστάσεις, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση με μια σειρά εξισώσεων.
- Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κινηματικής σε μία διάσταση.
- Η κίνηση σε δύο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δύο ανεξάρτητες κινήσεις σε καθεμία από τις δύο κάθετες διευθύνσεις που συνδέονται με τους άξονες x και y .
- Οποιαδήποτε επίδραση στη διεύθυνση του άξονα y δεν επηρεάζει την κίνηση στη διεύθυνση του άξονα x .

Σχετική κίνηση ως προς κινούμενο σύστημα συντεταγμένων



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

παραγωγίζοντας



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

παραγωγίζοντας

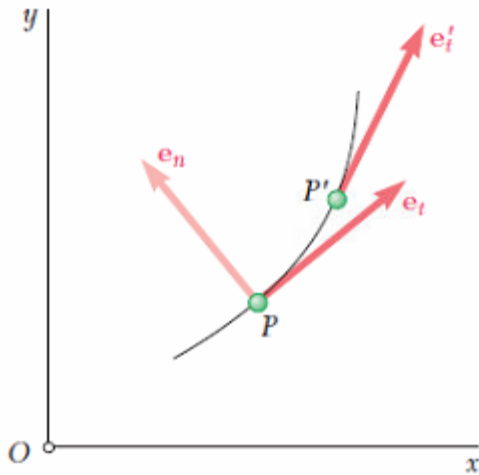


$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Ταχύτητα και επιτάχυνση σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων

Πολλές φορές είναι βολική η χρήση και η έκφραση της ταχύτητας ή/και της επιτάχυνσης στο λεγόμενο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Αυτό σε μια εν γένει καμπυλόγραμμη τροχιά ορίζεται από την εφαπτομενική διεύθυνση και την κεντρομόλο διεύθυνση.

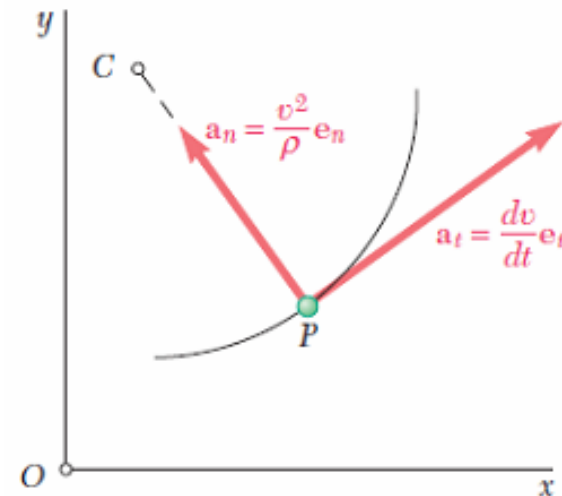


Η ταχύτητα εκφράζεται ως:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e}_t$$

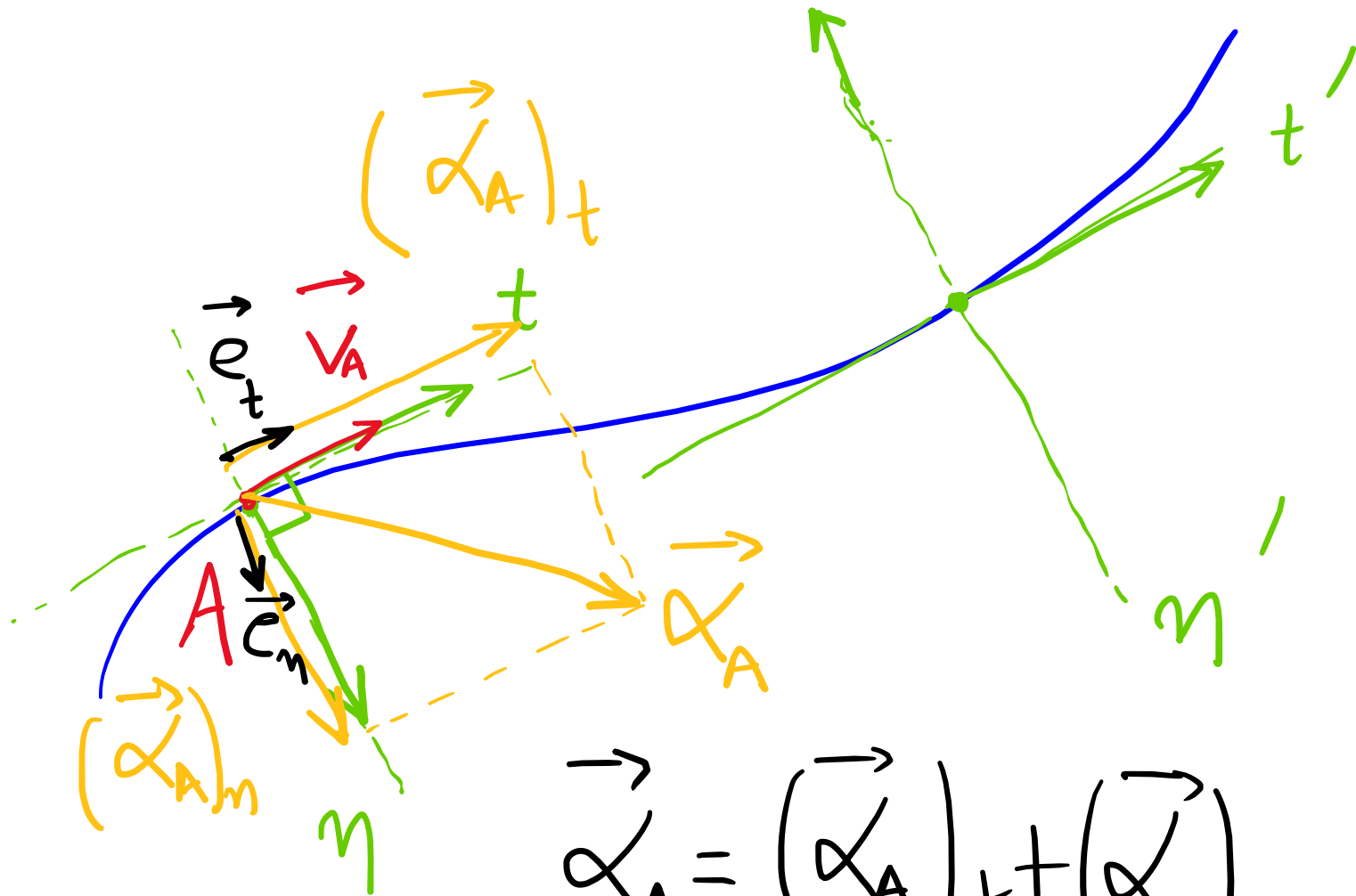
Ενώ για την επιτάχυνση αποδεικνύεται ότι:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} \vec{e}_n$$



t : tangent
 η : normal

$$|\vec{e}_t| = |\vec{e}_\eta| = 1$$



$$\vec{\alpha}_A = (\vec{\alpha}_A)_t + (\vec{\alpha}_A)_\eta$$