1. Να βρείτε το πλήρες διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\,2^{n}}$$

Λύση

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{\cancel{n}}}{(n+1)\,2^{n+1}}}{\dfrac{x^{\cancel{n-1}}}{n\,2^{n}}}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\;n\;2^{\cancel{n}}}{n+1\;\;2^{\cancel{n+1}}}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| < 1$$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2.$$

για $x = 2$ έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\cancel{n-1}}}{2^{\cancel{n}}\cdot n} = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}$ αποκλίνει

για $x = -2$ έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^{n}\,n} = \sum\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{\cancel{n-1}}}{2^{\cancel{n}}\,n}$

$$= \frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ συγκλίνει}$$

άρα το πλήρες διάστημα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς είναι $-2 \le x < 2$.

2. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση της τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n-2}{n^3-3n}$.

Λύση ορίζουμε τη σειρά $\sum 1/n$ όπου $b_n = 1/n$. γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum 1/n$ αποκλίνει. Επίσης, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3n^2+n-2}{n^3-3n}}{1/n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-2n}{n^3-3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(3+1/n-2/n^2\right)}{\cancel{n^3}\left(1-3/n^2\right)}=3$$

άρα σύγκλιση με το κριτήριο της οριακής σύγκρισης. οι δύο σειρές ταυτόχρονα αποκλίνουν, αφού γνωρίζουμε ότι η $\Sigma\, 1/n$ αποκλίνει.

3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx .$$

Λυση.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^4 x \, dx =$$

$$\int \sin x \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x \, dx =$$

$$\int \sin x \cos^4 x \, dx - \int \sin x \cos^6 x \, dx =$$

$$-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+c$$

4. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y^2=4x+2\ln y$ από το 1 έως το 2.

Λύση.

$$2yy' = 4 + 2\,y'/y \Rightarrow y'\left(y-1/y\right)=2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2}{\frac{y^2-1}{y}} \Rightarrow y' = \frac{2y}{y^2-1} \quad (*)$$

άρα $(y')^2 = \dfrac{4y^2}{(y^2-1)^2}$. και $1+(y')^2 = \dfrac{(y^2-1)^2+4y^2}{(y^2-1)^2}$

$$= \frac{y^4+1-2y^2+4y^2}{(y^2-1)^2}$$

$$= \frac{(y^2+1)^2}{(y^2-1)^2}.$$

Άρα το μήκος της καμπύλης θα ισούται με

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{(y^2-1)^2}}\,dx = \int_1^2 \frac{y^2+1}{y^2-1}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{y^2+1}{\frac{2y}{y'}}\,dx = \int_1^2 \frac{y'(y^2+1)}{2y}\,dx. =$$

από τη σχέση $(*)$ έχω ότι $y^2-1 = \dfrac{2y}{y'}$

$$\int_1^2 \frac{y'y^2}{2y}\,dx + \int_1^2 \frac{y'}{2y}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln y\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y(2)^2}{2} - \frac{y(1)}{2} + \ln y(2) - \ln y(1)\right)$$

Από την αρχική μας σχέση έχουμε.

για $x=1$ $\quad y(1)^2 = 4 + 2\ln y(1)$

και για $x=2$ $\quad y(2)^2 = 8 + 2\ln y(2)$

άρα τελικά.

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{8+2\ln y(2) - 4 - 2\ln y(1)}{2} + \ln y(2) - \ln y(1) \right)$$

$$= 1 + \ln y(2) - \ln y(1).$$

5. Να βρεθούν όλες οι τιμές των $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^{n-1} (n-1)!}{6^n (n+2)!}$ συγκλίνει.

Λύση.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{2^{n+1}(x-2)^{n}(n)!}{6^{n+1}(n+3)!}}{\dfrac{2^{n}(x-2)^{n-1}(n-1)!}{6^{n}(n+2)!}} \right| < 1$$

$$\frac{|x-2|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+3)!} < 1$$

$$\frac{|x-2|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n-1)!}\, n\, \cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n-1)!}\,\cancel{(n+2)!}\,(n+3)} < 1$$

$$\frac{|x-2|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} < 1$$

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3.$$

$$-3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5.$$

για $x = -1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-3)^{n-1} \cancel{(n-1)!}}{6^n \cancel{(n-1)!}\, n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 2^n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{6^n}} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$$ η οποία συγκλίνει

αφού είναι εναλλασσόμενη με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

και $a_{n+1} < a_n$.

για $x = 5$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, 3^{n-1}\, \cancel{(n-1)!}}{6^n \cancel{(n-1)!}\, n(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+1)}$$ η οποία συγκλίνει.

(έχει αποδειχθεί αυτό).

6. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x + y + z + at &= 1 \\ x + by + z + t &= -b. \\ x + y + z + t &= 1. \end{aligned}$$

Λύση.

~~# άρα~~. Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{rank}(A) \leq 3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (b-1)(1-a).$$

για $a \neq 1$ και $\beta \neq 1$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

άρα $\text{rank}(A) = 3$.

για $a = 1$ έχουμε. $\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ x + by + z + t &= -\beta. \\ x + y + z + t &= 1 \end{aligned}\right\}$.

για $\beta = 1$ το σύστημα είναι αδύνατο αφού $x+y+z+t=1$ και $x+y+z+t=-1$

για $\beta \neq 1$ έχουμε
$x + y + z + t = 1$
$x + by + z + t = -\beta$. z, t ελεύθεροι άγνωστοι.

οπότε $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 - z - t \\ x + by &= -\beta - z - t. \end{aligned}\right\}$ $(b-1)y = -\beta - 1$

$$y = -\frac{(\beta+1)}{\beta-1}$$

$$x = 1 - z - t + \frac{b+1}{\beta-1}$$

άρα για $a = 1$ και $\beta \neq 1$ $(x, y, z, t) = \left(1 - z - t + \frac{b+1}{b-1}, -\frac{(\beta+1)}{b-1}, z, t\right)$

για $a \neq 1$ και $\beta \neq 1$ $\operatorname{rank}(A) = 3$.

άρα το σύστημα έχει ακριβώς λύση.

$$x + y + at = 1 - z$$
$$x + by + t = -\beta - z.$$
$$x + y + t = 1 - z.$$

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D} \qquad t = \frac{Dt}{D}.$$

$$Dt = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-z \\ 1 & b & -\beta - z \\ 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = 0.$$

$$t = \frac{0}{D} = 0.$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1-z & a \\ 1 & -\beta - z & 1 \\ 1 & 1-z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-z & a \\ 0 & -\beta - 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$
$$= (-\beta - 1)(1-a)$$

$$y = \frac{Dy}{D} = -\frac{(b+1)\cancel{(1-a)}}{(b-1)\cancel{(1-a)}} = -\frac{\beta+1}{b-1}.$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1-z & 1 & a \\ -\beta - z & b & 1 \\ 1-z & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-z & 1 & a \\ -\beta - z & b & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -(\beta+z) & \beta \end{vmatrix} = (1-a)\left[b(1-z) + (\beta+z)\right]$$

$$x = \frac{\cancel{(1-a)}\left[\beta(1-z) + (\beta+z)\right]}{(b-1)\cancel{(1-a)}} = \frac{\beta(1-z) + (\beta+z)}{\beta - 1}$$