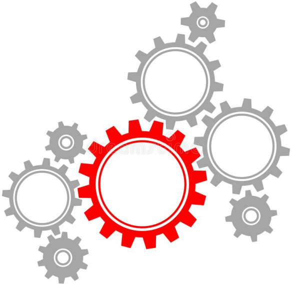
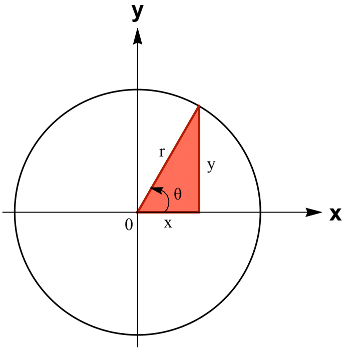
Ένατη εβδομάδα μαθημάτων (Μέρος Α)



- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

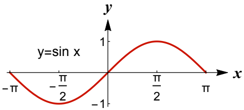
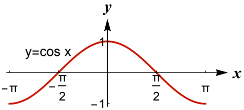
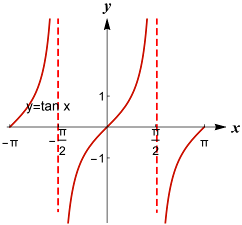
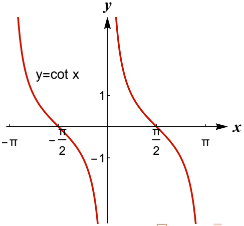
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις



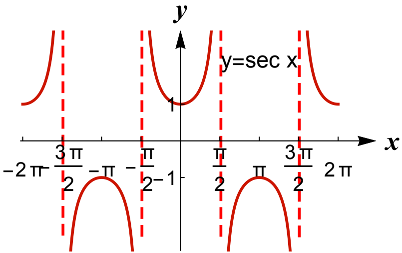
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

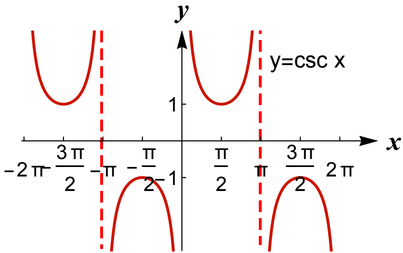
- Ημίτονο: $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
- Συνημίτονο: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
- Εφαπτομένη: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
- Συνεφαπτομένη: $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$
- Τέμνουσα: $\sec\theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$
- Συντέμνουσα: $\csc\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

Γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

	Ημίτονο	Συνημίτονο
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$
		
	Εφαπτομένη	**Συνεφαπτομένη**
$f(x)$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
		

Γραφικές παραστάσεις sec x και csc x



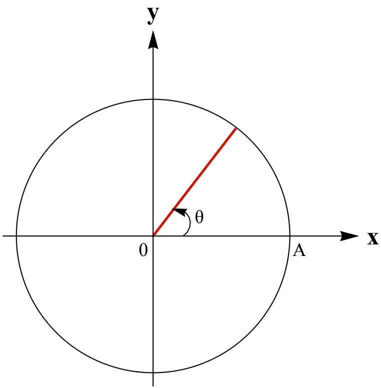


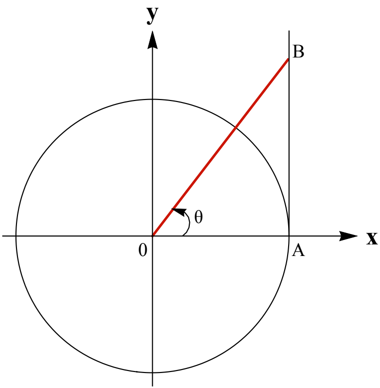
Πεδίο ορισμού sec: $\mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\}$, Πεδίο τιμών sec: $y \leq -1, y \geq 1$

Πεδίο ορισμού csc: $\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$, Πεδίο τιμών csc: $y \leq -1, y \geq 1$.

’σκηση

Να υπολογισθεί γεωμετρικά η τέμνουσα πάνω στον μοναδιαίο τριγωνομετρικό κύκλο.



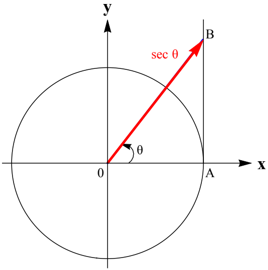


$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{OB} \Longrightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

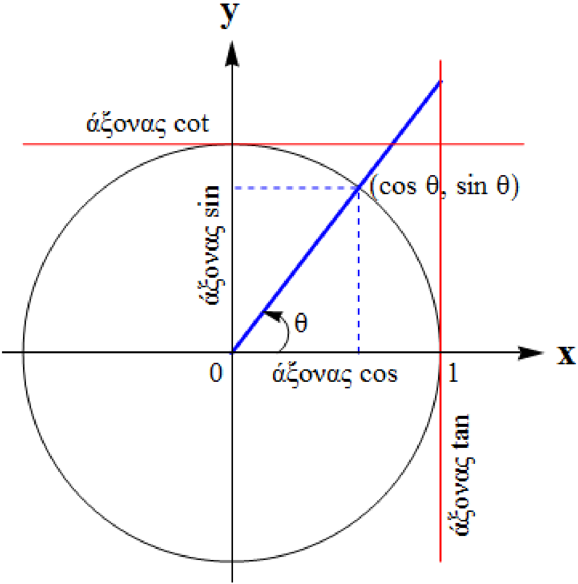
1ος τρόπος:



$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Longrightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta.$$

2ος τρόπος:

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta.$$


y
x
άξονας cot
άξονας sin
(cos θ, sin θ)
θ
0
άξονας cos
1
άξονας tan

Σχέσεις αθροισμάτων και διαφορών τόξων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \sin\beta\ \cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha\ \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\ \cot\beta \mp 1}{\tan\alpha\ \tan\beta}$

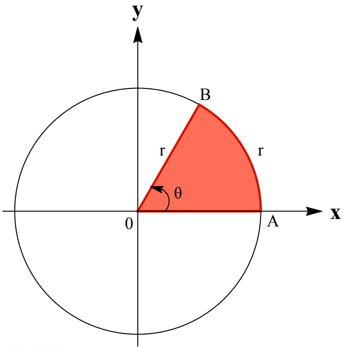
Σχέσεις απλών και πολλαπλασίων τόξων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta$
- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
- $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
- $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων υπάρχουν για κάθε τόξο με την προϋπόθεση όμως οι γωνίες να είναι εκφρασμένες σε ακτίνια.

Ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία θ που βλέπει τόξο με μήκος AB ίσο με την ακτίνα r.



$$1 \text{ ακτίνιο} = \frac{180^o}{\pi} = 57.2958^o \ldots$$

Σχέσεις που συνδέουν τις διαφορετικές εκφράσεις τόξων:

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x, \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x.$$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Αν θ είναι συνάρτηση του x, τότε οι προηγούμενες σχέσεις γενικεύονται:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dx},\\ \frac{d}{dx}(\cos\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dx},\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan\theta) = \sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(\cot\theta) = -\csc^2\theta\,\frac{d\theta}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(\sec\theta) = \sec\theta\cdot\tan\theta\,\frac{d\theta}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(\csc\theta) = -\csc\theta\cdot\cot\theta\,\frac{d\theta}{dx}.$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η σχέση της παραγώγου $\dfrac{d}{dx}(\csc\theta) = -\csc\theta \cdot \cot\theta\ \dfrac{d\theta}{dx}$, όταν θ είναι συνάρτηση του x.

Λύση:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\csc\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\csc\theta)\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{dx} \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{dx} = -\csc\theta \cdot \cot\theta\,\frac{d\theta}{dx}\,.
\end{aligned}$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η παράγωγος dy/dx της συνάρτησης $y = \sin^{1/3} x \csc^2 x$.

   $$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = -\frac{5\cos x}{3\sin^{8/3} x}\right)$$

2. Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $y = \cos x \sec^3 x^2$.

   $$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = -\sec^3 x^2 \left(\sin x - 6x \cos x \tan x^2\right)\right)$$

3. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx για τη συνάρτηση $y = \dfrac{\tan x + 1}{\sec^2 x}$.

   $$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = \cos 2x - \sin 2x\right)$$

4. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος d^2y/dx^2 της συνάρτησης $y = e^{\sec x}$.

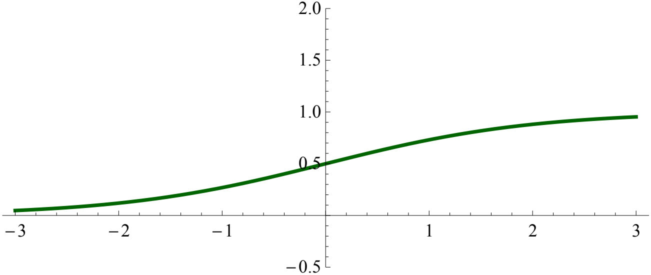
   $$\left(\text{Απ. } \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\sec x} \sec x \left(\sec x \tan^2 x + 2\tan^2 x + 1\right)\right)$$

Αντίστροφη συνάρτηση

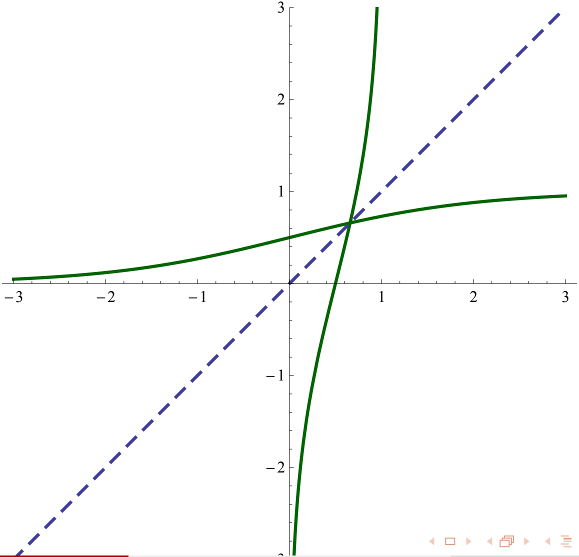
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι $1-1$. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση f^{-1} η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f, σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f και για κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχεί μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Άσκηση: Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$



Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ και η αντίστροφη της...



Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης μίας μεταβλητής

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ που είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο σημείο $y_0 = f(x_0)$ και είναι

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Απόδειξη

Άσκηση: Να υπολογιστεί η παράγωγος της αντίστροφης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

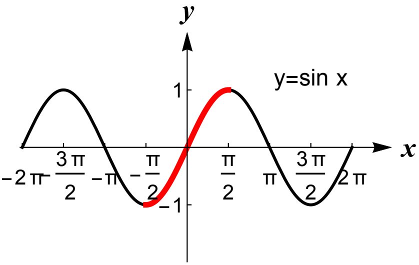
Ένα πρόβλημα που συχνά αντιμετωπίζουμε είναι να γνωρίζουμε την τιμή μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης και να ζητάμε να βρούμε τη γωνία.

$$x = \sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x \quad (= \sin^{-1} x)$$

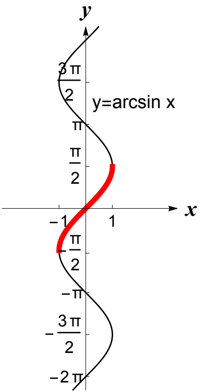
Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού του ημιτόνου στο διάστημα $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου.

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις όλων των γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Έστω η συνάρτηση $y = \sin x$.



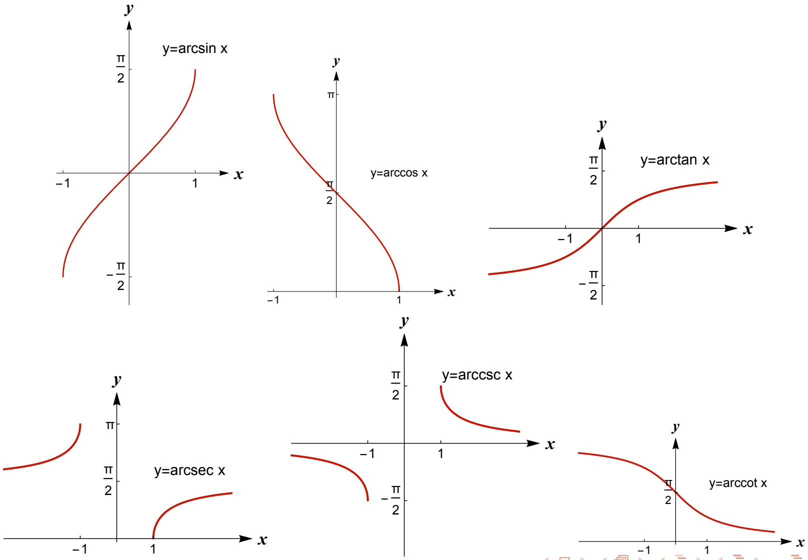
Πρωτεύον τόξο



Πεδίο ορισμού: $-1 \leq x \leq 1$

Πεδίο τιμών: $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

Γραφικές παραστάσεις αντίστροφων τριγ. συναρτήσεων

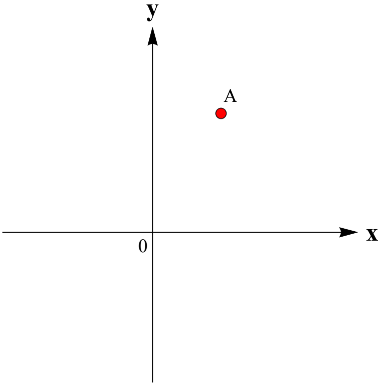


Πρωτεύοντα τόξα αντίστροφων τριγων. συναρτήσεων

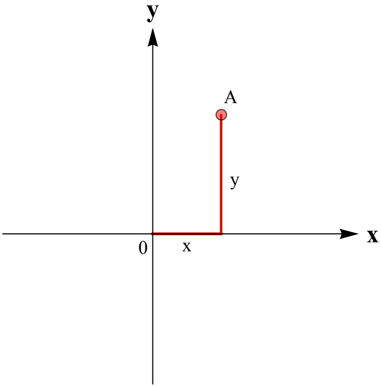
Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\pi/2 \le y \le \pi/2$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \mathrm{arcsec} x$	$x \le -1$ ή $x \ge 1$	$\pi/2 < y \le \pi$ ή $0 \le y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccsc} x$	$x \le -1$ ή $x \ge 1$	$-\pi/2 \le y < 0$ ή $0 < y \le \pi/2$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Εφαρμογή αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Πολικές συντεταγμένες.

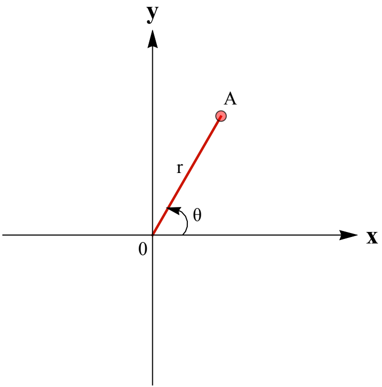


Πολικές συντεταγμένες. Θέση ενός σημείου A στο επίπεδο:



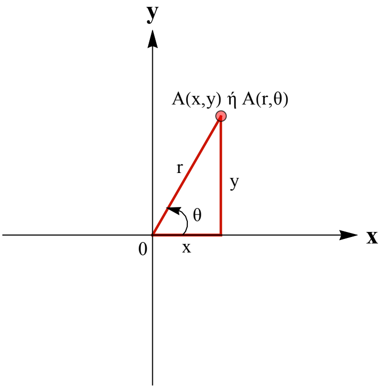
Εφαρμογή αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Πολικές συντεταγμένες. Θέση ενός σημείου Α στο επίπεδο:



Εφαρμογή αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Πολικές συντεταγμένες. Θέση ενός σημείου A στο επίπεδο:



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \quad \text{ή}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\theta = \arctan(y/x),\ x>0,\ y\geq 0$$

Το A ορίζεται μονοσήμαντα;

Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $(sin^{-1}x)' =$

- $(cos^{-1}x)' =$

- $(tan^{-1}x)' =$

Παραγώγιση αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Αν τα τόξα είναι σε ακτίνια και θ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε αν έχουμε για παράδειγμα:

$$y = \arcsin\theta \iff \theta = \sin y \text{ τότε } \frac{d\theta}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}\,\frac{dy}{dx}$$

(πρωτεύον τόξο: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \to \cos y \geq 0$)

$$\frac{d\theta}{dx} = \sqrt{1-\theta^2}\,\frac{dy}{dx} \iff$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\,\frac{d\theta}{dx} \quad \text{με} \quad |\theta| < 1.$$

Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin\theta \overset{\text{ή}}{=} \frac{d}{dx}\sin^{-1}\theta &= \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\frac{d\theta}{dx}\,, \quad |\theta|<1 \\
\frac{d}{dx}\cos^{-1}\theta &= -\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\frac{d\theta}{dx}\,, \quad |\theta|<1 \\
\frac{d}{dx}\sec^{-1}\theta &= \frac{1}{|\theta|\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{dx}\,, \quad |\theta|>1 \\
\frac{d}{dx}\csc^{-1}\theta &= -\frac{1}{|\theta|\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{dx}\,, \quad |\theta|>1 \\
\frac{d}{dx}\tan^{-1}\theta &= \frac{1}{1+\theta^2}\frac{d\theta}{dx} \\
\frac{d}{dx}\cot^{-1}\theta &= -\frac{1}{1+\theta^2}\frac{d\theta}{dx}
\end{aligned}
$$

Άσκηση

- Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = x^2 \arctan x$.

Λύση:

$$\frac{d}{dx}(x^2 \arctan x) = 2x \arctan x + x^2 \frac{d}{dx}(\arctan x) =$$

$$\left(\frac{d}{dx} \tan^{-1} \theta = \frac{1}{1+\theta^2} \frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$2x \arctan x + x^2 \frac{1}{1+x^2} = 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Άσκηση

- Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

Λύση:
Σύνθετη συνάρτηση, $\theta = \sqrt{1-x^2}$:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin\sqrt{1-x^2}) = \frac{d}{d\theta}(\arcsin\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx} =$$

$$\left(\frac{d}{dx}\sin^{-1}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\,\frac{d\theta}{dx}\;,\; |\theta| < 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(1-x^2) = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) =$$

$$= -\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορίζονται μέσω των εκθετικών συναρτήσεων

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{Υπερβολικό ημίτονο του } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{Υπερβολικό συνημίτονο του } x$$

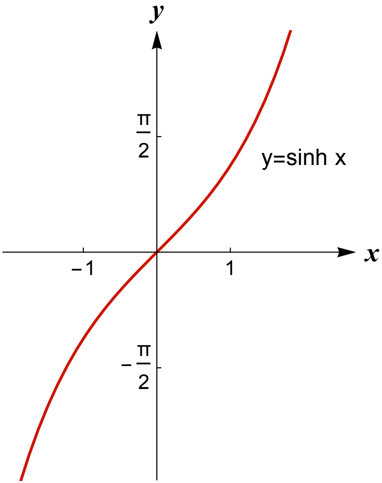
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική εφαπτομένη του } x$$

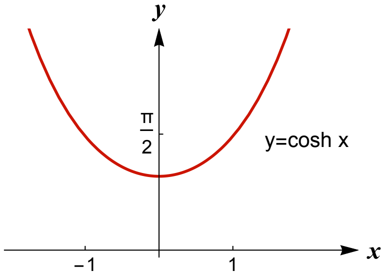
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική συνεφαπτομένη του } x$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική τέμνουσα του } x$$

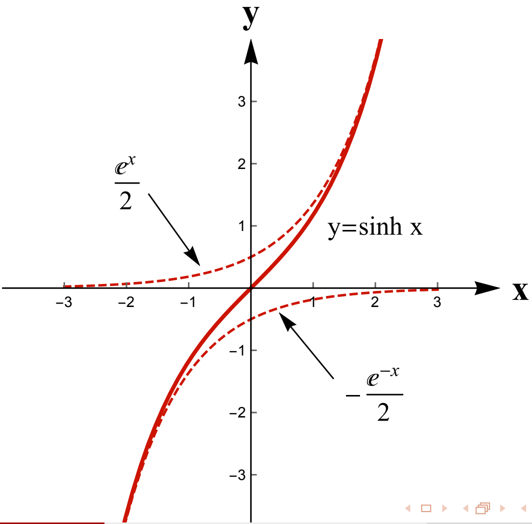
$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική συντέμνουσα του } x.$$

Γραφικές παραστάσεις υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

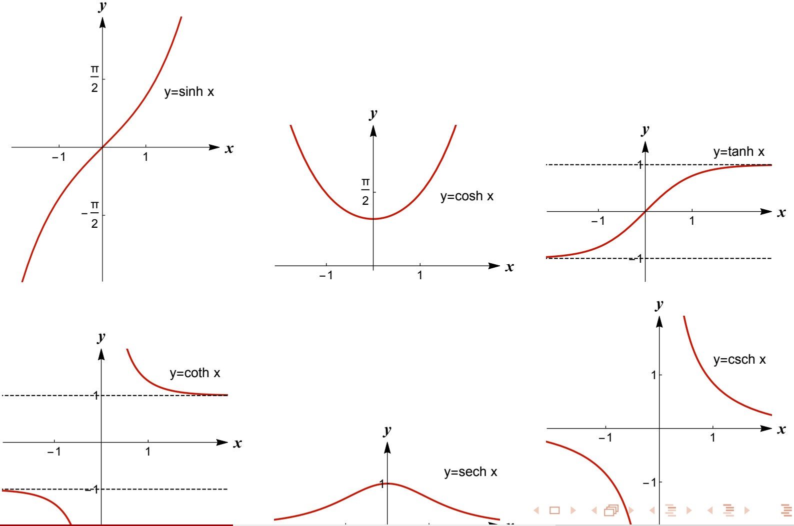




Γραφικές παραστάσεις υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Γραφικές παραστάσεις υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Βασικές ιδιότητες υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

- $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$
- $cosh(-x) = cosh(x)$
- $sinh(-x) = -sinh(x)$
- $sinh\, 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- $cosh\, 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $cosh^2 x = \dfrac{\cosh\ 2x + 1}{2}$

Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Παράγωγοι υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

- $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \operatorname{sech}^2 x$

Αντίστροφες υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$x = \sinh y \Longleftrightarrow y = \sinh^{-1} x$$

Παράγωγοι αντίστροφων υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sinh^{-1}\theta\right)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\frac{d\theta}{dx} \\
\frac{d\left(\cosh^{-1}\theta\right)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{dx}, \quad \theta > 1 \\
\frac{d\left(\tanh^{-1}\theta\right)}{dx} &= \frac{1}{1-\theta^2}\frac{d\theta}{dx}, \quad |\theta| < 1
\end{aligned}$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η παράγωγος dy/dx της συνάρτησης $y = \arcsin\sqrt{x}$.

$$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\right)$$

2. Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $y = \operatorname{arcsec} e^{2x}$.

$$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x} - 1}}\right)$$

3. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx για τη συνάρτηση $y = \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}$.

$$\left(\text{Απ. } \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{1 - x^2}\right)$$

4. Να λυθεί η εξίσωση $\arctan(2x - 3) = \dfrac{\pi}{4}$

$$(\text{Απ. } x = 2).$$

5. Αν $y = \arcsin x$, όπου $0 < y < \pi/2$, βρείτε το $\cos y$.