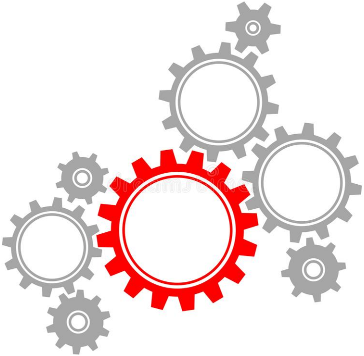
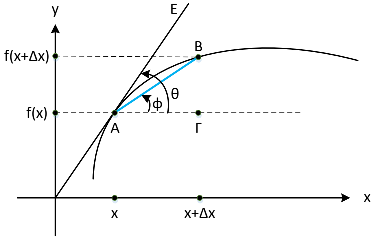
# Ένατη εβδομάδα μαθημάτων (Μέρος Β)



## Εφαπτόμενη ευθεία

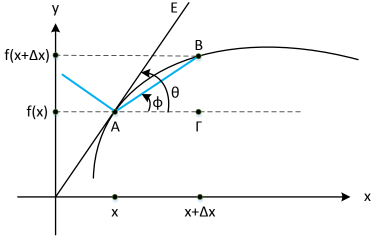
Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $A(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$




Εξίσωση κάθετης ευθείας στο σημείο $A(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



# Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωσή της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης $y = x^3 - 3x + 2$ στο σημείο $x_0 = 2$.
2. Να βρεθούν τα $a,\ b \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 2x + 5$ να είναι η εφαπτόμενη της συνάρτησης $f(x) = x^2 + ax + b$ στο $x_0 = -1$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ με κλίση $1/4$
4. Σε ποια από τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ οι εφαπτόμενες περνάνε από την αρχή των αξόνων.

## Ακρότατα συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο Α.

### Θεώρημα: Κριτήριο 1ης παραγώγου

• Βρίσκουμε (αν έχει) κρίσιμα σημεία $x_0$ λύνοντας την εξίσωση $f'(x) = 0$
• Υπολογίζουμε το πρόσημο της $f'(x)$ αριστερά και δεξιά της κρίσιμης τιμής $x_0$
Τότε:
Η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0$ αν η $f' > 0$ αριστερά του $x_0$ και αρνητική δεξιά
Η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$ αν η $f' < 0$ αριστερά του $x_0$ και θετική δεξιά
Η $f$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ αν η $f'$ δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0$.

# Ακρότατα συνάρτησης μιας μεταβλητής

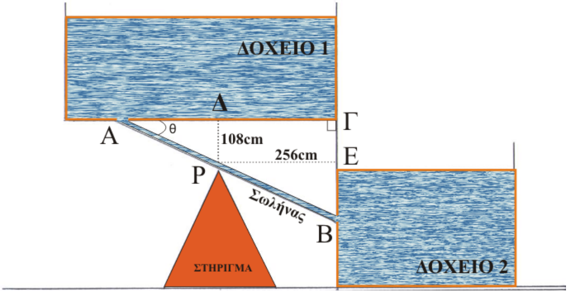
Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο A και $x_0$ κάποια κρίσιμα σημεία της.

**Θεώρημα: Κριτήριο 2ης παραγώγου**

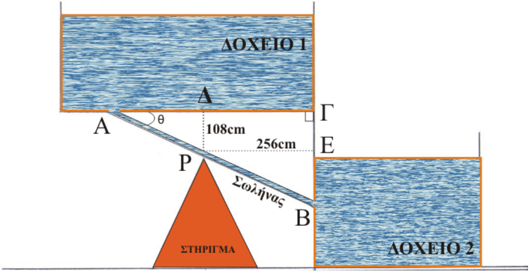
• Η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0$ αν $f''(x_0) < 0$
• Η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$ αν $f''(x_0) > 0$.
• Αν $f''(x_0) = 0$ τότε για να αποφανθούμε για το είδος του ακρότατου (αν υπάρχει) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της 1ης παραγώγου.

# Ασκηση

Θέλουμε να μεταφέρουμε ένα υγρό από το δοχείο 1 στο δοχείο 2 μέσω ενός σωλήνα ΑΒ που στηρίζεται στην κορυφή Ρ μιας τριγωνικής βάσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η απόσταση του Ρ από την οριζόντια βάση του δοχείου 1 είναι ΡΔ=108 *cm* ενώ η απόσταση του Ρ από την αριστερή κάθετη πλευρά του δοχείου 2 είναι ΡΕ=256 *cm*. Βρείτε το σωλήνα ΑΒ με το μικρότερο μήκος που ενώνει την βάση του δοχείου 1 με την αριστερή κάθετη πλευρά του δοχείου 2.



# Ασκηση




Έστω $s$ το ζητούμενο μήκος και $\theta$ η γωνία με τον ορίζοντα.

$$s = AP + PB = 108\csc\theta + 256\sec\theta \qquad (1)$$

$$\frac{ds}{d\theta} = -108\csc\theta\cot\theta + 256\sec\theta\tan\theta = \frac{-108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = 0 \Rightarrow -108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta = 0 \Rightarrow \tan^3\theta = 27/64 \Rightarrow \tan\theta = 3/4$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan 3/4 \quad \text{και συνεπώς} \quad s \overset{(1)}{=} 108(5/3) + 256(5/4) = 500cm.$$

# Ασκηση

Στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν έχουμε ακρότατο με τη χρήση του δεύτερου θεωρήματος (κριτήριο 2ης παραγώγου).
Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $s(\theta)$ είναι:

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = 108\left(\csc^3(\theta) + \cot^2(\theta)\csc(\theta)\right) + 256\left(\sec^3(\theta) + \tan^2(\theta)\sec(\theta)\right)$$

και συνεπώς τώρα θα ελέγξουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στη θέση $\theta = \arctan 3/4$

$$\left.\frac{d^2 s}{d\theta^2}\right|_{\theta=\arctan 3/4} = 1500 > 0$$

άρα η συνάρτηση $s(\theta)$ έχει ελάχιστο σε αυτή τη θέση.

# Ασκήσεις

1. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = α$ και ύψος $ΑΔ = h$ και τα εγγραφόμενα σε αυτό ορθογώνια των οποίων η μία πλευρά βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΒΓ. Να βρεθεί το παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν.
2. Αν δύο πόλεις Α και Β βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της όχθης ενός ποταμού και απέχουν από αυτήν 10 $km$ και 15 $km$ αντίστοιχα. Αν Α′ και Β′ είναι οι προβολές των Α και Β στην όχθη του ποταμού, η απόσταση Α′Β′ ισούται με 20 $km$. Οι δύο πόλεις πρέπει να εφοδιαστούν με νερό από ένα εργοστάσιο που θα κατασκευαστεί στην όχθη του ποταμού. Σε ποιο σημείο της όχθη του ποταμού πρέπει να κατασκευαστεί το εργοστάσιο έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος για τους αγωγούς που θα το συνδέσουν με τις δύο πόλεις.

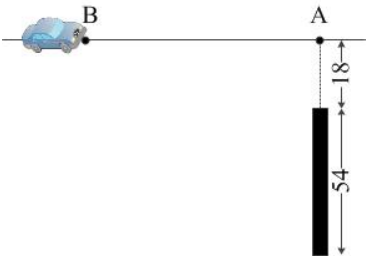
# Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου με το μέγιστο εμβαδόν που εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας $R$.
2. Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου με το μέγιστο εμβαδόν που εγγράφεται στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. Να προσδιοριστεί η ακτίνα ενός κυκλικού τομέα του οποίου η περίμετρος είναι 20 $cm$ έτσι ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο.
4. Έχουμε ένα φύλλο μετάλλου εμβαδού $S$ με το οποίο θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυλινδρικό δοχείο χωρίς σκέπασμα και χωρίς απώλεια μετάλλου. Να υπολογιστεί ο λόγος $h/r$ όπου $r$ η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και $h$ το ύψος του, έτσι ώστε ο όγκος του δοχείου να είναι μέγιστος.

# Θέμα - Ιούνιος 2017

Μία πινακίδα δρόμου, 54 μονάδων μήκους σε πλάτος, είναι τοποθετημένη κάθετα σε έναν αυτοκινητόδρομο και απέχει από το πλησιέστερο σημείο A του δρόμου 18 μονάδες μήκους (σχήμα). Καθώς ένα αυτοκίνητο B πλησιάζει την πινακίδα κατά μήκος του δρόμου, σε ποιο σημείο ο οδηγός θα βλέπει την πινακίδα με τη μεγαλύτερη γωνία;

(1.5 μονάδες)



# Βασικά θεωρήματα των παραγώγων

## Θεώρημα Rolle

Έστω μία συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a,\ b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(a,\ b)$. Αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $c \in (a,\ b)$ τέτοιος ώστε $f'(c) = 0$.

### Ασκήσεις:

1. Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (-2,\ 0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, όπου
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & -2 \leq x \leq -1 \\ (x+1)^3 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$
2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μία και μόνο μία πραγματική ρίζα.

# Βασικά θεωρήματα των παραγώγων

## Θεώρημα Μέσης τιμής

Έστω μία συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a,\ b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(a,\ b)$. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $c \in (a,\ b)$ τέτοιος ώστε $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ασκήσεις:

1. Να αποδειχθεί για $0 < a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$ η ανισότητα
$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$
2. Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,\ b]$ και παραγωγίσιμη στο $(a,\ b)$ και ισχύει $f(a) = f(b)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x_1,\ x_2 \in (a,\ b)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$
3. Να αποδειχθεί η ανισότητα
$$\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b} \text{ για } 0 < b \leq a.$$

**Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy**

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,\ b]$ και παραγωγίσιμες στο ανοιχτό διάστημα $(a,\ b)$. Αν $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, )$, τότε υπάρχει $c \in (a,\ b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό πως αν έχουμε $g(x) = x$, τότε από το Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy προκύπτει το Θεώρημα Μέσης Τιμής.