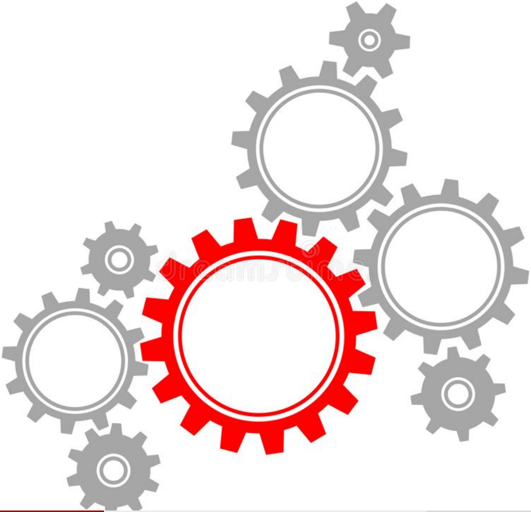
Ας ξεκινήσουμε λοιπόν...

7η εβδομάδα μαθημάτων (Μέρος Β)



Ολοκληρώματα ειδικής μορφής

Επίλυση ολοκληρωμάτων που περιέχουν ποσότητες της μορφής,

1. $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$
2. $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$
3. $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ όπου $a, b > 0$.

Η προσπάθεια είναι να βρούμε τέτοιες αντικαταστάσεις ώστε να απαλλαγούμε από τις τετραγωνικές ρίζες.

1η περίπτωση: $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$

Θέτουμε $\omega = \arcsin(bx/a)$, οπότε $bx/a = \sin\omega \Rightarrow bx = a\sin\omega$. ’ρα,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b^2x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\omega} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2\omega)} = \\ &= \sqrt{a^2\cos^2\omega} = a\cos\omega.\end{aligned}$$

Πρωτεύον τόξο $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$ άρα $\cos\omega \geq 0$ συνεπώς δεν χρειάζεται απόλυτο εκτός της ρίζας.

2η περίπτωση: $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$

Θέτουμε $\omega = \arctan(bx/a)$, οπότε $bx/a = \tan\omega \Rightarrow bx = a\tan\omega$. ’ρα,

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\omega} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\omega)} =$$
$$= \sqrt{a^2\sec^2\omega} = a\sec\omega.$$

Πρωτεύον τόξο $-\pi/2 < \omega < \pi/2$ άρα $\sec\omega > 0$ συνεπώς δεν χρειάζεται απόλυτο εκτός της ρίζας.

3η περίπτωση: $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$

Θέτουμε $\omega = \operatorname{arcsec}(bx/a)$, οπότε $bx/a = \sec\omega \Rightarrow bx = a\sec\omega$. 'ρα,

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\omega - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\omega - 1)} =$$
$$= \sqrt{a^2\tan^2\omega} = a|\tan\omega|.$$

Πρωτεύον τόξο $0 \leq \omega \leq \pi$ με $\omega \neq \pi/2$ άρα

$$\begin{aligned} |\tan\omega| &= \tan\omega \quad \text{για} \quad 0 \leq \omega < \pi/2 \quad \text{και} \\ |\tan\omega| &= -\tan\omega \quad \text{για} \quad \pi/2 < \omega \leq \pi \end{aligned}$$

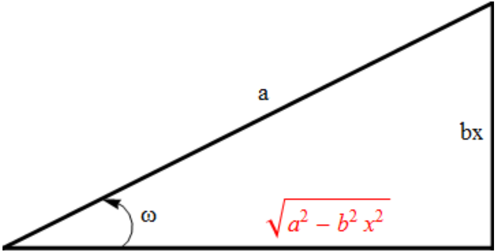
συνεπώς <u>χρειάζεται</u> απόλυτο εκτός της ρίζας.

Παρατήρηση

Έστω ότι έχουμε τη νέα μεταβλητή

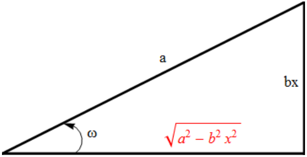
$$\omega = \arcsin(bx/a) \Rightarrow bx = a\sin\omega$$

και μετά την επίλυση του ολοκληρώματος καταλήγουμε σε μία ποσότητα που περιέχει π.χ. την $\tan\omega$. Πως μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε την $\tan\omega$ με την αρχική μεταβλητή x;

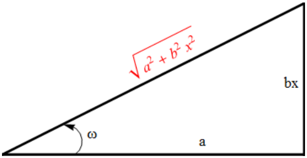


$$\tan\omega = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$$

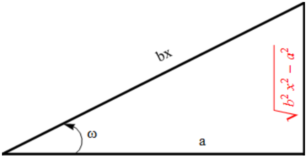
Παρατήρηση



$$\sin \omega = \frac{bx}{a}$$



$$\tan \omega = \frac{bx}{a}$$



$$\sec \omega = \frac{bx}{a}$$

Άσκηση 1. Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Έχουμε τη μορφή $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ και συνεπώς θέτουμε $\omega = \arctan(bx/a) = \arctan(x/2) \Rightarrow x/2 = \tan\omega \Rightarrow x = 2\tan\omega$. Άρα $dx = 2\sec^2\omega\, d\omega$ στο πρωτεύον τόξο $-\pi/2 < \omega < \pi/2$.

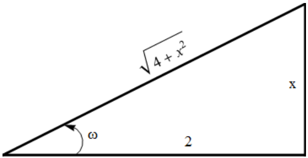
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\omega\, d\omega}{\sqrt{4+4\tan^2\omega}} = \int \frac{2\sec^2\omega\, d\omega}{\sqrt{4(1+\tan^2\omega)}} = \\
&= \int \frac{2\sec^2\omega\, d\omega}{\sqrt{4\sec^2\omega}} = \int \frac{2\sec^2\omega\, d\omega}{2|\sec\omega|} = \int \frac{\sec^2\omega\, d\omega}{\sec\omega} = \\
&= \int \sec\omega\, d\omega = \int \frac{sec\,\omega(\sec\omega+\tan\omega)}{\sec\omega+\tan\omega}\, d\omega = \\
&= \int \frac{sec^2\omega+\sec\omega\cdot\tan\omega}{\sec\omega+\tan\omega}\, d\omega = \int \frac{(\tan\omega+\sec\omega)'}{\sec\omega+\tan\omega}\, d\omega = \\
&= \ln|\sec\omega+\tan\omega| + C
\end{aligned}$$

Άρα

Άσκηση 1. Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln|\sec\omega + \tan\omega| + C \qquad (1)$$

Από την αρχική υπόθεση έχουμε $\tan\omega = x/2$. Χρειάζεται να βρούμε και την σχέση της $\sec\omega$ με το x.



$$\sec\omega = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \quad \text{άρα}$$

$$(1) = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C =$$

$$= \ln|\sqrt{4+x^2} + x| + C'$$

όπου $C' = C - \ln 2$.

Άσκηση 2. Να λυθεί το $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}, \quad -3 < x < 3$

Έχουμε τη μορφή $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ και συνεπώς θέτουμε
$\omega = \arcsin(bx/a) = \arcsin(x/3) \Rightarrow x/3 = \sin\omega \Rightarrow x = 3\sin\omega.$
Άρα $dx = 3\cos\omega\, d\omega$ στο πρωτεύον τόξο $-\pi/2 < \omega < \pi/2.$

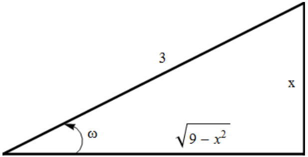
$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{9 - 9\sin^2\omega}} = \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{3\sqrt{1-\sin^2\omega}} = \\
&= \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{3|\cos\omega|} \overset{\cos\omega>0}{=} 27\int \sin^3\omega\, d\omega = \\
&= 27\int \sin^2\omega\, \sin\omega\, d\omega = 27\int (1-\cos^2\omega)\sin\omega\, d\omega = \\
&= 27\int \sin\omega\, d\omega - 27\int \cos^2\omega\, \sin\omega\, d\omega = \\
&= -27\cos\omega + 9\int (\cos^3\omega)' d\omega = -27\cos\omega + 9\cos^3\omega + C
\end{aligned}
$$

Άρα

Άσκηση 2. Να λυθεί το $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}, \quad -3 < x < 3$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = -27\cos\omega + 9\cos^3\omega + C \tag{1}$$

Από την αρχική υπόθεση έχουμε $\sin\omega = x/3$. Χρειάζεται να βρούμε και την σχέση του $\cos\omega$ με το x.



$$\cos\omega = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \quad \text{άρα}$$

$$(1) = -27 \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 9\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 + C =$$

$$= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3} + C\,.$$

Άσκηση 3. Να λυθεί το $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \quad x > 2/5$

Έχουμε τη μορφή $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ και συνεπώς θέτουμε $\omega = \operatorname{arcsec}(bx/a) = \operatorname{arcsec}(5x/2) \Rightarrow 5x/2 = \sec\omega \Rightarrow x = \frac{2}{5}\sec\omega$. Άρα $dx = \frac{2}{5}\sec\omega\,\tan\omega\, d\omega$ στο πρωτεύον τόξο $0 < \omega < \pi/2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\frac{4}{25}\sec^2\omega - 4}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\sec^2\omega - 1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\sqrt{\tan^2\omega}} \overset{\tan\omega>0}{=} \int \frac{dx}{2\tan\omega} = \int \frac{\frac{2}{5}\sec\omega\,\tan\omega\,d\omega}{2\tan\omega} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\omega\,d\omega \overset{\text{βλ. ασκ. 1}}{=} \frac{1}{5}\ln|\sec\omega + \tan\omega| + C =$$

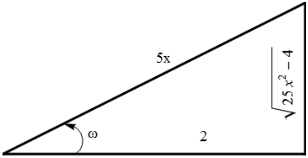
$$= \frac{1}{5}\ln(\sec\omega + \tan\omega) + C$$

Άρα

Άσκηση 3. Να λυθεί το $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \quad x > 2/5$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\ln(\sec\omega + \tan\omega) + C \tag{1}$$

Από την αρχική υπόθεση έχουμε $\sec\omega = 5x/2$. Χρειάζεται να βρούμε και την σχέση της $\tan\omega$ με το x.



$$\tan\omega = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2} \quad \text{άρα}$$

$$(1) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left(5x + \sqrt{25x^2-4}\right) + C'.$$

Άλυτες ασκήσεις

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ $\left(\textbf{Απ.}\ -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C\right)$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$ $\left(\textbf{Απ.}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C\right)$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,,\quad |x|<3$ $\left(\textbf{Απ.}\ -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+C\right)$.
4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx\,,\quad x>2$
$\left(\textbf{Απ.}\ \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)+C\right)$.
5. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$ $\left(\textbf{Απ.}\ 1-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\approx 0.0931\right)$.

Ολοκληρώματα ειδικής μορφής

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει κάποιον όρο της μορφής

- $\sqrt[n]{ax+b}$ θέτουμε $u = \sqrt[n]{ax+b}$
- $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ θέτουμε $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}}, \ \ldots \ \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}$ θέτουμε $u = \sqrt[n_\ell]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}$ όπου n_ℓ το ΕΚΠ των $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Ολοκληρώματα ειδικής μορφής

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τον όρο $\sqrt{ax^2+bx+c}$ τότε

- αν το $\sqrt{ax^2+bx+c}$ έχει πραγματικές ρίζες r_1 και r_2 τότε το γράφουμε στη μορφή

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(x-r_1)(x-r_2)} = (x-r_1)\sqrt{\frac{x-r_2}{x-r_1}}$$

- αν $a>0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-u)$
- αν $c>0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = ux+\sqrt{c}$

Διωνυμικό ολοκλήρωμα

$$I = \int x^a (cx^b + d)^e, \;\; a, b, e \in \mathbb{Q}, \;\; c, d \in \mathbb{R}$$

- Αν $e \in \mathbb{Z}$ και $a = k/m, \;\; b = l/n$, με $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$
  θέτουμε $x = x^{\delta}$, όπου δ το ΕΚΠ των k, l, m, n.

- Αν $\frac{a+1}{b} \in \mathbb{Z}$ και $e = k/m$ όπου $k, \;\; m \in \mathbb{Z}$
  θέτουμε $cx^b + d = z^m$

- Αν $\frac{a+1}{b} + e \in \mathbb{Z}$ και $e = k/m$ όπου $k, \;\; m \in \mathbb{Z}$
  θέτουμε $\frac{cx^b+d}{x^b} = z^m$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$
- $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{9+4x^2}} dx$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$
- $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} dx$
- $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Χρησιμοποιούμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες για να τροποποιήσουμε με τέτοιο τρόπο τις συναρτήσεις προς ολοκλήρωση έτσι ώστε να πάρουμε ευκολότερες εκφράσεις.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx$$

τότε

- αν η συνάρτηση $f(x)$ περιέχει περιττή δύναμη του $\sin x$ τότε θέτουμε $\cos x = t$
- αν η συνάρτηση $f(x)$ περιέχει περιττή δύναμη του $\cos x$ τότε θέτουμε $\sin x = t$
- αν η συνάρτηση $f(x)$ περιέχει άρτιες δυνάμεις του $\sin x$ και του $\cos x$ τότε θέτουμε $\tan x = t$
- αν δεν ισχύει τίποτα από τα παραπάνω θέτουμε $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2dy}{1+t^2},$ και $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Ασκήσεις

1. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$
2. $\int \sin^4 x dx$
3. $\int \sec^4 x dx$
4. $\int \sin^3 x \cos x dx$
5. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$
6. $\int \cos(ax) \cos(bx) dx$