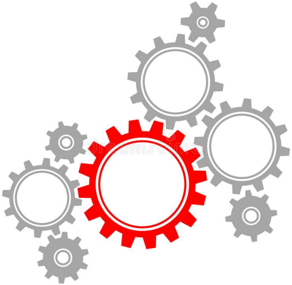
Μαθηματικά Ι

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023 - 2024

6^{η} Εβδομάδα Μαθημάτων



- Κύρια σύνολα αριθμών
- Μιγαδικοί αριθμοί

Κύρια σύνολα αριθμών

Η εξελικτική πορεία των αριθμών είναι συνυφασμένη με την εξέλιξη των επιστημών και γενικότερα με την πορεία της ανθρώπινης ύπαρξης. Άλλωστε οι αριθμοί δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων που ανακύπτουν από τις ανάγκες κάθε εποχής.

- **Φυσικοί Αριθμοί**

Γεννήθηκαν από την ανάγκη του ανθρώπου να μετρήσει αντικείμενα, χρόνο, αποστάσεις, κτλ...
Ο Homo Sapiens πριν περίπου 300000 χρόνια έκανε μία μικρή αρίθμηση χρησιμοποιώντας κλαδιά.
Εικάζεται ότι ο πρωτόγονος άνθρωπος πριν περίπου 100000 χρησιμοποιούσε κάποιες μαθηματικές λέξεις.
Το πρώτο σύστημα αρίθμησης εμφανίζεται στη Μεσοποταμία γύρω στο 3500 π.Χ.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Κύρια σύνολα αριθμών

▶ Αρνητικοί Αριθμοί

Δημιουργήθηκε η ανάγκη επίλυσης εξισώσεων της μορφής

$$x + \alpha = \beta,\ \alpha > \beta.$$

Η πρώτη αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς γίνεται σε εννέα βιβλία γραμμένα από Κινέζους συγγραφείς περίπου στο 100 π.Χ. Ωστόσο η έννοια ήταν ακόμα πολύ αφηρημένη και αρκετοί επιστήμονες της εποχής δεν μπορούσαν να την αντιληφθούν. Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην ιστορία στα Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης, το οποίο χρονολογείται από την περίοδο της κινεζικής δυναστείας Χαν (202 π.Χ. - 220 μ.Χ.), αλλά μπορεί κάλλιστα να περιέχει πολύ παλαιότερο υλικ.ό

Ο Διόφαντος ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια των αρνητικών αριθμών στο δυτικό κόσμος τον 3ο αιώνα μ.Χ. Προσπαθώντας να βρει τη λύση της εξίσωσης $4x + 20 = 0$ κατέληξε πως τα αποτελέσματα είναι εντελώς παράλογα.

Μέχρι τον 17ο αιώνα οι πλειοψηφία των μαθηματικών δεν αναγνώριζαν την ύπαρξη τους.

Δυτικοί μαθηματικοί, όπως ο Γκότφριντ Λάιμπνιτς (1646 - 1716), υποστήριξαν ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν ήταν έγκυροι, παρόλο που τους χρησιμοποιούσαν σε υπολογισμούς.

Κύρια σύνολα αριθμών

- Ρητοί Αριθμοί

Δημιουργήθηκε η ανάγκη επίλυσης εξισώσεων της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$.
Αναφορές στους κλασματικούς αριθμούς υπάρχουν από τον 2ο αιώνα π.Χ. σε έργα Αιγυπτίων μαθηματικών μόνο που ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι φυσικοί αριθμοί.
Η πιο γνωστή αναφορά είναι στα Στοιχεία του Ευκλείδη που χρονολογείται περίπου στο 300 π.Χ.

- Άρρητοί Αριθμοί

Ο Ίππασος, ιδρυτής του μαθηματικού τμήματος της σχολής του Πυθαγόρα, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα ανακάλυψε ότι η $\sqrt{2}$ υπάρχει σαν αριθμός (αφού είναι το μέτρο της υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1) εν τούτοις, δεν είναι ρητός αριθμός. Έτσι, δημιουργήθηκαν οι άρρητοι αριθμοί.

- Πραγματικοί Αριθμοί Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ανήκουν όλοι οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί.

Κύρια σύνολα αριθμών

- **Φανταστικοί Αριθμοί**

Δημιουργήθηκε η ανάγκη επίλυσης προβλημάτων της μορφής

$$x^2 + \alpha = 0, \ \alpha > 0.$$

Προκειμένου να λυθεί αυτό το πρόβλημα ο Ιταλός μαθηματικός και γιατρός Gerolamo Cardano (1501-1576) επινόησε τον αριθμό **i**, όπου $i^2 = -1$.

Με τη βοήθεια του δημιούργησε τους φανταστικούς αριθμούς $\lambda \cdot i$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

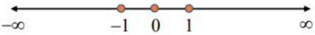
Η μαθηματική κοινότητα θεώρησε τρελούς όσους ασχολήθηκαν με την ύπαρξη ενός φανταστικού συνόλου και απαξίωσαν κάθε εγχείρημα τους. Στις αρχές όμως του 19ου αιώνα, οι φανταστικοί αριθμοί ξαναήρθαν στο προσκήνιο από τον Gauss.

Οι φανταστικοί αριθμοί συνδυάστηκαν με τους τους ήδη υπάρχοντες πραγματικούς αριθμούς και δημιούργησαν το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, $z = \alpha + \beta\, i$.

Κύρια σύνολα αριθμών

Το σύνολο των **φυσικών αριθμών** (Natural Numbers) $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$	• Έχει ως αρχή τον αριθμό 1. • Αν το n είναι στοιχείο του συνόλου, τότε και το n+1 είναι επίσης στοιχείο του συνόλου (Ιδιότητα διαδοχής). • Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο στοιχείων του συνόλου παράγουν στοιχεία του ιδίου συνόλου. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
Το σύνολο των **ακεραίων αριθμών** (Integer Numbers) $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$	• Δεν έχει αρχή. • Διατηρεί την ιδιότητα της διαδοχής. • Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού.
Το σύνολο των **ρητών αριθμών** (Rational Numbers) $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \middle\vert\ m,n\in\mathbb{Z},\quad n\neq 0\right\}$	• Δεν έχει αρχή. • Δεν έχει την ιδιότητα της διαδοχής. • Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. 3

Κύρια σύνολα αριθμών

Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών** (Real Numbers) $\mathbb{R}$  	• Περιέχει όλους τους αριθμούς • Δεν υπάρχουν γεωμετρικά κενά μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών. Ιδιότητα πληρότητας που δεν έχουν τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ • Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. • Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός έχει ρίζα οποιασδήποτε τάξης.
Το σύνολο των **αρρήτων αριθμών** (Irrational Numbers) $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ως λόγος δύο ακεραίων αριθμών, και αν γραφεί σε δεκαδική μορφή τότε έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Οι πιο γνωστοί άρρητοι αριθμοί είναι το π και το e.

- Μιγαδικοί Αριθμοί

Η γέννηση των μιγαδικών αριθμών

- Πιθανότατα οι πρώτες αναφορές σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών είναι του Ήρωνα από την Αλεξάνδρεια περίπου το 60 μ.Χ. που τις συνάντησε στην προσπάθεια του να υπολογίσει όγκους γεωμετρικών σωμάτων.

- Περίπου 200 χρόνια αργότερα, ο Διόφαντος το 275 μ.Χ. συνάντησε το ίδιο πρόβλημα όταν προσπάθησε να βρει τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με περίμετρο 12 μονάδες και εμβαδόν 7 τετραγωνικές μονάδες.

- Τέτοιου είδους προβλήματα προέκυπταν συνέχεια με τους Μαθηματικούς να μην μπορούν να δώσουν λύσεις σε υπαρκτά φυσικά προβλήματα εμβαδών και όγκων (Al-Khwarizmi, 800 μ.Χ. , Gerard, 1114-1187, Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1170-1250, κ.λ.π.).

- Στα μέσα του ίδιου αιώνα Ιταλοί μαθηματικοί αντιμετώπισαν ένα μαθηματικό παράδοξο που αδυνατούσαν να βρουν τη λύση του. Το πρόβλημα ήταν η λύση της εξίσωσης,

$$x^3 = px + q \quad \text{όπου} \quad p, q \quad \text{σταθερές.}$$

Ορισμός Μιγαδικού Αριθμού

- Υπάρχει λύση της εξίσωσης $x^2 = -1$;
  μπορούμε δηλαδή να βρούμε ένα αριθμό x που το τετράγωνο του να κάνει -1;
- Υπάρχει η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{-2}$;
- Υπάρχει ο λογάριθμος $\ln(-1)$;

- Η απάντηση είναι ναι!

Μόνο που αυτοί οι αριθμοί δεν είναι πραγματικοί.

■ Διευρύνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ορίζοντας ένα υπερσύνολο, το οποίο το συμβολίζουμε με το γράμμα $\mathbb{C}$, και το οποίο έχει τις ίδιες πράξεις με το $\mathbb{R}$ και τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών.

Ορισμός

Ορισμός Μιγαδικού Αριθμού

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο:

- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι της μορφής $\mathbf{a} + \mathbf{bi}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.
- Το στοιχείο i ονομάζεται φανταστική μονάδα και ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$.

- Άρα σύμφωνα με τον ορισμό κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ είναι σύνθεση δύο αριθμών:

$$z = a + bi \begin{cases} a & \text{πραγματικός αριθμός} \\ bi & \text{φανταστικός αριθμός.} \end{cases}$$

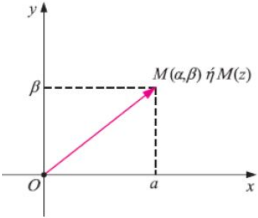
Ο a λέγεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $\mathbf{Re}(\mathbf{z})$,
Ο b λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και θα συμβολίζεται $\mathbf{Im}(\mathbf{z})$.

Μιγαδικοί αριθμοί

- Ένας μιγαδικός αριθμός $a + bi$ συμβολίζεται και με τη μορφή διατεταγμένου ζεύγους (a, b).

Παραδείγματα μιγαδικών αριθμών: $3 + 5i$, $2 - 4i$, $-1 + 12i$, $2 + 0i$ (πραγματικός αριθμός), $0 + 6i$ (φανταστικός αριθμός).

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών.
Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο με ένα σημείο $M(a, b)$ ή $M(z)$.



• Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $a + bi$.
• Το καρτεσιανό επίπεδο xOy ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**.
• Ο άξονας xx' λέγεται **πραγματικός άξονας**, ενώ ο yy' **φανταστικός άξονας**.

Ισότητα και πράξεις μεταξύ μιγαδικών.

- Δύο μιγαδικοί αριθμοί $a+bi$ και $c+di$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$.

$$\boxed{a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c \quad \text{και} \quad b=d}$$

- Αν $a+bi=0$ τότε,

$$\boxed{a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0 \quad \text{και} \quad b=0}$$

- Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.

$$\boxed{(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i}$$

Μιγαδικοί αριθμοί

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών αριθμών $a + bi$ και $c + di$ έχουμε:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Παρατήρηση:
Αν πολλαπλασιάσουμε τους $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.
Ο αριθμός $a - bi$ λέγεται **συζυγής** του $a + bi$ και συμβολίζεται με $\overline{a + bi}$.

Επειδή και $\overline{a - bi} = a + bi$ οι $a + bi$, $a - bi$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

Μιγαδικοί αριθμοί

- Το **πηλίκο** δύο μιγαδικών αριθμών $\dfrac{a+bi}{c+di}$, όταν $c+di \neq 0$, μπορούμε να το εκφράσουμε με ένα νέο μιγαδικό αφού πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με τον συζυγή του παρανομαστή έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.\end{aligned}$$

- Οι **δυνάμεις** στους μιγαδικούς ορίζονται όπως και στους πραγματικούς. Δηλαδή:

$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \dots, \quad z^n = z^{n-1} \cdot z$ με n ακέραιο θετικό και $n > 1$.

Αν $z \neq 0$ τότε ορίζουμε,

$$z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

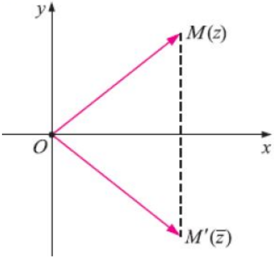
Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας i ισχύει:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i.$$

Αν συνεχίστε να υπολογίζεται δυνάμεις του i παρατηρείστε ότι τα αποτελέσματα επαναλαμβάνονται
$i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$ κ.λ.π.

- **Ιδιότητες συζυγών $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$.**

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα.



1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z - \bar{z} = 2bi$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$
6. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

Ασκήσεις

- Να γραφτεί ο μιγαδικός $z = (3+4i)i + i(1+i)$ στη μορφή $a+bi$.
  Λύση:

$$z = (3+4i)i + i(1+i) = 3i + 4i^2 + i + i^2 = 4i - 4 - 1 = -5 + 4i\,.$$

- Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $\dfrac{1}{1+i}$ στη μορφή $a+bi$.
  Λύση:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) i\,.$$

- Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y, ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (x+2y) - xi$, $z_2 = 1 + (2x-y)i$ να είναι συζυγείς.
  Λύση:

Πρέπει να ισχύει: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x = -(2x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3\,. \end{cases}$

Ασκήσεις

- Να γραφεί στη μορφή $a + bi$ ο αριθμός $z = 2i^3 + 3i^{13} + 4i^{37}$.
  Λύση:

Φτιάχνουμε δυνάμεις του i^2 αφού ξέρουμε ότι $i^2 = -1$.

$$z = 2i^2 i + 3\left(i^2\right)^6 i + 4\left(i^2\right)^{18} i = 2(-1)i + 3(-1)^6 i + 4(-1)^{18} i = \\ = -2i + 3i + 4i = 0 + 5i\,.$$

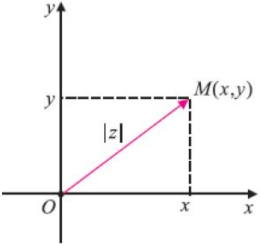
- Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$.
  Λύση:

Από τον τύπο που δίνει τις ρίζες σε δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση θα έχουμε:

$$\rho_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)3}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm \sqrt{i^2\,3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad (\text{συζυγείς})\,.$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.



Ορίζουμε ως **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** ενός μιγαδικού z, $|z|$, την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Για παράδειγμα:

$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$

Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$.

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Αν $z = x + yi$ τότε $\overline{z} = x - yi$ και $-z = -x - yi$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες,

$$|z| = |\overline{z}| = |-z|$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

Επίσης αν z_1 και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i}$.

Λύση:

Από τις ιδιότητες έχουμε

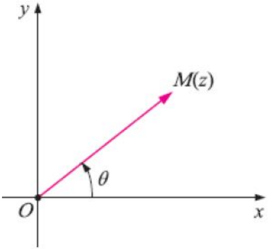
$$|z| = \left|\frac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)^2\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i\right|} = \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} =$$

$$= \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)\right| \left|\left(\sqrt{2}+i\right)\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} = \frac{\left|\sqrt{2}+i\right|^2}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} = \frac{\left|\sqrt{2}+i\right|^2}{\left|1-i\sqrt{3}\right|^2 |i|} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^2 \sqrt{0^2+1^2}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{4}\right)^2 1} = \frac{3}{4}.$$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

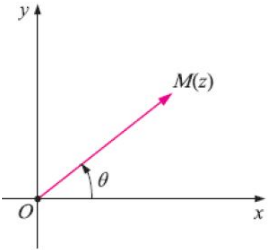


Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού z καθεμιά από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM.
Από όλα τα ορίσματα του z ένα βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$.
Αυτό το λέμε **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού $z = x + yi$ και το συμβολίζουμε με $\mathbf{Arg}(\mathbf{z})$.

- Το $\mathbf{Arg}(\mathbf{z})$ στο διπλανό σχήμα είναι η γωνία θ.
- Ο μιγαδικός $z = 0$ δεν έχει όρισμα γι αυτό πάντα θεωρούμε τον $z \neq 0$.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ που έχει μέτρο $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Αν θ είναι ένα όρισμα του z, τότε από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

οπότε $x = \rho\cos\theta$ και $y = \rho\sin\theta$.
Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ γράφεται,

$$z = x + yi = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta \cdot i$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή,

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Η γραφή αυτή λέγεται **τριγωνομετρική** ή **πολική μορφή του z**.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Παράδειγμα: Να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$.

Χρειαζόμαστε το μέτρο του οπότε:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Άρα} \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

οπότε $\theta = \pi/4$. Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ γράφεται,

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Ο εν λόγω μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα ορίσματα του. Για παράδειγμα, επειδή $2\pi + \pi/4 = 9\pi/4$, μπορούμε να γράψουμε και $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή:

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών z_1 και z_2, τότε:
$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ και } \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi, \ \ \kappa \in Z.$$

Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\,\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Θεώρημα De Moivre

Αν $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και n ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η παράσταση $(1+i)^{64}$.

Τον μιγαδικό z μπορούμε να τον γράψουμε σε πολική μορφή
Έχουμε $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ και $\cos\theta = x/\rho = 1/\sqrt{2}$,
$\sin\theta = y/\rho = 1/\sqrt{2}$. Άρα $\theta = \pi/4$
οπότε $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Από το θεώρημα De Moivre έχουμε

$$z^{64} = (\sqrt{2})^{64}\left(\cos\frac{64\pi}{4} + i\sin\frac{64\pi}{4}\right) = 2^{32}(\cos 16\pi + i\sin 16\pi) =$$
$$= 2^{32}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{32}(1 + i\,0) = 2^{32}.$$

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης στο $\mathbb{C}$

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών n ακριβώς ρίζες.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1$.

$$\begin{aligned} z^3 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (z-1) = 0 \quad \text{ή} \quad z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad z = 1, \quad z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{C}$ (οι δύο συζυγείς μιγαδικές).

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης στο $\mathbb{C}$ - Θεωρήματα

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $z = a - bi$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

Στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^n = 1$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει n ακριβώς διαφορετικές λύσεις

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Αντίστοιχα η εξίσωση $z^n = a$, όπου n θετικός ακέραιος και a μιγαδικός στη μορφή $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho = |a|$, έχει τις λύσεις

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ασκήσεις

- Να λυθεί η εξίσωση $z^5 = 16(\sqrt{3}+i)$.

  Λύση:

Χρειάζεται τον μιγαδικό $16(\sqrt{3}+i) = 16\sqrt{3}+16i$ να τον γράψουμε σε τριγωνομετρική μορφή $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου ρ το μέτρο του. Άρα $\rho = \sqrt{(16\sqrt{3})^2 + 16^2} = \sqrt{1024} = 32$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\cos\theta = x/\rho = 16\sqrt{3}/32 = \sqrt{3}/2$ και $\sin\theta = y/\rho = 16/32 = 1/2$. Άρα η μικρότερη γωνία που ικανοποιεί αυτές τις σχέσεις είναι η $\theta = \pi/6$. Συνεπώς το δεύτερο μέλος της εξίσωσης γράφεται:

$$16(\sqrt{3}+i) = 32\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Άρα οι πέντε ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Αναλυτικά,

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) = \\
&= \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{5} + i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{5}\right) = \\
&= 2\left(\cos\frac{12k\pi+\pi}{30} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{30}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

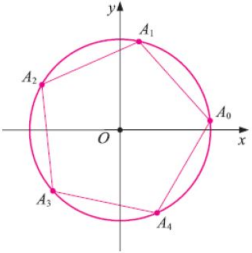
Άρα

Ασκήσεις

Άρα

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30}\right)\\
z_1 &= 2\left(\cos\frac{13\pi}{30} + i\sin\frac{13\pi}{30}\right)\\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{25\pi}{30} + i\sin\frac{25\pi}{30}\right)\\
z_3 &= 2\left(\cos\frac{37\pi}{30} + i\sin\frac{37\pi}{30}\right)\\
z_4 &= 2\left(\cos\frac{49\pi}{30} + i\sin\frac{49\pi}{30}\right)
\end{aligned}
$$

Γραφική παράσταση των λύσεων.



Παρατηρούμε ότι είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho = 2$.

Ασκήσεις

- Να υπολογισθεί το γινόμενο $\sqrt{-5}\sqrt{-3}$.

  Λύση:

Παρατήρηση:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Οι ιδιότητες των ριζών (που ισχύουν όταν οι υπόριζες ποσότητες είναι θετικοί αριθμοί), με αρνητικά υπόριζα ΔΕΝ ισχύουν!!!
Άρα για την άσκηση μας θα δουλέψουμε ως εξής:

$$\sqrt{-5}\sqrt{-3} = \left(i\sqrt{5}\right)\left(i\sqrt{3}\right) = i^2\left(\sqrt{5}\sqrt{3}\right) = i^2\sqrt{5\cdot 3} = -1\sqrt{15} = -\sqrt{15}\,.$$