Μαθηματικά Ι

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023 - 2024

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $A_{n\times n}$, τους αριθμούς λ και τα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{x}$ που ικανοποιούν τη σχέση :

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{1}$$

Ορισμός

Τότε οι λ ονομάζονται **ιδιοτιμές** (ή **χαρακτηριστικές τιμές**) και τα $\mathbf{x}$ **ιδιοδιανύσματα** (ή **χαρακτηριστικά διανύσματα**) του τετραγωνικού πίνακα A.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Longleftrightarrow A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

Η (2) είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{x}$.

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Για να έχει λύση αυτό το σύστημα (πλην της τετριμμένης), θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα $(A - \lambda I_n)$ να είναι μηδέν.
'ρα ζητάμε να βρούμε εκείνα τα λ ώστε:

$$|A - \lambda I_n| = 0 \tag{3}$$

Αν αναπτύξουμε αυτή την ορίζουσα θα προκύψει ένα πολυώνυμο της μεταβλητής λ βαθμού n

$$|A - \lambda I_n| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \tag{4}$$

και ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A.

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Οι ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4) είναι οι ζητούμενες ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) του πίνακα A.

Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα A λέγεται **φάσμα** του πίνακα.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i μπορούμε να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ που αντιστοιχεί σε αυτή.

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Ιδιότητες ιδιοτιμών:

✓Το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα δηλαδή $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = Tr(A)$

✓Το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$.

✓Ένας πίνακας είναι μη ιδιάζον ($|A| \neq 0$) αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι διάφορες του μηδενός.

✓Ο πίνακας A και ο ανάστροφος A^T έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

✓Αν η ορίζουσα ενός πίνακας A είναι διάφορη του μηδενός, τότε ο πίνακας A και ο αντίστροφος του A^{-1} έχουν αντίστροφες ιδιοτιμές ($\lambda \neq 0$) και ίδια ιδιοδιανύσματα.

Άσκηση:

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A θα είναι,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = (3-\lambda)^2 - 2^2 = \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 5$.

Για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων δουλεύουμε για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά. Συγκεκριμένα:

Άσκηση:

Για $\lambda_1 = 1$

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{array}$$

Έχω μια εξίσωση με δύο αγνώστους, άρα το συγκεκριμένο σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Θέτω $x_2 = t_1$

$$2x_1 + 2t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -t_1$$

άρα το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, είναι

$$\boldsymbol{\delta_1} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{δηλ. άπειρα ιδιοδιανύσματα.}$$

Άσκηση:

Για $\lambda_2 = 5$

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{r} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{array}$$

Θέτουμε $x_2 = t_2$

$$-2x_1 + 2t_2 = 0 \Rightarrow x_1 = t_2$$

οπότε το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$, είναι

$$\boldsymbol{\delta}_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή και για αυτή την ιδιοτιμή έχουμε άπειρα ιδιοδιανύσματα.

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Παρατήρηση: Από τα άπειρα χαρακτηριστικά διανύσματα που αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή λ πολλές φορές επιλέγουμε αυτά που έχουν μήκος τη μονάδα (μοναδιαία διανύσματα).

Ορισμός

Μέτρο (μήκος) ενός διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ είναι η ποσότητα

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{5}$$

και καλείται **Ευκλείδια νόρμα**.

Για να μετατρέψουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ σε διάνυσμα μοναδιαίου μήκους (**κανονικοποίηση**), αρκεί να το διαιρέσουμε με το μήκος του.

$$\left|\left|\frac{\mathbf{x}}{\mu}\right|\right| = \sqrt{\frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\mu^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1.$$

Άσκηση:

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

άρα οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 5$.

Για $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\lambda_1=-1} \begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{matrix}$$

θέτουμε $x_2 = t_1$ οπότε $x_1 = -t_1$ άρα $\boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση:

Για $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\lambda_2=5}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $x_1 = t_2$ οπότε $x_2 = 2t_2$ άρα $\boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Για να κανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}$ και $\boldsymbol{\delta_2}$ θα βρούμε πρώτα το μέτρο τους, δηλαδή

$$\mu_1 = \sqrt{(-t_1)^2 + t_1^2} = |t_1|\sqrt{2} \quad \text{για το πρώτο και}$$

$$\mu_2 = \sqrt{t_2^2 + (2t_2)^2} = |t_2|\sqrt{5} \quad \text{για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα.}$$

Άσκηση:

Άρα τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 θα πρέπει να έχουν μήκος μονάδα, δηλαδή:

$$||\boldsymbol{\delta_1}|| = 1 \Longrightarrow |t_1|\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow t_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και}$$

$$||\boldsymbol{\delta_2}|| = 1 \Longrightarrow |t_2|\sqrt{5} = 1 \Longrightarrow t_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

άρα

$$\boldsymbol{\delta_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

με τα θετικά να λέγονται **δεξιά ιδιοδιανύσματα** και τα αρνητικά **αριστερά ιδιοδιανύσματα** μοναδιαίου μήκους.

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων

Έστω n διανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}$, $\boldsymbol{\delta_2}$, ... ,$\boldsymbol{\delta_n}$ και n πραγματικοί αριθμοί λ_1, λ_2, ..., λ_n. Τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta_i}$ θα λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν ισχύει η σχέση

$$\lambda_1\boldsymbol{\delta_1} + \lambda_2\boldsymbol{\delta_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{\delta_n} = \mathbf{0} \tag{1}$$

και οδηγεί υποχρεωτικά τα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Αν η ισότητα (1) ικανοποιείται με ένα τουλάχιστον από τα λ_i διάφορο του μηδενός, τότε τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}$, $\boldsymbol{\delta_2}$, ... ,$\boldsymbol{\delta_n}$ ονομάζονται **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Άσκηση

Αποδείξτε ότι τα διανύσματα,

$$\boldsymbol{\delta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λύση

Παίρνοντας τη σχέση,

$$\lambda_1\boldsymbol{\delta_1} + \lambda_2\boldsymbol{\delta_2} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

μας οδηγεί υποχρεωτικά στη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Άσκηση

Αποδείξτε ότι τα διανύσματα,

$$\boldsymbol{\delta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση

$$\lambda_1\boldsymbol{\delta_1} + \lambda_2\boldsymbol{\delta_2} + \lambda_3\boldsymbol{\delta_3} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$|A| = 0$ άρα υπάρχουν μη μηδενικά λ_1, λ_2, λ_3, που ικανοποιούν την $\lambda_1\boldsymbol{\delta_1} + \lambda_2\boldsymbol{\delta_2} + \lambda_3\boldsymbol{\delta_3} = \mathbf{0}$ και συνεπώς τα $\boldsymbol{\delta_1}$, $\boldsymbol{\delta_2}$ και $\boldsymbol{\delta_3}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων

Πρόταση 1

Έστω k διανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \ldots, \boldsymbol{\delta_k}$. Τα διανύσματα αυτά είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν ο πίνακας που έχει για στήλες (ή γραμμές) του τα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \ldots, \boldsymbol{\delta_k}$ είναι βαθμού k.

Αντίθετα αν ο βαθμός του πίνακα είναι μικρότερος του k, τότε τα k διανύσματα είναι **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων

Πρόταση 1

Έστω k διανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \ldots, \boldsymbol{\delta_k}$. Τα διανύσματα αυτά είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν ο πίνακας που έχει για στήλες (ή γραμμές) του τα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \ldots, \boldsymbol{\delta_k}$ είναι βαθμού k.

Αντίθετα αν ο βαθμός του πίνακα είναι μικρότερος του k, τότε τα k διανύσματα είναι **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Πρόταση 2

Αν έχουμε ένα πίνακα $n \times n$ με n απλές ιδιοτιμές, τότε τα ιδιοδιανύσματα του είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Άσκηση

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)^2 = 0$$

άρα $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ (διπλή).

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά.

Άσκηση

Για $\lambda_1 = 2$ θα έχουμε

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{r} -4x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ -2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - 4x_3 = 0. \end{array}$$

οπότε $x_1 = x_3 = 0$ ενώ $x_2 = t_1$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή είναι

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση

Για $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ η σχέση (2) δίνει το σύστημα

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ένα ομογενές σύστημα με μία εξίσωση και τρεις αγνώστους οπότε ο βαθμός του είναι προφανώς 1.

Άσκηση

Άρα θα θεωρήσουμε δύο αγνώστους ως παραμέτρους, εδώ π.χ. $x_2 = t_2$ και $x_3 = t_3$ και συνεπώς η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 = -4t_2 - 2t_3 \Rightarrow x_1 = 2t_2 + t_3.$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη διπλή ιδιοτιμή είναι

$$\boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} 2t_2 + t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Το τελευταίο αυτό διάνυσμα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή

$$\boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} 2t_2 + t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_2 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_3 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση

Άρα για την διπλή ιδιοτιμή έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα, για $t_3 = 0$ το $\boldsymbol{\delta_2}$ και για $t_2 = 0$ το $\boldsymbol{\delta_3}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\delta_3} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τα οποία μαζί με το $\boldsymbol{\delta_1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού αν πάρουμε την ορίζουσα ενός πίνακα με στήλες τα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε (π.χ. για $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, αλλά και για κάθε $t_1, t_2, t_3 \neq 0$), θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Άρα σύμφωνα με την πρόταση 1 που παραθέσαμε νωρίτερα, τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Διαγωνιοποίηση τετραγωνικού πίνακα

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A_{n\times n}$ που έχει απλές πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \dots, \boldsymbol{\delta_n}$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα $P_{n\times n}$ που έχει για στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A δηλαδή,

$$P_{n\times n} = (\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, ..., \boldsymbol{\delta_n})$$

και τον πίνακα $\Delta_{n\times n}$ ο οποίος είναι διαγώνιος και έχει για διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του A, δηλαδή:

$$\Delta_{n\times n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Διαγωνιοποίηση τετραγωνικού πίνακα

Ορισμός

Τότε λέμε ότι ο πίνακας A **διαγωνιοποιείται** και μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$A = P\Delta P^{-1}. \tag{1}$$

Λέμε επίσης ότι ο πίνακας A είναι **όμοιος** με τον διαγώνιο πίνακα Δ των ιδιοτιμών του ή τη σχέση (1) την ονομάζουμε **διαγωνιοποίηση** του πίνακα A ή ακόμη ότι ο πίνακας P **διαγωνιοποιεί** τον A.

Γενικεύοντας τον ορισμό θα λέμε ότι δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B είναι **όμοιοι** αν υπάρχει ομαλός τετραγωνικός πίνακας K τέτοιος ώστε να ισχύει

$$B = K^{-1}AK.$$

Άσκηση

Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

αν αυτό είναι εφικτό.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & 9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-8)(\lambda+2) = 0$$

άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$ και $\lambda_3 = -2$, δηλαδή απλές. Άρα ο πίνακας αυτός διαγωνιοποιείται.

Άσκηση

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$\boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_3} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

και στις αυθαίρετες σταθερές t_1, t_2, t_3 βάζουμε την τιμή $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ (ισχύει για κάθε τριάδα t_1, t_2, t_3) οπότε προκύπτει ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

και έχει για αντίστροφο τον πίνακα:

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Άρα ο πολλαπλασιασμός των πινάκων $P\Delta P^{-1}$ θα πρέπει να έχει σαν αποτέλεσμα τον αρχικό πίνακα A.

Πράγματι,

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{pmatrix} = A.$$

Ιδιότητες

✓Από τη σχέση της διαγωνιοποίησης εύκολα προκύπτει:

$$A = P\Delta P^{-1} \iff \Delta = P^{-1}AP$$

✓Αν n φυσικός αριθμός ισχύει η σχέση,

$$A^n = P\Delta^n P^{-1} \tag{1}$$

Αν ο πίνακας A είναι ομαλός τότε η (1) ισχύει και για αρνητικό ακέραιο.
✓Αν ένας πίνακας $A_{n\times n}$ έχει πολλαπλές πραγματικές ιδιοτιμές θα διαγωνιοποιείται όταν έχει ακριβώς n-γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
✓Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός (δηλ. $A = A^T$) τότε πάντα διαγωνιοποιείται.

Άσκηση

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ να υπολογισθεί ο A^{10}.

Λύση

$A^n = P\Delta^n P^{-1}$

Αρχικά υπολογίζω τις ιδιοτιμές του A.

$\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -1$.

Και στη συνέχεια υπολογίζω τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

$$\boldsymbol{\delta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

άρα

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{10} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας θα είναι,

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{10}+2 & 2\cdot 5^{10}-2 \\ 5^{10}-1 & 2\cdot 5^{10}+1 \end{pmatrix}.$$

Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα

✓Αν $A_{n\times n}$ είναι ένας **συμμετρικός πίνακας** τότε υπάρχουν n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και συνεπώς **πάντα διαγωνιοποιείται**.

✓Σε ένα συμμετρικό πίνακα τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta_k}$, $\boldsymbol{\delta_m}$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_k, λ_m, είναι μεταξύ τους κάθετα (ορθογώνια) δηλαδή ισχύει $\boldsymbol{\delta_k} \cdot \boldsymbol{\delta_m} = 0$.

✓Οι στήλες στους ορθογώνιους πίνακες είναι μοναδιαία διανύσματα και ανά δύο κάθετα μεταξύ τους δηλ. αν $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{x_j}$ δύο στήλες ενός ορθογώνιου πίνακα τότε ισχύει $\boldsymbol{x_i} \cdot \boldsymbol{x_j} = 0$ αν $i \neq j$ και $\boldsymbol{x_i} \cdot \boldsymbol{x_j} = 1$ αν $i = j$ και λέμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων των στηλών του $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ είναι ορθοκανονικό.

Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα

Αν λοιπόν έχουμε ένα **συμμετρικό πίνακα** $A_{n\times n}$ με **απλές ιδιοτιμές** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \dots, \boldsymbol{\delta_n}$ θα είναι ανά δύο **κάθετα** μεταξύ τους.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα P με στήλες τα $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \dots, \boldsymbol{\delta_n}$ και τον διαγώνιο πίνακα $\Delta_{n\times n}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οπότε τότε φυσικά θα ισχύει η σχέση διαγωνιοποίησης του πίνακα A δηλαδή,

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα

Αν όμως από τον πίνακα P πάρουμε τις στήλες του $\boldsymbol{\delta_i}$ και τις κανονικοποιήσουμε, δηλαδή φτιάξουμε στήλες - διανύσματα $\boldsymbol{q_i}$ που να έχουν μέτρο μονάδα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις,

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{\delta_1}}{||\boldsymbol{\delta_1}||}, \boldsymbol{q_2} = \frac{\boldsymbol{\delta_2}}{||\boldsymbol{\delta_2}||}, \cdots, \boldsymbol{q_n} = \frac{\boldsymbol{\delta_n}}{||\boldsymbol{\delta_n}||}$$

τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα $Q_{n\times n} = (\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \cdots, \boldsymbol{q_n})$ ο οποίος είναι ορθογώνιος και βέβαια διαγωνιοποιεί τον συμμετρικό πίνακα A δηλαδή ισχύει,

$$A = Q\Delta Q^{-1} \Longleftrightarrow A = Q\Delta Q^{T}. \tag{1}$$

ʼρα όταν έχουμε ένα **συμμετρικό πίνακα** A μπορούμε να τον διαγωνιοποιήσουμε βρίσκοντας **είτε ομαλό πίνακα** P ώστε να ισχύει η σχέση $A = P\Delta P^{-1}$, **είτε ορθογώνιο πίνακα** που επίσης τον διαγωνιοποιεί δηλαδή να ισχύει η σχέση (1).

Άσκηση

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ορθογώνιος πίνακας Q που τον διαγωνιοποιεί.

Λύση

Παρατηρούμε ότι ισχύει $A = A^T$ και συνεπώς ο πίνακας A είναι συμμετρικός, δηλαδή διαγωνιοποιείται.

Οι ιδιοτιμές του A είναι,

$$|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$$

τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_3} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

τα οποία, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση

Για $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ παίρνουμε τρία ιδιοδιανύσματα και κατασκευάζουμε τον πίνακα,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

θα ισχύει η σχέση διαγωνιοποίησης,

Άσκηση

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Κανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{\delta_1}}{||\boldsymbol{\delta_1}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q_2} = \frac{\boldsymbol{\delta_2}}{||\boldsymbol{\delta_2}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{q_3} = \frac{\boldsymbol{\delta_3}}{||\boldsymbol{\delta_3}||} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

οπότε παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{q_i} \cdot \boldsymbol{q_j} = 0$ αν $i \neq j$ και $\boldsymbol{q_i} \cdot \boldsymbol{q_j} = 1$ αν $i = j$ και συνεπώς ο πίνακας που κατασκευάζεται από τα $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος. Γνωρίζουμε όμως ότι $Q^{-1} = Q^T$. Ο πίνακας Q διαγωνιοποιεί τον συμμετρικό πίνακα A αφού,

$$Q \Delta Q^{-1} = Q \Delta Q^T =$$

Άσκηση

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$