Μαθηματικά Ι

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023 - 2024

Γραμμικά Συστήματα

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots &= \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους.

- Ένα σύστημα λέγεται **τετραγωνικό** ή σύστημα **Cramer** αν ο αριθμός των εξισώσεων του είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων.
- Ένα σύστημα λέγεται **ομογενές** αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι 0, διαφορικά το σύστημα λέγεται μη ομογενές.

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως εξής

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

όπου

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος
- $\mathbf{x}$ το διάνυσμα των αγνώστων και
- $\mathbf{b}$ το διάνυσμα των σταθερών όρων.

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Ο πίνακας

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ονομάζεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

Θεώρημα

Όταν το πεδίο αριθμών είναι απεριόριστο τότε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων θα έχει ή μία λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση.

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

- Συστήματα σε τριγωνική μορφή

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots &= \ldots \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

  - Ο πρώτος άγνωστος της κάθε εξίσωσης ονομάζεται ηγετικός άγνωστος.
  - Ένα τέτοιο σύστημα έχει πάντα μια μοναδική λύση!
  - Η λύση αυτού του συστήματος μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση προς τα πίσω.

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 9 \\
5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\
7x_3 - x_4 &= 3 \\
4x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

- Συστήματα σε κλιμακωτή μορφή.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 7 \\
x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 5 \\
3x_4 - 9x_5 &= 6
\end{aligned}
$$

  - Οι ηγετικοί άγνωστοι του συστήματος ονομάζονται βασικές μεταβλητές. Οι υπόλοιποι άγνωστοι ονομάζονται ελεύθερες μεταβλητές.

Θεώρημα

Ένα σύστημα εξισώσεων σε κλιμακωτή μορφή με r εξισώσεις και n αγνώστους

- Αν $n = r$ (τριγωνικό σύστημα) τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση.
- Αν $r < n$ (περισσότεροι άγνωστοι από ότι εξισώσεις) τότε το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

  Τότε μπορούμε αυθαίρετα να αναθέσουμε τιμές στις $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές και να λύσουμε μοναδικά ως προς τις υπόλοιπες r βασικές μεταβλητές.

Απαλοιφή Gauss

Κύρια μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων

- Σταδιακή ελάττωση του συστήματος που οδηγεί είτε σε ένα τριγωνικό ή κλιμακωτό σύστημα είτε σε εξισώσεις που δεν έχουν λύση.
- Σταδιακή αντικατάσταση προς τα πίσω για να βρεθεί η λύση του απλούστερου συστήματος.

Απαλοιφή Gauss

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

1º βήμα: Κανονικοποιούμε τις εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ x - 2y - \frac{3}{2}z &= 4 \\ x - 2y - \frac{8}{3}z &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x - 3\,y - 2z &= 6 \\
x - 2y - \frac{3}{2}z &= 4 \\
x - 2y - \frac{8}{3}z &= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

2º βήμα: Αφαιρούμε όλες τις εξισώσεις από την πρώτη εξίσωση αφήνοντας την πρώτη εξίσωση αναλλοίωτη.

$$
\begin{aligned}
x - 3y - 2z &= 6 \\
-y - \frac{1}{2}z &= 2 \\
-y + \frac{2}{3}z &= \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ x - 2y - \frac{3}{2}z &= 4 \\ x - 2y - \frac{8}{3}z &= \frac{5}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ -y - \frac{1}{2}z &= 2 \\ -y + \frac{2}{3}z &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνουμε τα δύο πρώτα βήματα στο υπόλοιπο σύστημα εκτός της πρώτης εξίσωσης.

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ y + \frac{1}{2}z &= -2 \\ y - \frac{2}{3}z &= -\frac{13}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ y + \frac{1}{2}z &= -2 \\ \frac{7}{6}z &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned} x - 3y \quad -2z &= \quad 6 \\ y \quad +\frac{1}{2}z &= -\,2 \\ \frac{7}{6}z &= \quad \frac{7}{3} \end{aligned}$$

3ο βήμα: Διαδικασία αντικατάστασης - Λύση συστήματος.

$$\begin{aligned} z &= \frac{7/3}{7/6} = 2 && \text{(από την τρίτη εξίσωση)} \\ y &= -2 - \frac{1}{2}z = -3 && \text{(από την δεύτερη εξίσωση)} \\ x &= 6 + 3y + 2z = 1 && \text{(από την πρώτη εξίσωση).} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

- $$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Έστω ότι έχουμε το σύστημα

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Θεώρημα

Ένα τετραγωνικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει μία μοναδική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
Σε αυτήν την περίπτωση η λύση είναι ο πίνακας

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Με χρήση πινάκων

Κάθε σύστημα Cramer μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

όπου A ο $n \times n$ πίνακας των συντελεστών των αγνώστων,

$\mathbf{x}$ το διάνυσμα των αγνώστων $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και

$\mathbf{b}$ οι σταθεροί όροι (τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων).

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \\ -3 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του A,

$$|A| = 7 \ , \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & 12 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & 12 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 14 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

άρα $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$.

Με χρήση οριζουσών

Έστω το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Δημιουργούμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Το σύστημα (2) έχει τη λύση

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \ , \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$$

αρκεί η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων $D \neq 0$.

Άσκηση:

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε την ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος καθώς και τις ορίζουσες D_x, D_y, D_z

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \\ -3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 7 \neq 0\,, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 8 & -4 & -3 \\ -5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 7\,,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = -21\,, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 14\,.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1\,, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{7} = -3\,, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{14}{7} = 2\,.$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

αφού τη μετατρέψετε σε άνω τριγωνική ορίζουσα.

3. Να υπολογισθεί η τιμή της $n \times n$ ορίζουσας όταν τα στοιχεία της a_{ij} είναι πραγματικοί αριθμοί και δίνονται από τη σχέση

$$a_{ij} = \begin{cases} n+1 & \text{όταν} \quad i = j \\ 1 & \text{όταν} \quad i \neq j \end{cases}$$

4. Αν $a^3 + b^3 = 1$ να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

5. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3z &= 3 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

με τρεις τρόπους (ορίζουσες, Gauss, πίνακες).

6. Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 3x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\ , \qquad \begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - 2y - z &= 0 \\ -x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Είναι φανερό ότι ένα τέτοιο σύστημα έχει πάντα λύση το $\mathbf{0}$. Η λύση αυτή ονομάζεται μηδενική ή τετριμμένη.

Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός (δηλαδή έχει ίσο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων) και μη ιδιάζον τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση το $\mathbf{0}$.

Ένα ομογενές σύστημα με περισσότερες αγνώστους από ότι εξισώσεις έχει μη μηδενικές λύσεις. Τα συστήματα αυτά έχουν άπειρες λύσεις

Τάξη ενός πίνακα

- Τάξη ενός πίνακα A $rank(A)$ ονομάζουμε το μέγιστο αριθμό γραμμών ή στηλών που είναι ανεξάρτητες.

  ή ισοδύναμα

  Τη διάσταση της μεγαλύτερης μη μηδενικής ορίζουσας.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n\times n}$ είναι μη ιδιάζον αν και μόνο αν η τάξη του είναι ίση με n.

- Γενικότερα τάξη του πίνακα $A_{m\times n}$ ονομάζεται η διάσταση του μεγαλύτερου μη ιδιάζοντος τετραγωνικού πίνακα που σχηματίζεται όταν επιλέξουμε μερικές (ή όλες τις γραμμές) του A και τις αντίστοιχες στήλες του A.

Βαθμός πίνακα

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο βαθμός των πινάκων A και B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο βαθμός του πίνακα A είναι $\text{rank}A = 3$ γιατί η μεγαλύτερη ορίζουσα του A είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Ο βαθμός του πίνακα B είναι $\text{rank}B = 2$ γιατί εξετάζουμε τις τιμές όλων (προσοχή όλων) των οριζουσών με τη μεγαλύτερη διάσταση και βρίσκουμε:

Βαθμός πίνακα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα προχωράμε στον έλεγχο των τιμών των οριζουσών μικρότερης διάστασης. Παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, άρα ο βαθμός του πίνακα B είναι $\text{rank}B = 2$.

Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους, έστω A ο πίνακας των συντελεστών και M ο επαυξημένος πίνακας.

- Το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν
$$rankA = rank(M)$$
- Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση αν και μόνο αν
$$rankA = rank(M) = n.$$
- Αν $rankA \neq rank(M)$ το σύστημα δεν έχει λύση.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 5 \end{aligned}$$

Λύση:
Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

άρα $\mathrm{rank}A = 3$. Συνεπώς το σύστημα έχει μία μοναδική λύση την $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Όμως:

Άσκηση:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $x = 5$, $y = -2$ και $z = -2$.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 2z - 4\omega &= 1 \\ x + 2y + 3z + 2\omega &= -1 \\ -x - y + 2z + \omega &= 2 \\ 3x + 9y + 3z - 6\omega &= 3 \end{aligned}$$

Λύση:
Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και παρατηρούμε ότι $|A| = 0$ οπότε συνεχίζουμε να ελέγξουμε τις 3×3 υποορίζουσες για να βρούμε το βαθμό του A.
Παίρνουμε την πρώτη υποορίζουσα,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

άρα $\text{rank}A = 3$.

Άσκηση:

Για να δούμε αν έχει λύση το σύστημα πρέπει να βρούμε και το βαθμό του επαυξημένου πίνακα του συστήματος:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε τις 5 υποορίζουσες 4×4 που έχει ο επαυξημένος πίνακας και ελέγχουμε την τιμή τους. Έτσι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = |A| \overset{\text{άρα}}{=} 0 \, , \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

Άσκηση:

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Δηλαδή όλες οι 4×4 ορίζουσες του επαυξημένου πίνακα είναι μηδέν άρα $\text{rank}E = 3$ αφού ήδη μία υποορίζουσα 3×3 του E (η D) την έχουμε ελέγξει και έχουμε βρει ότι είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς $\text{rank}A = \text{rank}E = 3 < n = 4$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - \text{rank}A = 4 - 3 = 1$ παράμετρο.

Άσκηση:

Το επόμενο βήμα καθορίζεται από την υποορίζουσα $D_{3\times 3}$ που βρήκαμε ότι η τιμή της είναι διάφορη του μηδενός (ή όποια άλλη υποορίζουσα 3×3 βρούμε διάφορη του μηδενός).
Παίρνουμε τις εξισώσεις και τους αγνώστους που 'εμπλέκονται' με αυτή την υποορίζουσα. Δηλαδή:

$$\begin{array}{r} \\ \text{1η εξίσωση} \rightarrow \\ \text{2η εξίσωση} \rightarrow \\ \text{3η εξίσωση} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow\text{x} & \downarrow\text{y} & \downarrow\text{z} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = -14 \neq 0$$

Η υποορίζουσα που εξετάσαμε και τη βρήκαμε διάφορη του μηδενός αφορά στις τρεις πρώτες εξισώσεις και στους τρεις πρώτους αγνώστους.
Έτσι παίρνουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις από το σύστημα (αγνοώντας προς το παρόν την τέταρτη) και τους τρεις πρώτους αγνώστους θεωρώντας τον τέταρτο άγνωστο ω σαν παράμετρο $\omega = t$ που θα πάει στο δεύτερο μέλος.

Άσκηση:

Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 2z &= 2 + 4t \\ x + 2y + 3z &= -1 - 2t \\ -x - \ \ y + 2z &= 2 - t \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad A^*\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^* \quad (1)$$

Το σύστημα αυτό είναι Cramer 3×3 και μάλιστα γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του είναι διάφορη του μηδενός αφού πρόκειται για την ορίζουσα D.
Άρα αυτό το σύστημα των τριών εξισώσεων με τους τρεις αγνώστους έχει μία και μοναδική λύση μόνο που αυτή η λύση έχει μέσα μία παράμετρο t άρα ουσιαστικά πρόκειται για σύστημα με άπειρες λύσεις.
Βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα του A^* που είναι,

$$A^{*^{-1}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 5/14 & -3/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \quad \text{ενώ} \quad \mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ -1 - 2t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

Άσκηση:

και συνεπώς η λύση του συστήματος (1) είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 5/14 & -3/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+4t \\ -1-2t \\ 2-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t-4 \\ 2(7t+6)/7 \\ (-7t-1)/7 \end{pmatrix}$$

’ρα οι άπειρες λύσεις του αρχικού συστήματος είναι:

$$x = -3t-4, \quad y = \frac{2}{7}\left(7t+6\right), \quad z = \frac{1}{7}(-7t-1), \quad \omega = t$$

Η λύση αυτή επαληθεύει και την τέταρτη εξίσωση του συστήματος.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 1 \\ x - 2y + \ \ z &= 0 \\ x + 2y + \ \ z &= 3 \end{aligned}$$

Λύση:
Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Βρίσκουμε τώρα τις 2×2 ορίζουσες της A. Η πρώτη είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

άρα rank$A = 2$. Συνεπώς χρειάζεται να βρούμε και τον επαυξημένο πίνακα E.

Όμως:

Άσκηση:

Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

οπότε θα βρούμε τις 3×3 υποορίζουσες του. Μία είναι η

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

άρα $\text{rank}E = 3$ δηλαδή $\text{rank}A \neq \text{rank}E$ συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Λύση
Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων που είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ενώ μία υποορίζουσα της π.χ. η

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

είναι διάφορη του μηδενός άρα $\text{rank}A = 2$.

Άσκηση:

Συνεπώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - \text{rank} A = = 3 - 2 = 1$ παράμετρο. ’ρα από το αρχικό σύστημα παίρνω τις εξισώσεις και τους αγνώστους που μας ‘δείχνει’ η 2×2 ορίζουσα που ελέγξαμε ότι είναι διάφορη του μηδενός θεωρώντας τον τρίτο άγνωστο z σαν παράμετρο t που πηγαίνει στο δεύτερο μέλος. ’ρα έχουμε το μη ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3t \\ -x + 2y &= t \end{aligned}$$

που έχει μία μοναδική (αλλά με παράμετρο) λύση την $x = -5t/3$ και $y = -t/3$. ’ρα οι άπειρες λύσεις του αρχικού συστήματος είναι

$$x = -\frac{5t}{3}\ , \qquad y = -\frac{t}{3}\ , \qquad z = t$$

και βέβαια αυτή η λύση επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση του συστήματος.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= \ \ 3 \\ x - \ \ y &= \ \ 2 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι μία υποορίζουσα, της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ είναι διάφορη του μηδενός άρα $\text{rank}A = 2$. Ελέγχουμε τον επαυξημένο και έχουμε

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

άρα $\text{rank}A = \text{rank}E = 2$ δηλαδή το σύστημα έχει λύση.

Άσκηση:

Παίρνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις γιατί την ορίζουσα των συντελεστών τους βρήκαμε ότι είναι διάφορη του μηδενός και έτσι γνωρίζουμε ότι έχουν μία λύση.

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε τη μοναδική λύση

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 3 \\ x - y = 2 \end{array} \Rightarrow x = 3 \quad \text{και} \quad y = 1$$

που επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση $3x + 2y = 11 \Rightarrow 11 = 11$.

Άσκηση:

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 6y + a^2 z &= a \\ -x + 2y + \ 5z &= 1 \\ 3x + 9y + \ 6z &= -3 \end{aligned}$$

όταν $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Λύση

Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & a^2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 60 - 15a^2$$

και παρατηρούμε ότι η παράμετρος a βρίσκεται στην τιμή της ορίζουσας. 'ρα θα βρούμε για ποιες τιμές του a μηδενίζεται η $|A|$ και για ποιες όχι.

Άσκηση:

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα μηδενίζεται όταν

$$|A| = 60 - 15a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2.$$

Βρίσκουμε και τον βαθμό του επαυξημένου, δηλαδή τις τέσσερις 3×3 ορίζουσες του (ήδη έχουμε την $|A|$ που είναι μια από τις 4)

$$|E_1| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15a - 30 = -15(a+2)$$

$$|E_2| = \begin{vmatrix} 2 & a & a^2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 21a + 42 = 21(a+2)$$

$$|E_3| = \begin{vmatrix} a & 6 & a^2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 15a^2 - 33a - 126 = 3(a+2)(5a-21)$$

'ρα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Άσκηση:

• 1η περίπτωση: Αν $a \neq \pm 2$ τότε η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός και το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{|A|}, \quad y = \frac{D_y}{|A|}, \quad z = \frac{D_z}{|A|}$$

όπου

$$D_x = E_3, \quad D_y = E_2, \quad D_z = E_1$$

οπότε η λύση είναι

$$x = \frac{21 - 5a}{5(a-2)}, \quad y = \frac{7}{5(2-a)}, \quad z = \frac{1}{a-2}.$$

• 2η περίπτωση: Αν $a = 2$ τότε η ορίζουσα $|A| = 0$ ενώ π.χ.
$|E_1| = -15(a+2) = -60 \neq 0$ άρα $\mathrm{rank}E = 3$ δηλαδή $\mathrm{rank}A \neq \mathrm{rank}E$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση:

• 3η περίπτωση: Αν $a = -2$ τότε η ορίζουσα $|A| = 0$ και $|E_1| = |E_2| = |E_3| = 0$. Αν πάρω μία 2×2 ορίζουσα του A π.χ. την

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

άρα $\text{rank}A = \text{rank}E = 2$ δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι παίρνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και τους δύο πρώτους αγνώστους (αυτή την ορίζουσα ελέγξαμε ότι είναι διάφορη του μηδενός) και θεωρούμε τον τρίτο άγνωστο $z = t$ σαν παράμετρο και πηγαίνει στο δεύτερο μέλος. Αγνοούμε προσωρινά την τρίτη εξίσωση αλλά στο τέλος θα πρέπει να επαληθεύεται από την λύση που θα βρούμε.

Άσκηση:

Έτσι παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= -2 - (-2)^2 t \\ -x + 2y &= 1 - 5t \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{11t-5}{5}, \quad y = -\frac{7t}{5}$$

και η τρίτη εξίσωση γίνεται

$$3x + 9y = -3 - 6t \Rightarrow 3\frac{11t-5}{5} - 9\frac{7t}{5} = -3 - 6t \Rightarrow$$
$$-3 - 6t = -3 - 6t \quad \text{(δηλαδή επαληθεύεται)}$$

ʼρα οι άπειρες λύσεις είναι

$$x = \frac{11t-5}{5}, \quad y = -\frac{7t}{5}, \quad z = t.$$