

Ύλη μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2022 - 2023

Κεφάλαιο Πρώτο

Διαφορικός Λογισμός Συνάρτησης μιας μεταβλητής

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

- Ορισμός παραγώγου
- Κανόνες παραγώγισης
- Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης
- Παραγώγιση παραμετρικών Συναρτήσεων
- Παραγώγιση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων
- Παραγώγιση Υπερβολικών Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων
- Παραγώγιση Αντίστροφων Συναρτήσεων (αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αντίστροφων υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων)
- Εξίσωση ευθείας και κάθετης ευθείας
- Ακρότατα Συνάρτησης μιας μεταβλητής και εφαρμογές τους
- Βασικά Θεωρήματα των παραγώγων (Θεώρημα Rolle, Θεώρημα Μέσης Τιμής)
- Διαφορικό: Γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογές του
- Μέθοδος Newton - Raphson
- Ανάπτυγμα Taylor - Ανάπτυγμα MacLaurin

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = (1 + x)^m$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k.$$

2. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor κατάλληλης συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το 0, υπολογίστε προσεγγιστικά (με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων) την τιμή του e^2 .
3. Με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x - 1}.$$

4. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο μηδέν την συνάρτηση $f(x) = (x^2 + x)e^x$.
5. Να υπολογίσετε την παράγωγο y' της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$\cos(x^2) - 2xe^{-y} - x \tan(\ln(y)) = 0.$$

6. Βρείτε την $\frac{dy}{dx}$ αν $y^2 = x^2 + \sin(xy)$

7. Να βρεθεί το πολυώνυμο Mac Laurin δευτέρου βαθμού για τη συνάρτηση $y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$y(1 + e^y) - x(3 + \cos x) = 0.$$

8. Να εξεταστεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{2x}-1} & x \neq 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases}$

9. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $y = y(x)$ η οποία ορίζεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση $y^2 + 2xy + x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

10. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία ορίζεται από τη σχέση $xy^2 - x^2y = 16$.

11. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $y = y(x)$ η οποία ορίζεται σε παραμετρική μορφή από τις σχέσεις $x = \frac{t-1}{t}$, $y = \frac{t^2}{t+1}$.

12. Βρείτε όλες τις παραγώγους $y^{(n)}$ της συνάρτησης $y = \sqrt{2x-1}$.

Κεφάλαιο Δεύτερο

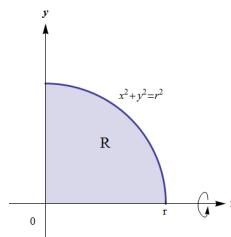
Ολοκληρωτικός Λογισμός Συνάρτησης μιας μεταβλητής

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

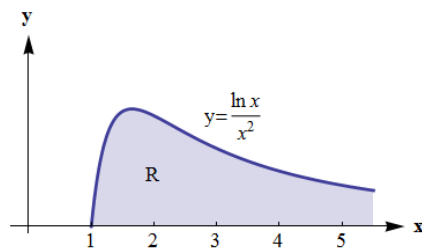
- Αόριστο ολοκλήρωμα
- Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων
- Ολοκληρώματα ειδικής μορφής
 - συναρτήσεις με ριζικά
 - τριγωνομετρικών συναρτήσεων
- Ορισμένα ολοκληρώματα
- Εφαρμογές ορισμένων ολοκληρωμάτων
 - Εμβαδόν
 - Μήκος καμπύλης
 - Όγκος στερεού από περιστροφή
- Γενικευμένα ολοκληρώματα

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Βρείτε την απόσταση που διανύει ένα σημείο $P(x, y)$, του οποίου η θέση κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τις σχέσεις $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$ με το t από $t = 0$ έως $t = \pi/2$. **(Απ. $\sqrt{2}$)**
2. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\sin x)$ όταν $\pi/4 < x < \pi/2$. **(Απ. $-\ln(\tan \frac{\pi}{8}) \simeq 0.881374$)**
3. Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει όταν περιστρέψουμε την $x^2 + y^2 = r^2$ με $x, y > 0$, γύρω από τον άξονα xx' . **(Απ. $2\pi r^3/3$)**



4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής R του παρακάτω σχήματος. **(Απ. 1)**
5. Να λυθεί η εξίσωση $\int_1^x \frac{dt}{t^2 - 2t + 5} = \frac{\pi}{24}$.



6. Βρείτε το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ από το $x = 1$ έως το $x = 2$.

7. Αν η συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ είναι συνεχής και άρτια, να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^a f(x) dx.$$

8. Να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$.

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$.

10. Αν $x > 0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int (\ln x)^2 dx.$$

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \arctan x dx$

Κεφάλαιο Τρίτο

Ακολουθίες και Σειρές

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

- Ορισμός Ακολουθίας
- Όριο Ακολουθίας
- Ιδιότητες ορίων ακολουθίας
- Ορισμός Σειράς
- Ειδικοί τύποι σειρών
 - Γεωμετρική Σειρά
 - Τηλεσκοπική Σειρά (Γενικευμένη τηλεσκοπική σειρά)
 - Αρμονική Σειρά (Γενικευμένη αρμονική σειρά)
- Ιδιότητες συγκλινουσών σειρών
- Κριτήρια σύγκλισης σειρών
- Εναλλασσόμενες σειρές
- Απόλυτη σύγκλιση σειρών
- Δυναμοσειρές
- Ακτίνα και διάστημα σύγκλισης δυναμοσειρών

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} \text{ και } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

2. Να βρεθεί το άθροισμά της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

3. Να εξεταστεί πλήρως ως προς τη σύγκλιση η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

4. Να εξεταστεί πλήρως ως προς τη σύγκλιση η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

5. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln 2^n}$$

6. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}.$$

7. Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης

$$\text{της δυναμοσειράς } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n.$$

8. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

9. Να υπολογισθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} (x-2)^{2n}.$$

Κεφάλαιο Τέταρτο

Γραμμική Άλγεβρα

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1. Πίνακες - Ορίζουσες
 - (α) Ορισμός Πίνακα
 - (β) Είδη πινάκων
 - (γ) Πράξεις πινάκων
 - (δ) Αντίστροφος ενός πίνακα
 - (ε) Βασικές ιδιότητες οριζουσών
2. Γραμμικά Συστήματα
 - (α) Απαλοιφή Gauss
 - (β) Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη χρήση πινάκων
 - (γ) Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη χρήση οριζουσών
 - (δ) Ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων
 - (ε) Διερεύνηση γραμμικών συστημάτων
3. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων
4. Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων
5. Διαγωνιοποίηση πινάκων

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Ένας τετραγωνικός πίνακα A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 = 2A + I$. Αποδείξτε ότι είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφο του.
2. Να υπολογιστούν οι n -οστές δυνάμεις των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 1 \\ 1+b^2 & b & 1 \\ 1+c^2 & c & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

4. Να λυθεί η εξίσωση,

$$\begin{vmatrix} x^3 - 1 & x^2 - 1 & x - 1 \\ x^3 - 8 & x^2 - 4 & x - 2 \\ x^3 - 27 & x^2 - 9 & x - 3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + ay + az &= -3 \\ 2x + y + bz &= a + 1 \end{aligned}$$

6. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + cy + az &= 0 \\ cx + ay + bz &= 0 \end{aligned}$$

έχει και μη τετριμμένες λύσεις αν και μόνο αν

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

7. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Να εξεταστεί αν ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

διαγωνιοποιείται. Αν ναι, να βρεθεί μία διαγωνιοποίηση του.

9. Να βρεθεί ο A^{13} , αν

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Κεφάλαιο Πέμπτο

Μιγαδικοί αριθμοί

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1. Ορισμός μιγαδικού αριθμού
2. Πράξεις μιγαδικών αριθμών
3. Μέτρο μιγαδικού αριθμού
4. Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού
5. Πράξεις μιγαδικών σε τριγωνομετρική μορφή
6. Ρίζες μιγαδικών αριθμών