Διατμητική τάση στο τοίχωμα

Θεώρηση μονοφασικής ροής

Στη μόνιμη, ασυμπίεστη, μονοφασική ροή σε αγωγούς σταθερής διατομής, η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι ευθέως ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλαδή :

$$\tau_o = \lambda \cdot \frac{\rho}{8} \cdot U^2 \qquad\qquad \tau_o = \frac{f \cdot \rho \cdot U^2}{2} \quad (5.66) \qquad\qquad (5.65)$$

Θεωρείται ότι η εξίσωση αυτή ισχύει και στην περίπτωση της διφασικής ροής για τον annular τύπο ροής, όπου κοντά στο τοίχωμα ρέει το υγρό, και έτσι τ_o είναι η διατμητική τάση μεταξύ του υγρού και του τοιχώματος του αγωγού.

Έτσι η εξίσωση (5.66) δίνει για την περίπτωση της διφασικής annular ροής :

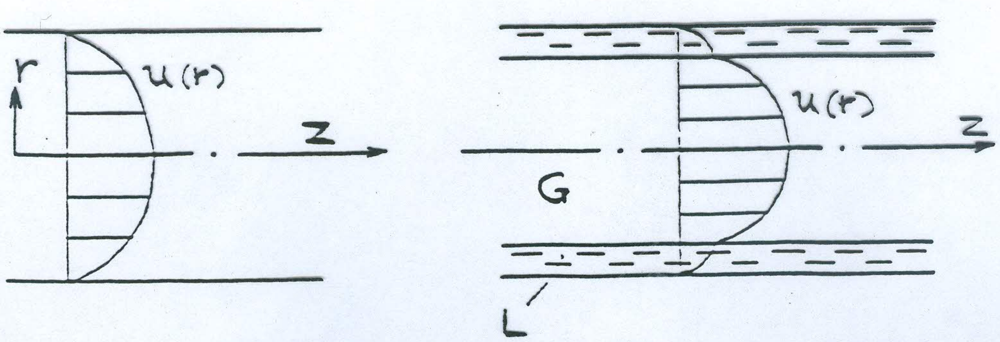
$$\tau_o = \frac{f \cdot \rho_L \cdot u_L^2}{2} = \frac{f \cdot \rho_L \cdot \dot{m}_L^2}{2 \cdot \rho_L^2 \cdot (1-\varepsilon_G)^2} \Rightarrow \tau_o = \frac{f \cdot \dot{m}_L \cdot |\dot{m}_L|}{2 \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G)^2} \qquad (5.68)$$

Επίσης η περιβρεχόμενη περίμετρος για αγωγό κυκλικής διατομής δίνεται από την σχέση :

$$\Pi = \pi \cdot D \qquad (5.69)$$

Τελικά ο όρος που δίνει την απώλεια πίεσης λόγω τριβής δίνεται, για την περίπτωση του δακτυλιοειδούς τύπου (annular) ροής, από τη σχέση :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{f \cdot \dot{m}_L \cdot |\dot{m}_L|}{2 \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G)^2} \cdot \frac{\pi \cdot D}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \Rightarrow \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{2 \cdot (1-x)^2 \cdot f \cdot \dot{m} \cdot |\dot{m}|}{\rho_L \cdot D \cdot (1-\varepsilon_G)^2} \qquad (5.70)$$



Σχήμα 5.5: Σύγκριση κατανομών ταχύτητας σε μονοφασική και διφασική annular ροή.

Διατμητική τάση στην stratified ροή

Στην περίπτωση της stratified ροής, ο όρος που δηλώνει την απώλεια πίεσης λόγω τριβής $\tau_o \cdot \Pi / A$, χωρίζεται σε δύο όρους, γιατί όπως δείχνει και το σχήμα 5.4, το υγρό ρέει στο κάτω μέρος του αγωγού χωριστά από το αέριο.

Έτσι ισχύει :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \left(\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A}\right)_G + \left(\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A}\right)_L \Rightarrow \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{(\tau_o)_G \cdot \Pi_G}{A_G} + \frac{(\tau_o)_L \cdot \Pi_L}{A_L} \qquad (5.71)$$

όπου $(\tau_o)_G$ και $(\tau_o)_L$ είναι η διατμητική τάση μονοφασικής ροής αερίου και υγρού αντίστοιχα. Δηλαδή σαν το αέριο ή το υγρό αντίστοιχα να έρεε μόνο του μέσα στον αγωγό.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στην παράγραφο 5.1.4. για το κλάσμα κενού στη stratified ροή, υπολογίζεται η γωνία θ με τη μέθοδο Newton-Raphson. Οπότε υπολογίζονται έτσι και οι περίμετροι Π_G, Π_L και οι επιφάνειες A_G, A_L της σχέσης (5.71).

Ο όρος $(\tau_o)_G$ υπολογίζεται σαν να είχαμε μονοφασική ροή αερίου από τη σχέση :

$$(\tau_o)_G = f_G \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_G \cdot u_G^2 \qquad (5.72)$$

όπου η ταχύτητα μονοφασικής ροής αερίου είναι :

$$u_G = \frac{\dot{m} \cdot x}{\rho_G} \qquad (5.73)$$

και ο συντελεστής τριβής f_G είναι $f_G=16/Re_G$ για στρωτή ροή ή δίνεται από τη σχέση του Wood για τυρβώδη ροή :

$$f_G = A + B \cdot (Re)^{-C} \qquad Re_G = \frac{\dot{m} \cdot x \cdot D_G}{\mu_G} \qquad (5.74)$$

όπου είναι :

$$A = 0.094 \cdot \left(\frac{k}{D}\right)^{0.225} + 0.53 \cdot \frac{k}{D} \qquad B = 88 \cdot \left(\frac{k}{D}\right)^{0.44} \qquad C = 1.62 \cdot \left(\frac{k}{D}\right)^{0.134}$$

Διατμητική τάση στην annular ροή

Η διατμητική τάση τοιχώματος στην annular ροή δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_o = f_{LF} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot u_{LF}^2 \tag{5.79}$$

όπου ο συντελεστής τριβής f_{LF} υγρού φιλμ είναι $f_{LF}=16/Re_{LF}$ για στρωτή ροή ή δίνεται από τη σχέση του Wood για τυρβώδη ροή. Ο αριθμός Reynolds υγρού φιλμ Re_{LF} δίνεται από τη σχέση :

$$Re_{LF} = \frac{\dot{m}_{LF} \cdot D}{\mu_L} \tag{5.80}$$

όπου $\dot{m}_{LF}$ είναι η παροχή της υγρής φάσης ανά μονάδα επιφανείας. Επίσης η μέση ταχύτητα υγρού φιλμ u_{LF} δίνεται :

$$u_{LF} = \frac{\dot{m}_{LF} \cdot D}{4 \cdot \rho_L \cdot \delta} \tag{5.81}$$

όπου δ είναι το πάχος του υγρού φιλμ, που φαίνεται στο σχήμα 5.5.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση συνέχειας για τις δύο φάσεις στον αγωγό είναι :

$$Q_L = u_L \cdot A_L \tag{5.82}$$

$$Q_G = u_G \cdot A_G \tag{5.83}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (5.82) και (5.83) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις :

$$A_G = \frac{\pi \cdot D_a^2}{4} \tag{5.84}$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \tag{5.85}$$

$$A_L = A - A_G \tag{5.86}$$

προκύπτει η σχέση :

$$\frac{D^2}{D_a^2} = \frac{Q_L}{Q_G} \cdot \frac{u_G}{u_L} + 1 \tag{5.87}$$

οπότε λύνοντας ως προς D_a έχουμε :

$$D_a = \frac{D}{\sqrt{\frac{Q_L}{Q_G} \cdot \frac{u_G}{u_L} + 1}} \tag{5.88}$$

Για τον υπολογισμό της D_a από τη σχ.(5.88), γίνεται πρώτα ο υπολογισμός των αντίστοιχων μεγεθών από τις ακόλουθες σχέσεις :

$$u_G = \frac{\dot{m}_G}{\rho_G \cdot \varepsilon_G} \tag{5.89}$$

$$u_L = \frac{\dot{m}_L}{\rho_L \cdot (1 - \varepsilon_G)} \tag{5.90}$$

$$Q_G = \frac{\dot{m}_G}{\rho_G} \tag{5.91}$$

$$Q_L = \frac{\dot{m}_L}{\rho_L} \tag{5.92}$$

Οπότε το πάχος του υγρού φιλμ δίνεται από την απλή σχέση :

$$\delta = \frac{D - D_a}{2} \tag{5.93}$$

Διατμητική τάση στη bubble ροή

Για τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα στην περίπτωση του bubble τύπου ροής έχουν δημιουργηθεί τέσσερα μοντέλα.

Μοντέλο των Beggs - Brill

Για το μοντέλο αυτό ο συντελεστής τριβής f_{TP} με το τοίχωμα δίνεται από τη σχέση :

$$f_{TP} = f_n \cdot \frac{f_{TP}}{f_n} \tag{5.94}$$

Ο συντελεστής τριβής f_n για μονοφασική ροή δίνεται από τη σχέση των Colebrook-White :

$$\frac{1}{\sqrt{f_n}} = 1.14 - 2 \cdot \ln\left(\frac{k}{D} + \frac{21.25}{Re^{0.9}}\right) \tag{5.95}$$

όπου k η απόλυτη τραχύτητα του αγωγού.

Ο αριθμός Reynolds δίνεται από τη σχέση :

$$Re = \frac{\rho_n \cdot U_m \cdot D}{\mu_n} \tag{5.96}$$

και τα υπόλοιπα μεγέθη από τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\rho_n = \rho_L \cdot \lambda_L + \rho_G \cdot \lambda_G \tag{5.97}$$

$$\mu_n = \mu_L \cdot \lambda_L + \mu_G \cdot \lambda_G \tag{5.98}$$

$$\lambda_G = \frac{U_G}{U_m} \tag{5.99.α}$$

$$\lambda_L = \frac{U_L}{U_m} \tag{5.99.β}$$

Ο λόγος του συντελεστή τριβής διφασικής ροής f_{TP} προς το συντελεστή τριβής μονοφασικής ροής f_n, δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{f_{TP}}{f_n} = e^S \qquad (5.100)$$

όπου :

$$S = \frac{\ln y}{-0.0523 + 3.182 \cdot \ln y - 0.8725 \cdot \ln^2 y + 0.01853 \cdot \ln^4 y} \qquad (5.101)$$

$$y = \frac{\lambda_L}{H_L^2(\alpha)} \qquad (5.102)$$

Το μέγεθος $H_L(\alpha)$ έχει υπολογιστεί από τη σχέση (5.56). Για τιμές του y στο διάστημα $1<y<1.2$ το S δίνεται :

$$S = \ln(2.2y - 1.2) \qquad (5.103)$$

Οπότε η διατμητική τάση στο τοίχωμα, θεωρώντας ομογενή ροή με ταχύτητα U_m, δίνεται :

$$\tau_o = \frac{f_{TP} \cdot \rho_n \cdot U_m^2}{8} \qquad (5.104)$$

Ο όρος της πτώσης πίεσης λόγω τριβής είναι επομένως :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{\tau_o \cdot \pi \cdot D}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \Rightarrow \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{f_{TP} \cdot \rho_n \cdot U_m^2}{2 \cdot D} \qquad (5.105)$$

Μοντέλο του Wallis

Στη bubble ροή μικρών φυσαλίδων η θεώρηση μονοφασικής ροής είναι μια καλή προσέγγιση για τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα. Έτσι η διατμητική τάση στο τοίχωμα δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_o = C_f \cdot \frac{1}{2} \cdot G \cdot j \tag{5.106}$$

όπου :

$$G = \dot{m}_G + \dot{m}_L \tag{5.107}$$

$$j = j_L + j_G = \frac{\dot{m}_L}{\rho_L} + \frac{\dot{m}_G}{\rho_G} \tag{5.108}$$

Ο συντελεστής τριβής C_f για αριθμούς Reynolds έως 10^5, είναι με καλή προσέγγιση $C_f=0.005$, όπου :

$$Re = \frac{G \cdot D}{\mu} \tag{5.109}$$

και $\mu=\mu_L$ με καλή προσέγγιση.

Έτσι η πτώση πίεσης λόγω τριβής δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{C_f \cdot G \cdot j}{2} \cdot \frac{4}{D} \Rightarrow \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{2 \cdot C_f \cdot G \cdot j}{D} \tag{5.110}$$

Μοντέλο του FML

Κατά τη ροή τους οι φυσαλίδες αναπτύσουν μια δύναμη αντίστασης D_b στη ροή του υγρού. Ανάγοντας τη δύναμη αυτή στην επιφάνεια ενός στοιχείου του αγωγού, μήκους Δz και διαμέτρου D προκύπτει μια διατμητική τάση, θεωρούμενη σαν διατμητική τάση στο τοίχωμα, η οποία είναι :

$$\tau_{Wb} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{bi}}{\pi \cdot D \cdot \Delta z} = \frac{C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot (u_L - u_G)^2 \cdot A_G}{\pi \cdot D \cdot \Delta z} \quad (5.111)$$

όπου C_D ο συντελεστής αντίστασης φυσαλίδων, A_G η επιφάνεια του αγωγού που καταλαμβάνεται από τις φυσαλίδες, και είναι :

$$A_G = n \cdot A_b = \varepsilon_G \cdot A \quad (5.112)$$

και n είναι ο αριθμός των φυσαλίδων στη διατομή του αγωγού και A_b η διατομή της φυσαλίδας.

Έτσι από τις σχ.(5.111) και (5.112) προκύπτει :

$$\tau_{Wb} = \frac{C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot (u_L - u_G)^2 \cdot \varepsilon_G \cdot A}{\pi \cdot D \cdot \Delta z} \quad (5.113)$$

Επίσης αναπτύσσεται και διατμητική τάση στο τοίχωμα λόγω της επαφής του υγρού με αυτό. Η αέρια φάση θεωρείται ότι δεν έρχεται σε άμεση επαφή με το τοίχωμα του αγωγού. Έτσι θεωρώντας μονοφασική ροή υγρού η διατμητική αυτή τάση δίνεται :

$$\tau_{Wb} = \frac{f_L \cdot \rho_L \cdot u_L^2}{8} \quad (5.114)$$

Οπότε η διατμητική τάση στο τοίχωμα δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_o = \tau_{Wb} + \tau_{WL} \quad (5.115)$$

και επομένως ο όρος της πτώσης πίεσης λόγω τριβής είναι :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{(\tau_{Wb} + \tau_{WL}) \cdot 4}{D} \quad (5.116)$$

Μοντέλο των Jayanti - Hewitt

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό υπάρχουν τρεις συντελεστές διάτμησης.

$$C_{WL} = \frac{1}{2} \cdot f_{WL} \cdot \rho_L \cdot \frac{4}{D} \cdot \frac{V_m^2}{V_L^2} \tag{5.117}$$

$$C_{WG}=0$$

$$C_i = \frac{3}{4} \cdot C_D \cdot \rho_L \cdot \frac{\varepsilon_G}{d_b} \tag{5.118}$$

και ορίζονται έτσι ώστε πολλαπλασιαζόμενοι με το τετράγωνο μιας κατάλληλης ταχύτητας, να δίνουν δύναμη ανά μονάδα όγκου του αγωγού. Έτσι ο συντελεστής διάτμησης C_i πολλαπλασιαζόμενος με V_r^2, όπου V_r η σχετική ταχύτητα των δύο φάσεων, δίνει την ολική δύναμη αντίστασης ανά μονάδα όγκου στον αγωγό :

$$F_i = C_i \cdot V_r^2 \tag{5.119}$$

Η ολική δύναμη αντίστασης στο στοιχείο του αγωγού μήκους Δz είναι επομένως :

$$F_b = F_i \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta z \tag{5.120}$$

Επίσης στο υγρό αναπτύσσεται μια δύναμη αντίστασης λόγω της επαφής του με το τοίχωμα του στοιχείου αγωγού :

$$F_{WL} = C_{WL} \cdot V_L^2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta z \tag{5.121}$$

όπου V_L είναι η φαινομενική ταχύτητα του υγρού. Έτσι η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στο τοίχωμα του στοιχείου αγωγού είναι :

$$\tau_o = \frac{F_b + F_{WL}}{\pi \cdot D \cdot \Delta z} \tag{5.122}$$

Η πτώση πίεσης λόγω τριβής είναι επομένως :

$$\frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{\tau_o \cdot 4}{D} \tag{5.123}$$

Διατμητική τάση στο ομογενές μοντέλο ροής

Η διατμητική τάση στο τοίχωμα γι' αυτή την περίπτωση προκύπτει από την αντίστοιχη σχέση για τη μονοφασική ροή ως εξής :

$$\tau_o = f_H \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_H \cdot u_H^2 \tag{5.124}$$

όπου ο συντελεστής τριβής f_H είναι $f_H=16/Re_H$ για στρωτή ροή ή δίνεται από τη σχέση του Wood για τυρβώδη ροή. Ο αριθμός Reynolds δίνεται :

$$Re_H = \frac{\rho_H \cdot u_H \cdot D}{\mu_H} \tag{5.125}$$

όπου :

$$\rho_H = \rho_{TP} = \rho_G \cdot \varepsilon_G + (1-\varepsilon_G) \cdot \rho_L \tag{5.126}$$

$$u_H = u_G = u_L = \frac{\dot{m}_G}{\rho_G \cdot \varepsilon_G} \tag{5.127}$$

$$\frac{1}{\mu_H} = \frac{1}{\mu_{TP}} = \frac{x}{\mu_G} + \frac{1-x}{\mu_L} \tag{5.128}$$