ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ ΥΓΡΩΝ-ΑΕΡΙΩΝ

$$\Delta P = \int_0^L \frac{dP}{dz} \cdot dz$$

$$\varepsilon_G = \frac{A_G}{A}$$

$$x = \frac{\dot{m}_G}{\dot{m}_G + \dot{m}_L}$$

$$U_G = \frac{Q_G}{A}$$

$$U_L = \frac{Q_L}{A}$$

$$u_G = \frac{U_G}{\varepsilon_G} = \frac{Q_G}{\varepsilon_G \cdot A}$$

$$u_L = \frac{U_L}{1-\varepsilon_G} = \frac{Q_L}{(1-\varepsilon_G) \cdot A}$$

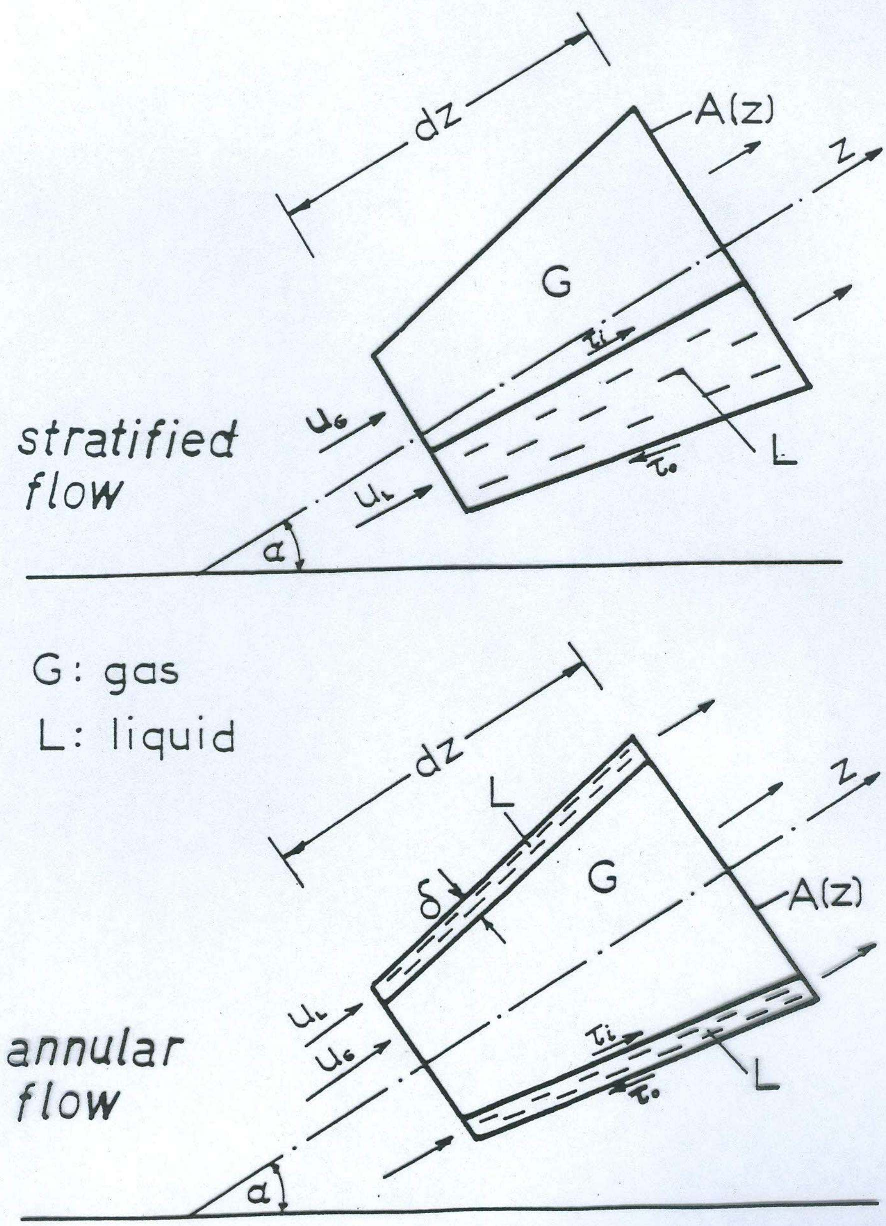
$$S = \frac{u_G}{u_L} = \frac{U_G}{U_L} \cdot \frac{1-\varepsilon_G}{\varepsilon_G}$$

$$\rho_{TP} = (1-\varepsilon_G) \cdot \rho_L + \varepsilon_G \cdot \rho_G$$

$$\varepsilon_G = \frac{x}{x + S \cdot (1-x) \cdot \frac{\rho_G}{\rho_L}}$$

$$u_G = u_L = u_H$$

$$S = \frac{u_G}{u_L} = 1$$


dz
A(z)
z
G
τ_i
u_G
L
stratified flow
τ_0
u_L
α
G: gas
L: liquid
dz
z
L
G
δ
A(z)
u_L
u_G
annular flow
τ_i
L
τ_0
α

Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση συνέχειας δίνει τον ισολογισμό μάζας για την υγρή φάση και μπορεί να εκφραστεί με τους όρους :

$$\dot{m}_s = \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L \cdot A + \underbrace{\delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L \cdot A\right]}_{\text{term 1}} + \dot{m}_e \cdot \delta z -$$

$$\underbrace{-\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L \cdot A}_{\text{term 2}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A \cdot \delta z\right]}_{\text{term 3}} \qquad (4.11)$$

όπου :

$\dot{m}_s$: είναι ο όρος που εκφράζει το ποσόν της μάζας που δημιουργείται στον όγκο ελέγχου και που για την περίπτωση αυτή είναι μηδέν,

term 1 : είναι ο όρος που εκφράζει το ποσόν της μάζας εκροής,

term 2 : είναι ο όρος που εκφράζει το ποσόν της μάζας εισροής,

term 3 : είναι ο όρος που εκφράζει το ποσόν της αποθηκευμένης μάζας.

Στην εξίσωση (4.11) $\dot{m}_e$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του υγρού σε αέριο (ατμός) ανά μονάδα μήκους. Με απλοποίηση η εξίσωση αυτή γίνεται :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_L \cdot u_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A\right] = -\dot{m}_e \qquad (4.12)$$

Μια παρόμοια εξίσωση για τον ισολογισμό μάζας της αέριας φάσης είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G \cdot A) = \dot{m}_e \qquad (4.13)$$

Αθροίζοντας αυτές τις δύο εξισώσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι :

$$\dot{m} = \rho_L \cdot u_L \cdot (1-\varepsilon_G) + \rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G \qquad (4.14)$$

προκύπτει η εξίσωση συνέχειας για το διφασικό μίγμα :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{TP} \cdot A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m} \cdot A) = 0} \qquad (4.15)$$

Εξίσωση ορμής

Από την αρχή διατήρησης της ορμής και την εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή της για την υγρή φάση, οι όροι ορμής είναι οι παρακάτω :

$$\dot{M}_L \cdot u_L + \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\dot{M}_L \cdot u_L) - \dot{M}_L \cdot u_L + \frac{\partial}{\partial t}\left[u_L \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A \cdot \delta z\right] \tag{4.16}$$

όπου $\dot{M}_L$ είναι η παροχή της υγρής φάσης. Ξέροντας ότι :

$$\dot{M}_L = u_L \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A \tag{4.17}$$

και απλοποιώντας, η σχ.(4.16) γίνεται :

$$\delta z \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[u_L^2 \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[u_L \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A\right]\right\} \tag{4.18}$$

Το άθροισμα των ενεργών δυνάμεων στον όγκο ελέγχου γράφεται ως εξής :

$$P \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A - \left\{P \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A + \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[P \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A\right]\right\} - \left\{-P \cdot \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\varepsilon_G) \cdot A\right]\right\} -$$

$$-g \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot A \cdot \delta z \cdot \sin a - \tau_o \cdot \Pi \cdot \delta z + \tau_{im} \cdot \Pi_i \cdot \delta z \tag{4.19}$$

Με εξίσωση των όρων ορμής και των ενεργών δυνάμεων στον όγκο ελέγχου προκύπτει :

$$-(1-\varepsilon_G) \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - g \cdot \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot \sin a - \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} + \frac{\tau_{im} \cdot \Pi_i}{A} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_L \cdot u_L \cdot (1-\varepsilon_G)\right] +$$

$$+\frac{1}{A} \cdot \left[\rho_L \cdot u_L \cdot (1-\varepsilon_G)\right] \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_L \cdot A \cdot u_L^2 \cdot (1-\varepsilon_G)\right] \tag{4.20}$$

Αντίστοιχα για την αέρια φάση ισχύει :

$$-\varepsilon_G \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - g \cdot \rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot \sin\alpha - \frac{\tau_{im} \cdot \Pi_i}{A} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G) + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G) +$$

$$+\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\rho_G \cdot A \cdot \varepsilon_G \cdot u_G^2) \tag{4.21}$$

Με πρόσθεση των δύο αυτών εξισώσεων προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ορμής για το μίγμα :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - g \cdot \rho_{TP} \cdot \sin\alpha - \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L + \rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G\right] +$$

$$+\frac{1}{A} \cdot \left[\rho_L \cdot u_L \cdot (1-\varepsilon_G) + \rho_G \cdot u_G \cdot \varepsilon_G\right] \cdot \frac{\partial A}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_L \cdot A \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L^2 + \rho_G \cdot A \cdot \varepsilon_G \cdot u_G^2\right] \tag{4.22}$$

Η σχ.(4.22) μπορεί να ξαναγραφεί σε όρους της παροχής μάζας $\dot{m}$ και της ποιότητας x, αν εισαχθούν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\dot{m} = \rho_L \cdot (1-\varepsilon_G) \cdot u_L + \rho_G \cdot \varepsilon_G \cdot u_G \tag{4.23}$$

$$u_L = \frac{\dot{m} \cdot (1-x)}{\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G)} \tag{4.24}$$

$$u_G = \frac{\dot{m} \cdot x}{\rho_G \cdot \varepsilon_G} \tag{4.25}$$

Οπότε η εξίσωση διατήρησης της ορμής για το μίγμα γίνεται :

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} - g \cdot \rho_{TP} \cdot \sin\alpha - \frac{\tau_o \cdot \Pi}{A} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\dot{m}}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left\{\dot{m}^2 \cdot A \cdot \left(\frac{(1-x)^2}{\rho_L \cdot (1-\varepsilon_G)} + \frac{x^2}{\rho_G \cdot \varepsilon_G}\right)\right\}} \tag{4.26}$$