3 Ομογενής ροή

Το μίγμα θεωρείται σαν ιδεατό ρευστό, οι ιδιότητες του οποίου αποτελούν κατά κάποιο τρόπο το μέσο όρο των ιδιοτήτων των δύο συστατικών.
Το διασκορπισμένο υλικό είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο φορέα, δηλ. η συγκέντρωση μάζας είναι σταθερή σε όλη τη διατομή, και οι ταχύτητες των δύο συστατικών θεωρούνται ίσες.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό της ομογενούς ροής οι σχέσεις που ορίσθηκαν προηγουμένως, απλοποιούνται στις εξής μορφές:

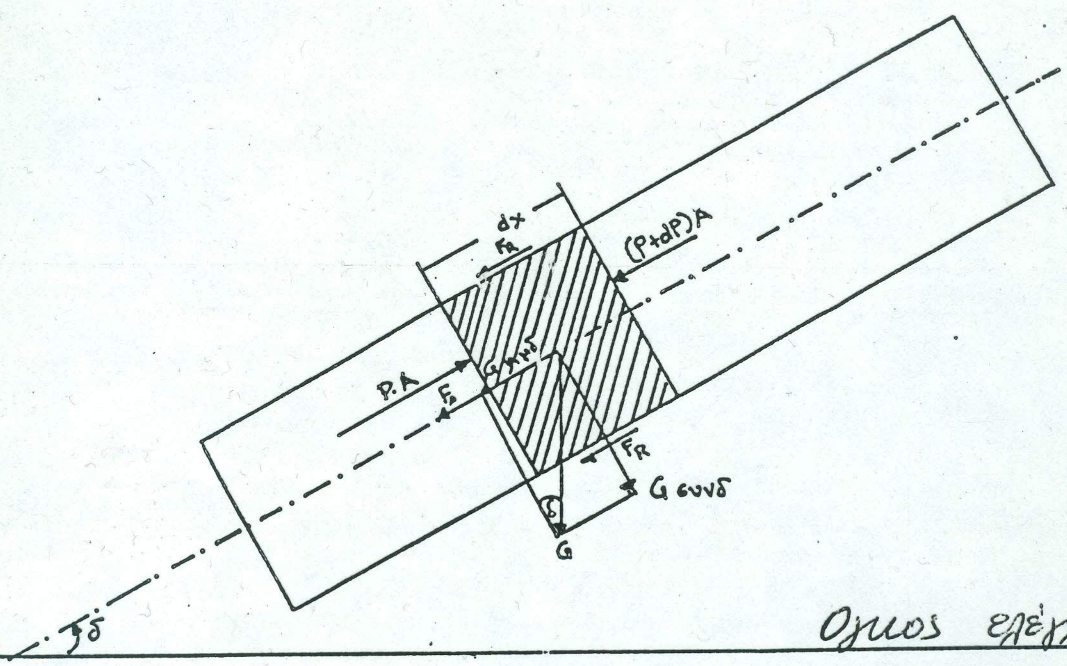
- $u = c = U$ κοινή ταχύτητα φάσεων
- $j_s = \dfrac{\dot V_s}{A}$ • $j_f = \dfrac{\dot V_f}{A}$ • $j = \dfrac{\dot V_f + \dot V_s}{A}$
- $G_{mf} = \dfrac{\dot M_f}{A}$ • $G_{Ms} = \dfrac{\dot M_s}{A}$ $G_M = \dfrac{\dot M_f + \dot M_s}{A}$
- $c_V = \dfrac{V_s}{V_f + V_s}$ $c_M = \dfrac{\dot M_s}{\dot M_f + \dot M_s}$

Η μέση πυκνότητα του μίγματος, δίνεται από τις σχέσεις

- $\rho_M = c_V \rho_s + (1-c_V)\rho_f$ ή $\dfrac{1}{\rho_M} = \dfrac{c_M}{\rho_s} + \dfrac{1-c_M}{\rho_f}$

Subject	Date	Project
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ.	Author	Report

3.1. Εξισώσεις συνέχειας και ορμής



Εξίσωση συνέχειας

• $$\dot{M} = \rho_m U A = \text{σταθ.} \qquad (3.1)$$

Εξίσωση ορμής

Στη μάζα $M = \rho_m \, y z \, dx$ του ρεύματος επιδρούν οι εξής δυνάμεις:

• Απο το ίδιο βάρος, η δύναμη G

$$G = \rho_m \, g \, y z \, dx \qquad (3.2)$$

• Από την επιτάχυνση, η δύναμη F_A (αδρανειακή δύναμη)

$$F_A = M \frac{dU}{dt} \qquad (3.3)$$

η οποία μπορεί να γραφεί:

$$F_A = \rho_m YZ\,dx\,\frac{dU}{dt} = \rho_m YZ\,dx\,\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = \rho_m YZ\,dx\,U\frac{dU}{dx} \quad (3.4)$$

- Από την πίεση στις επιφάνειες του στοιχείου στις διατομές x και $x+dx$

$$pA - (p+dp)A = -dp\,A \quad (3.5)$$

- Από την τριβή του μίγματος στην επιφάνεια του αγωγού

$$F_R = 2\tau_o\,(z\,dx + Y\,dx) = \tau_o \Pi\,dx \quad (3.6)$$

όπου τ_o = διατμητική τάση στο τοίχωμα

Π = περίμετρος της διατομής A.

Η ισορροπία των δυνάμεων στη διεύθυνση του x-άξονα δίνει:

$$pA - (p+dp)A - \tau_o \Pi\,dx - G\,\eta\mu\delta - F_A = 0 \quad (3.7)$$

ή με συνδυασμό των προηγουμένων, γίνεται:

$$-dp\,A - \tau_o \Pi\,dx - \rho_m g A\,dx\,\eta\mu\delta - \rho_m A\,dx\,U\frac{dU}{dx} = 0 \quad (3.8)$$

Διαιρώντας με dx και αντικαθιστώντας $\rho_m AU = \dot{M}$ έχουμε:

$$\dot{M}\frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx}A - \Pi\tau_o - A\rho_m g\,\eta\mu\delta \quad (3.9)$$

Subject	Date	Project
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ	Author	Report

Λύνοντας ως προς dp/dx η (3.9) γίνεται:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Pi}{A}\tau_o - \frac{\dot{M}}{A}\frac{dU}{dx} - \rho_m g \eta\mu\delta \qquad (3.10)$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_R = -\frac{\Pi}{A}\tau_o$$

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού, λόγω τριβής.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_A = -\frac{\dot{M}}{A}\frac{dU}{dx}$$

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού λόγω επιτάχυνσης

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_G = -\rho_m g \eta\mu\delta$$

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού λόγω βαρύτητας

και γράφουμε την εξ. (3.10) με τη γενική μορφή.

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_R + \left(\frac{dp}{dx}\right)_A + \left(\frac{dp}{dx}\right)_G} \qquad (3.11)$$

Subject	Date	Project
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ		
	Author	Report

3.2. Ανάλυση εξίσωσης ορμής.

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_R + \left(\frac{dp}{dx}\right)_A + \left(\frac{dp}{dx}\right)_G$$

1. $$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_R = 2 c_f \rho_m \frac{U^2}{D}$$

όπου

$$\tau_0 = c_f \frac{1}{2} \rho_m U^2 \qquad \text{και} \qquad D = \frac{4A}{\Pi}$$

$$U = j = \frac{\dot{V}_f + \dot{V}_s}{A} \qquad \rho_m U = G_m = \frac{\dot{M}_f + \dot{M}_s}{A}$$

Άρα

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_R = \frac{2 c_f G_m j}{D}$$

η επειδή

$$U = \frac{G_m}{\rho_m} = G_m \left[c_m V_s + (1 - c_m) V_f \right] = G_m \left(V_f + c_m V_{fs} \right)$$

Προκύπτει τελικά

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_R = \frac{2 c_f G_m^2}{D} \left(V_f + c_m V_{fs} \right)$$

UNIVERSITY OF PATRAS
FLUID MECHANICS LABORATORY

Page of

Subject	Date	Project
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ	Author	Report

2. $$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_A = G_m \frac{dU}{dx}$$

Επειδή $U = \frac{\dot{M}}{\rho_m A}$ προκύπτει

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_A = G_m \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{M}}{\rho_m A}\right) = G_m^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) - \frac{G_m^2}{\rho_m}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

αλλά

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) = \frac{dc_m}{dx}\left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_f}\right) + c_m \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_s}\right) + (1-c_m)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_f}\right)$$

ή συναρτήσει των ειδικών όγκων

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) = V_{fs}\frac{dc_m}{dx} + c_m \frac{dV_s}{dx} + (1-c_m)\frac{dV_f}{dx}$$

Επειδή οι όγκοι είναι συναρτήσεις της πιέσεως προκύπτει.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) = V_{fs}\frac{dc_m}{dx} + \frac{dp}{dx}\left[c_m \frac{dV_s}{dp} + (1-c_m)\frac{dV_f}{dp}\right]$$

Και άρα τελικά έχουμε

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_A = G_m^2\left[V_{fs}\frac{dc_m}{dx} + \frac{dp}{dx}\left[c_m \frac{dV_s}{dp} + (1-c_m)\frac{dV_f}{dp}\right] - \left[(V_f + c_m V_{fs})\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\right]\right]$$

3. $$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_G = g\,\eta\mu\delta \; \frac{1}{V_f + C_m V_{fs}}$$

Άρα τελικά:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \left[2\frac{C_f}{D} G_m^2 (V_f + C_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} \frac{dC_m}{dx} - G_m^2 (V_f + C_m V_{fs}) \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{g\,\eta\mu\delta}{V_f + V_{fs}} \right] \Big/ \left[1 + G_m^2 \left(C_m \frac{dV_s}{dp} + (1 - C_m)\frac{dV_f}{dp} \right) \right]}$$

Γενική εξίσωση μεταβολής της πίεσης κατά μήκος του αγωγού

Ειδικά για αγωγό σταθερής διατομής $\left(\frac{dA}{dx} = 0\right)$, μεταφορά στερεών σωματιδίων $\left(\frac{dV_s}{dp} = 0\right)$ και έκφραση του $\frac{dV_f}{dp} = -\frac{V_f}{p}$ $\left(V = \frac{RT}{p} \rightarrow \frac{dV}{dp} = -\frac{RT}{p^2} = -\frac{V}{p}\right)$

η εξίσωση μετατρέπεται στην μορφή:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \left[\frac{2C_f}{D} G_m^2 (V_f + C_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} \frac{dC_m}{dx} + \frac{g\,\eta\mu\delta}{V_f + C_m V_{fs}} \right] \Big/ \left[1 - G_m^2 (1 - C_m) \frac{V_f}{p} \right]}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
FLUID MECHANICS LABORATORY

Page of

Subject: ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ	Date	Project
	Author	Report

3.3. Μεταβολή συγκέντρωσης μάζας

$$C_M = \frac{\dot{M}_s}{\dot{M}}$$

$$C_M = \frac{\rho_s c A_s}{\rho_s c A_s + \rho_f u A_f} \quad ή \quad C_M = \frac{\rho_s c C_v A}{\rho_s c C_v A + \rho_f u (1-C_v) A}$$

Στην ομογενή ροή είναι $u = c = U$
και η παροχή μάζας του μίγματος σταθερή σε κάθε διατομή δηλ.

$$\rho_s c C_v A + \rho_f u (1-C_v) A = \text{σταθ.}$$

Προκύπτει: , για δύο διατομές 1, και 2.

$$C_{M1} = \frac{\rho_{s1} U_1 C_v A}{\dot{M}} \qquad C_{M2} = \frac{\rho_{s2} U_2 C_v A}{\dot{M}}$$

οπότε

$$\frac{C_{M1}}{C_{M2}} = \frac{\rho_{s1} U_1 C_v A}{\rho_{s2} U_2 C_v A} = \frac{\rho_{s1} U_1}{\rho_{s2} U_2}$$

Για στερεά σωματίδια, ισχύει $\rho_{s1} = \rho_{s2} = \text{σταθ.}$
Άρα

$$\frac{C_{M1}}{C_{M2}} = \frac{U_1}{U_2} \Longrightarrow C_{M2} = C_{M1} \frac{U_2}{U_1}$$

UNIVERSITY OF PATRAS
FLUID MECHANICS LABORATORY

Page of

Subject	Date	Project
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ	Author	Report

και

$$c_{m2} - c_{m1} = c_{m1}\,\frac{U_2}{U_1} - c_{m1} = c_{m1}\left(\frac{U_2}{U_1} - \frac{U_1}{U_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta c_{m12} = c_{m1}\,\frac{U_2 - U_1}{U_1} = c_{m1}\,\frac{\Delta U_{12}}{U_1} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta c_{m12}}{\Delta x_{12}} = c_{m1}\,\frac{1}{U_1}\,\frac{\Delta U_{12}}{\Delta x_{12}}$$

οπότε για απειροστό Δx_{12} δηλ. $dx \Rightarrow$

$$\frac{dc_m}{dx} = c_m\,\frac{1}{U}\,\frac{dU}{dx}$$

Τελικά η βαθμίδα πίεσης κατά μήκος αγωγού δίνεται από τη σχέση.

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \left[\frac{2c_f}{D}\,G_m^2\,(v_f + c_m v_{fs}) + G_m^2\,v_{fs}\,c_m\,\frac{1}{U}\,\frac{dU}{dx} + \frac{g\,\eta\mu\sigma}{v_f + c_m v_{fs}}\right] \Big/ \left[1 - G_m^2\,(1 - c_m)\,\frac{v_f}{p}\right]}$$