

4

**ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ
ΡΟΗ ΑΕΡΑ - ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ****4.1 Το σύστημα εξισώσεων για τη διδιάστατη ροή**

Με τη διερεύνηση της διφασικής ροής αέρα στερεών σωματιδίων, που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3, καταλήξαμε στο συμπέρασμα, ότι το ροϊκό αυτό φαινόμενο περιγράφεται από ένα μαθηματικό μοντέλο, που αποτελείται από ένα σύστημα έντεκα διαφορικών εξισώσεων με έντεκα αγνώστους. Στο σύστημα αυτών των εξισώσεων περιέχονται μεγέθη, τα οποία κατ' αρχήν θεωρούνται γνωστά. Ο υπολογισμός, όμως, των μεγεθών αυτών απαιτεί την ανάπτυξη επί μέρους μαθηματικών μοντέλων, γεγονός που αυξάνει την πολυπλοκότητα του συστήματος. Η πρακτική, που ακολουθείται στην αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων, είναι η σταδιακή επίλυσή τους. Ακολουθώντας την πρακτική αυτή εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό τη διδιάστατη ασυμπίεστη ροή αέρα και στερεών σωματιδίων.

Η διδιάστατη ροή παρουσιάζεται σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής, όταν η μια διάσταση της διατομής (πλάτος) μπορεί να θεωρηθεί μεγάλη σε σχέση με την άλλη διάσταση (ύψος). Η έννοια της “μεγάλης” αποδίδεται πρακτικά με τιμές του λόγου πλάτος/ύψος της τάξης του 5/1 και μεγαλύτερες. Διδιάστατη ροή εμφανίζεται επίσης σε αγωγούς κυκλικής διατομής, στην περίπτωση της κατακόρυφης μεταφοράς ή στην

οριζόντια αραιή μεταφορά σωματιδίων μικρής πυκνότητας. Στην περίπτωση αυτή λόγω του πολύ μικρού αριθμού των σωματιδίων στο ροϊκό πεδίο, ελαχιστοποιείται ο ρυθμός των συγκρούσεων των σωματιδίων μεταξύ τους και με τα τοιχώματα και αποφεύγεται η συγκέντρωση των σωματιδίων στα κατώτερα στρώματα του ροϊκού πεδίου. Τα σωματίδια ακολουθούν τις ροϊκές γραμμές του ρευστού με αποτέλεσμα η ροή του μίγματος να θεωρείται με καλή προσέγγιση αξονοσυμμετρική και να έχουμε έτσι διδιάστατη ροή.

Η εξέταση της διδιάστατης ροής, που ακολουθεί, γίνεται για τη γενική περίπτωση της ροής σε αγωγούς ορθογωνικής ή κυκλικής διατομής. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων εκφράζεται σε ορθογωνικές και κυλινδρικές συντεταγμένες ταυτόχρονα. Ο ορισμός των συντεταγμένων δίνεται στο Σχήμα 4.1. Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων, για καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες για μόνιμη διδιάστατη ασυμπίεστη ροή αέρα-σωματιδίων, γράφεται

εξίσωση συνέχειας

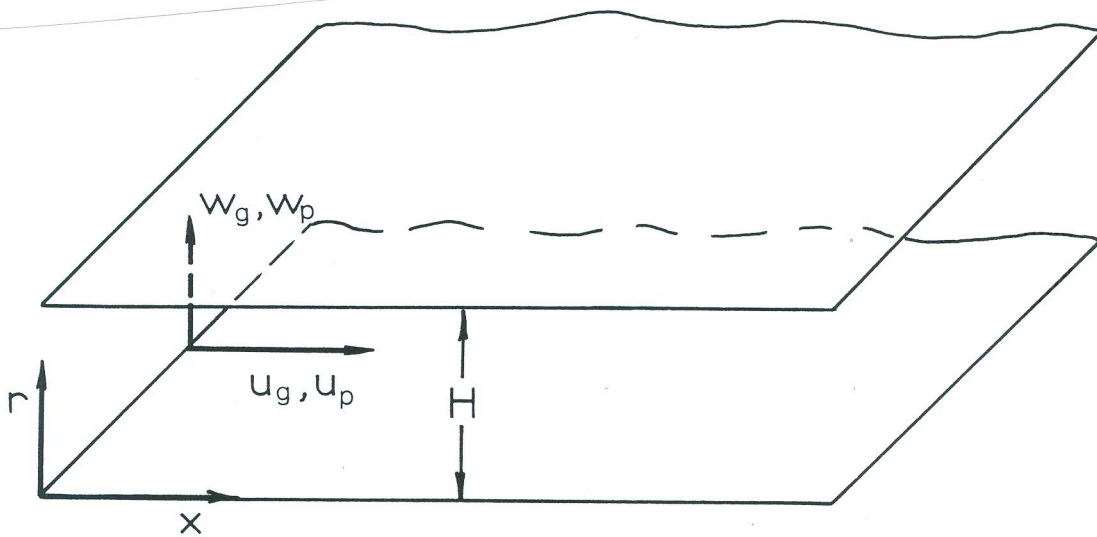
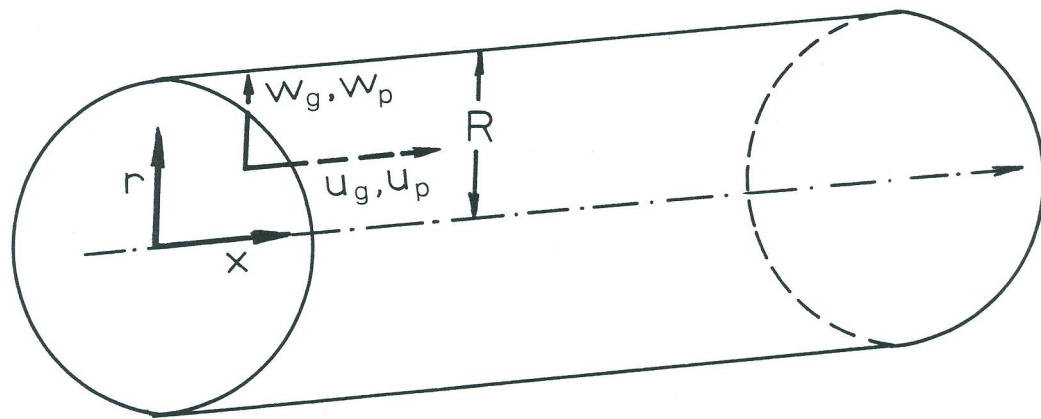
$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}_r u_r) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r}(\bar{\rho}_r w_r r^k) = 0 \quad (4.1)$$

εξίσωση ορμής x-διεύθυνση

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_r u_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + \bar{\rho}_r w_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = \\ - \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_r \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_r \left(\frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k w_r) + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \mu_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \right] + D_{x_r} + L_{x_r} \end{aligned} \quad (4.2)$$

εξίσωση ορμής r-διεύθυνση

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_r u_r \frac{\partial w_r}{\partial x} + \bar{\rho}_r w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} = \\ - \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[2\mu_r r^k \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu_r r^k \left(\frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k w_r) + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \right] + D_{r_r} + L_{r_r} + G_{r_r} \end{aligned} \quad (4.3)$$



Σχήμα 4.1: Ορισμός ορθογωνικών και κυλινδρικών συντεταγμένων.

όπου ο δείκτης r δηλώνει μεγέθη της r -φάσης, D είναι η αντίσταση των σωματιδίων, L η αεροδυναμική άνοση και G ο συνδυασμός της στατικής άνοσης και των πεδιακών δυνάμεων. Ο συντελεστής k καθορίζει τη μορφή του συστήματος. Για $k = 0$ το σύστημα των εξισώσεων δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για $k = 1$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

4.2 Μεγέθη αναφοράς

Βασική αρχή στην επίλυση ρευστομηχανικών προβλημάτων είναι η περιγραφή ροϊκού φαινομένου με σύστημα εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή. Η αδιαστατοποίηση χρησιμοποιείται με σκοπό τα αποτελέσματα, που προκύπτουν από τη λύση των εξισώσεων, να έχουν γενική ισχύ και να είναι ανεξάρτητα από τις, κάθε φορά, τιμές των ροϊκών μεγεθών. Για την αδιαστατοποίηση χρησιμοποιούνται ορισμένα μεγέθη, καλούμενα μεγέθη αναφοράς, χαρακτηριστικά για το εκάστοτε ροϊκό πεδίο, με τα οποία διαιρούνται τα αντίστοιχα μεταβλητά μεγέθη. Προκύπτουν έτσι τα αδιάστατα μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται από μια ελάχιστη μέχρι μια μέγιστη τιμή, χαρακτηριστική για το ροϊκό φαινόμενο. Το γεγονός αυτό επιτρέπει γρήγορη και εύκολη σύγκριση αποτελεσμάτων διαφόρων θεωριών, σχετικών με το υπό εξέταση αντικείμενο, καθώς και διαφόρων πειραματικών δεδομένων χωρίς να χρειάζεται να γίνεται κάθε φορά αναγωγή των αποτελεσμάτων σε κάποιες συγκεκριμένες ροϊκές συνθήκες.

Τα μεγέθη αναφοράς, που χρησιμοποιούνται εδώ, είναι: η ταχύτητα u_{gR} , η πυκνότητα ρ_{gR} και το δυναμικό ιξώδες μ_{gR} του αέρα με τιμή αυτήν που έχουν στον άξονα της αρχικής διατομής του ροϊκού πεδίου, Σχήμα 4.1. Για το μήκος σαν μέγεθος αναφοράς χρησιμοποιείται ένα χαρακτηριστικό μήκος L_R . Αυτό είναι, για ροή μεταξύ παράλληλων πλακών, η απόσταση h μεταξύ των πλακών, ενώ για ροή σε κυλινδρικούς αγωγούς, η διάμετρος d του αγωγού. Χρησιμοποιούνται σαν μεγέθη αναφοράς τα μεγέθη του αέρα επειδή ο αέρας αποτελεί το βασικό ρευστό, φορέας ρευστό, και επειδή τα μεγέθη αυτά μπορούν ευκολότερα να προσδιοριστούν και πειραματικά.

Τα αδιάστατα μεγέθη που προκύπτουν είναι:

$$\bar{u}_g = \frac{u_g}{u_{gR}} \quad \bar{w}_g = \frac{w_g}{u_{gR}} \quad \bar{u}_p = \frac{u_p}{u_{gR}} \quad \bar{w}_p = \frac{w_p}{u_{gR}} \quad (4.4\alpha)$$

$$\bar{\rho}_g = \frac{\rho_g}{\rho_{gR}} \quad \bar{\rho}_p = \frac{\rho_p}{\rho_{gR}} \quad (4.4\beta)$$

$$\bar{\mu}_g = \frac{\mu_g}{\mu_{gR}} \quad \bar{\mu}_p = \frac{\mu_p}{\mu_{gR}} \quad (4.4\gamma)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L_R} \quad \bar{r} = \frac{r}{L_R} \quad \bar{r}_p = \frac{r_p}{L_R} \quad (4.4\delta)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_{gR} u_{gR}^2} \quad (4.4\epsilon)$$

Με αντικατάσταση των μεγεθών με τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή (βλ. ανάλυση στον [85]).

4.3 Προσέγγιση και απλοποίηση του συστήματος

Η λύση του αδιαστατοποιημένου συστήματος των εξισώσεων πετυχαίνεται με εφαρμογή των υποθέσεων της θεωρίας του οριακού στρώματος του Prandtl [59]. Η εφαρμογή αυτή δικαιολογείται γιατί η ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών, όπως και η ροή κατά μήκος κυλινδρικού αγωγού μεγάλου μήκους, έχει την ίδια χαρακτηριστική προέκταση κατά τη διεύθυνση x , όπως ακριβώς και το οριακό στρώμα.

Η βασική αρχή στη θεωρία του Prandtl είναι ότι τα ροϊκά μεγέθη παρουσιάζουν μεγάλες μεταβολές στην ακτινική διεύθυνση (μεγάλες βαθμίδες) και μικρές στην αξονική. Αυτό σημαίνει ότι στο αδιάστατο σύστημα των εξισώσεων υπάρχουν όροι, που εκφράζουν μεταβολή των μεγεθών στην αξονική διεύθυνση, οι οποίοι είναι πολύ μικρής τάξης μεγέθους συγκρινόμενοι με αυτούς που εκφράζουν μεταβολή στην ακτινική διεύθυνση. Επειδή η επίδραση των όρων αυτών στο τελικό αποτέλεσμα είναι πολύ μικρή μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να αμελήσουμε τους όρους μικρής τάξης μεγέθους.

Για την εύρεση της τάξης μεγέθους των διαφόρων όρων χρησιμοποιούμε την χαρακτηριστική ιδιότητα του οριακού στρώματος.

$$\delta \ll L \quad (4.5)$$

όπου δ το πάχος του οριακού στρώματος, και L το μήκος αναφοράς, και την απαίτηση ο αριθμός Re να είναι της τάξης μεγέθους του $O(1/\delta^2)$, [59]. Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία για να είναι οι δυνάμεις τριβής της ίδιας τάξης μεγέθους με τις δυνάμεις αδράνειας. Σύμφωνα με αυτά η τάξη μεγέθους των διαφόρων όρων, που εμφανίζονται στο σύστημα των εξισώσεων είναι

$$O(1): \bar{u}_r, \quad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{x}^2} \quad (4.6\alpha)$$

$$O\left(\frac{1}{\delta}\right): \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{r}^2} \quad (4.6\beta)$$

$$O\left(\frac{1}{\delta^2}\right): \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2}, \quad Re \quad (4.6\gamma)$$

$$O(\delta) : \bar{w}_r, \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{x}^2} \quad (4.6\delta)$$

Στις εξισώσεις εμφανίζονται γινόμενα των παραπάνω όρων, οπότε για την απλοποίηση ή όχι των όρων λαμβάνεται υπ' όψη η τάξη μεγέθους του γινομένου. Αν τώρα, σύμφωνα με αυτά, διατηρήσουμε στις εξισώσεις τους όρους τάξης μεγέθους τουλάχιστον ένα, $O(1)$, και αμελήσουμε τους υπόλοιπους, το απλοποιημένο αδιάστατο σύστημα που προκύπτει είναι

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\rho}_r \bar{u}_r) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{\rho}_r \bar{w}_r \bar{r}^k) = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_r \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}_r \bar{w}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} &= - \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}_R} \bar{\mu}_r \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}_R} \frac{\partial \bar{\mu}_r}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\text{Re}_R} \frac{k}{\bar{r}} \bar{\mu}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} \pm \frac{3}{8\bar{r}_p} c_{Dx} Z \bar{\rho}_g (\bar{u}_g - \bar{u}_p)^2 \pm \\ &\pm J_y Z \bar{\rho}_g (\bar{w}_g - \bar{w}_p) \frac{\partial \bar{u}_g}{\partial \bar{r}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{r}} \pm \frac{3}{8\bar{r}_p} c_{Dr} Z \bar{\rho}_g (\bar{w}_g - \bar{w}_p)^2 \pm \\ &\pm J_y Z \bar{\rho}_g (\bar{u}_g - \bar{u}_p) \frac{\partial \bar{u}_g}{\partial \bar{r}} - G_r \end{aligned} \quad (4.9)$$

όπου G_r είναι η δύναμη της βαρύτητας, συνδυασμένη με την στατική άνωση των σωματιδίων, η οποία για τις δύο φάσεις έχει τη μορφή

$$G_p = \frac{Z}{\text{Fr}_R} (\bar{\rho}_p - \bar{\rho}_g) \quad (\text{για τα σωματίδια}) \quad (4.10\alpha)$$

$$G_g = \frac{1}{\text{Fr}_R} \bar{\rho}_g \quad (\text{για τον αέρα}) \quad (4.10\beta)$$

και Re_R και Fr_R οι αδιάστατοι χαρακτηριστικοί αριθμοί Reynolds και Froude

$$\text{Re}_R = \frac{\rho_{gR} u_{gR} L_R}{\mu_{gR}} \quad (4.11\alpha) \quad \text{Fr}_R = \frac{u_{gR}^2}{g L_R} \quad (4.11\beta)$$

Το σύστημα των εξισώσεων σχ. (4.7), (4.8) και (4.9) εφαρμόζεται χωριστά για κάθε φάση με απλή αντικατάσταση των αντίστοιχων μεγεθών, όπως π.χ. u_g αντί u_r για τον αέρα και u_p αντί u_r για τα σωματίδια. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζονται στο σύστημα αυτό με δείκτες g ή p δεν μεταβάλλονται κατά την εφαρμογή στην μια ή την άλλη φάση, διότι αυτά εμφανίζονται στους όρους που εκφράζουν τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, αντίσταση και αεροδυναμική άνοση, οι οποίες διαφέρουν απλώς στο πρόσημο. Έτσι χρησιμοποιείται το πρόσημο (+) για την εφαρμογή των εξισώσεων στη ροή των σωματιδίων και το (-) στη ροή του αέρα.

Ένα βασικό συμπέρασμα, που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση της ροής του μίγματος αέρα στερεών σωματιδίων, είναι ότι, όπως φαίνεται από την σχ. (4.9), υπάρχει βαθμίδα πίεσης στη διεύθυνση εγκάρσια προς την κίνηση του μίγματος, γεγονός που διαφοροποιεί πλήρως τη ροή του μίγματος από τη μονοφασική ροή του αέρα, όπου, ως γνωστόν, στην εγκάρσια διεύθυνση η βαθμίδα πίεσης είναι μηδέν [59,60].

4.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Στην αρχική διατομή του εξεταζόμενου ροϊκού πεδίου, επικρατούν οι αρχικές συνθήκες της αξονικής ταχύτητας του αέρα και των σωματιδίων, της ογκομετρικής συγκέντρωσης των σωματιδίων και της πίεσης.

Στην περίπτωση που σαν αρχική διατομή θεωρείται η είσοδος του αγωγού, η πίεση είναι σταθερή κατά την ακτινική διεύθυνση και έτσι ισχύει, για $x = 0$ και $0 < \bar{r} < 1$

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{r}, 0) = \bar{p}_{σταθ} \quad (4.12)$$

διαφορετικά ισχύει και για την πίεση η επόμενη συνθήκη, όπως και για τα υπόλοιπα μεγέθη.

Για την ταχύτητα του αέρα, την ταχύτητα των σωματιδίων και την ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων ισχύει γενικά, για $x = 0$ και $0 < \bar{r} < 1$, η σχέση

$$\bar{M} = \bar{M}(\bar{r}, 0) \quad (4.13)$$

Η σχέση αυτή δεν είναι οπωσδήποτε μια κλειστή μαθηματική σχέση, αλλά μπορεί να είναι κατανομή, που προέρχεται από πειραματικά αποτελέσματα, με ένα σχετικό σφάλμα, λόγω της αβεβαιότητας των μετρήσεων.

Σαν οριακές συνθήκες έχουμε τις συνθήκες της ροής στον άξονα και στα τοιχώματα του αγωγού. Λόγω της αξονικής συμμετρίας ισχύει στον άξονα, δηλαδή για $r = 0$ και $x > 0$, η σχέση

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = 0 \quad \text{και} \quad \bar{w}_r = 0 \quad (4.14)$$

Εάν στις εξισώσεις συνέχειας και ορμής, σχ. (4.7), (4.8), εφαρμοστεί ο κανόνας των Bernoulli - L' Hospital στις εκφράσεις, οι οποίες για $r=0$ τείνουν προς το άπειρο, τότε προκύπτει

$$\frac{\partial \bar{\rho}_r \bar{u}_r}{\partial x} + 2^k \frac{\partial \bar{\rho}_r \bar{w}_r}{\partial r} = 0 \quad (4.15)$$

$$\bar{\rho}_r \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial x} + \frac{2\bar{\mu}_r}{\text{Re}_R} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} \pm \frac{3}{8\bar{r}_p} c_{Dx} Z \bar{\rho}_g (\bar{u}_g - \bar{u}_p)^2 \quad (4.16)$$

Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται σαν οριακές συνθήκες για $r = 0$ για την περίπτωση ροής του μίγματος σε κυλινδρικό αγωγό, ενώ στη ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών δεν παίζουν κανένα ρόλο, λόγω διαφοράς στον ορισμό του ροϊκού πεδίου. Εκεί $r = 0$ δηλώνει σημείο της κάτω πλάκας, για το οποίο ισχύει η επόμενη συνθήκη.

Στα τοιχώματα των αγωγών η ταχύτητα των ρευστών μηδενίζεται, δηλαδή τα ρευστά προσκολλούνται στα τοιχώματα. Έτσι, για $x > 0$ και $r = R$, έχουμε

$$\bar{u}_r(x, R) = 0 \quad \text{και} \quad \bar{w}_r(x, R) = 0 \quad (4.17)$$

όπου R η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού ή η μισή απόσταση των πλακών ($R = h/2$).

4.5 Το σύστημα εξισώσεων για τυρβώδη ροή

Για τις συνιστώσες της ταχύτητας και για την πίεση έχουμε

$$u_r = \bar{u}_r + u'_r \quad w_r = \bar{w}_r + w'_r \quad (4.18)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.19)$$

όπου \bar{u}_r η μέση τιμή και u'_r η στιγμιαία απόκλιση της αξονικής ταχύτητας κάθε φάσης και αντίστοιχα για την ακτινική συνιστώσα και την πίεση. Με αντικατάσταση της σχ. (4.18) στην x-εξίσωση ορμής, σχ. (4.8), έχουμε

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_r (\bar{u}_r + u'_r) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_r + u'_r) + \bar{\rho}_r (\bar{w}_r + w'_r) \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_r + u'_r) = - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_r + p'_r) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_R} \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_r r^k \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_r + u'_r)) \pm \frac{3}{8} \frac{Z}{r_p} \rho_g (\bar{u}_g + u'_g - \bar{u}_p - u'_p)^2 \pm \\ & \pm J_y Z \rho_g (\bar{w}_g + w'_g - \bar{w}_p - w'_p) \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_g + u'_g) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Η θεώρηση της τυρβώδους ροής σαν μόνιμης ισχύει εφ' όσον θεωρούνται οι μέσες τιμές των μεγεθών. Σ' αυτήν αντιστοιχεί η ομοιομορφία της τυρβώδους ροής. Έτσι μετά την αντικατάσταση διαχωρίζονται οι όροι της εξίσωσης σε όρους των μέσων μεγεθών και σε όρους των μεταβαλλόμενων μεγεθών και λαμβάνεται η μέση τιμή όλων των όρων της εξίσωσης. Στη μετατροπή αυτήν ισχύουν ορισμένοι κανόνες υπολογισμού, οι οποίοι αναφέρονται ενδεικτικά χωρίς μαθηματική απόδειξη [61]. Λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες αυτούς και το γεγονός ότι οι γραμμικοί όροι μηδενίζονται ενώ οι μη γραμμικοί παραμένουν, μετά την εκτέλεση των πράξεων στη σχ. (4.20), έχουμε

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_r \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + \bar{\rho}_r \bar{w}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = - \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_R} \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_r r^k \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}) \pm \\ & \pm \frac{3}{8 r_p} c_{Dx} z \rho_g [(\bar{u}_g - \bar{u}_p)^2 + (\bar{u}'_g - \bar{u}'_p)^2] \pm \\ & \pm J_y z \rho_g \left[(\bar{w}_g - \bar{w}_p) \frac{\partial \bar{u}_g}{\partial r} + (\bar{w}'_g - \bar{w}'_p) \frac{\partial \bar{u}'_g}{\partial r} \right] - \rho_r \frac{\partial \bar{u}'_r{}^2}{\partial x} - \rho_r \frac{\partial \bar{u}'_r w'_r}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι στη σχ. (4.21), που περιγράφουν την επίδραση των τυρβωδών διακυμάνσεων, μπορούν να θεωρηθούν σαν οι επιπρόσθετες διατμητικές τάσεις λόγω της τυρβώδους κίνησης, που εκφράζουν ανταλλαγή ορμής στην κίνηση αυτή. Αυτές οι διατμητικές τάσεις είναι γνωστές σαν τάσεις Reynolds ή φαινομενικές τάσεις. Σε ροές οριακών στρωμάτων αποδεικνύεται (βλ. παράγραφο 4.3) ότι το μέγεθος $\partial u / \partial x$ είναι αμελητέο. Το ίδιο συμβαίνει και με το μέγεθος της τυρβώδους ροής \bar{u}'^2 . Είναι επίσης δυνατόν να θεωρήσουμε ότι οι διαφορές $(\bar{u}'_g - \bar{u}'_p)$ και $(\bar{w}'_g - \bar{w}'_p)$ είναι αμελητέες, οπότε η σχ. (4.21) γράφεται

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_r \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + \bar{\rho}_r \bar{w}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = - \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_R} \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_r r^k \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}) \pm \\
\pm \frac{3}{8r_p} c_{Dx} Z \rho_g (\bar{u}_g - \bar{u}_p)^2 \pm \\
\pm J_y Z \rho_g (\bar{w}_g - \bar{w}_p) \frac{\partial \bar{u}_g}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (\rho_r u'_r w'_r)
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Η τυρβώδης διατμητική τάση, σύμφωνα με την υπόθεση του Boussinesq, παίρνει τη μορφή

$$\tau_t = - \overline{\rho_r u'_r w'_r} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \quad (4.23)$$

που είναι ανάλογη του νόμου τριβής του Newton για τη στρωτή ροή. Έτσι για την ολική διατμητική τάση ισχύει

$$\tau_{o\lambda} = \tau_1 + \tau_t = \mu_1 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = (\mu_1 + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \quad (4.24)$$

Όπως προκύπτει τελικά από τις σχ. (4.22) και (4.24) η τυρβώδης ροή περιγράφεται με τις εξισώσεις Navier-Stokes, που περιγράφουν και τη στρωτή ροή, αρκεί να αντικατασταθεί το μοριακό δυναμικό ιξώδες μ_1 με το άθροισμα $\mu_1 + \mu_t$, όπου μ_t το ιξώδες δίνης ή φαινομενικό ιξώδες. Έτσι, επειδή το δυναμικό ιξώδες εξαρτάται μόνο από τις μοριακές ιδιότητες του ρευστού ενώ το ιξώδες δίνης είναι μια καθαρά μηχανική ιδιότητα της ροής, που συνδέεται με τις τυρβώδεις διακυμάνσεις, το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του ιξώδους δίνης. Ο προσδιορισμός αυτός είναι αρκετά δύσκολος και πολύ συχνά απαιτεί τη δημιουργία κατάλληλου μοντέλου, για τον υπολογισμό του ιξώδους.

4.6 Μεγέθη μεταφοράς

Μεγέθη μεταφοράς είναι μοριακές ιδιότητες των ρευστών, που χαρακτηρίζουν τη μεταφορά ορμής, θερμότητας και μάζας. Αντίστοιχοι συντελεστές είναι το μοριακό ιξώδες, η θερμική αγωγιμότητα και ο συντελεστής διάχυσης.

Στην εξέταση της ασυμπίεστης διφασικής ροής αέρα στερεών σωματιδίων λαμβάνεται υπ' όψη μόνο η μεταφορά ορμής και έτσι στις εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή αυτή, εμφανίζεται μόνο το ιξώδες των ρευστών. Επειδή όμως εξετάζεται η

στρωτή ή η τυρβώδης ροή σε ορθογωνικό ή κυλινδρικό αγωγό, ο προσδιορισμός του ιξώδους δεν γίνεται μονοσήμαντα αλλά απαιτείται κάθε φορά η χρησιμοποίηση κατάλληλης σχέσης ή ακόμα η εισαγωγή νέων μοντέλων υπολογισμού. Επί πλέον, λόγω της θεωρίας του συνεχούς μέσου, που χρησιμοποιείται στη διερεύνηση της διασπαστικής ροής αέρα σωματιδίων, σύμφωνα με την οποία εξετάζεται χωριστά η κάθε φάση, πρέπει να γίνει και ο υπολογισμός του ιξώδους του ψευδορευστού των σωματιδίων. Έτσι εξετάζεται χωριστά η στρωτή και η τυρβώδης ροή και σε κάθε περίπτωση γίνεται διάκριση στον υπολογισμό του ιξώδους του αέρα και των σωματιδίων, για ροή σε ορθογωνικό ή κυλινδρικό αγωγό.

4.6.1 Στρωτή ροή

Όπως έχει ήδη τονιστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, το δυναμικό ιξώδες, που εμφανίζεται στις εξισώσεις που περιγράφουν τη στρωτή ροή των ρευστών, είναι μια καθαρά μοριακή ιδιότητα των ρευστών. Η ιδιότητα αυτή δεν επηρεάζεται από τη μορφή του ροϊκού πεδίου και έτσι για την περίπτωση της στρωτής ροής στον υπολογισμό του δυναμικού ιξώδους δεν γίνεται διάκριση εάν πρόκειται για ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών ή για ροή σε κυλινδρικό αγωγό.

Δυναμικό ιξώδες αέρα

Για τον υπολογισμό του μοριακού δυναμικού ιξώδους των αερίων χρησιμοποιείται γενικά η σχέση του Sutherland, [59,60,61],

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{S + T_0}{S + T} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \quad (4.25)$$

από την οποία υπολογίζεται το ιξώδες του αερίου σε θερμοκρασία T σαν συνάρτηση μιας κατάστασης αναφοράς (μ_0, T_0). Οι τιμές της σταθεράς S εξαρτώνται από το είδος του αερίου. Για τον αέρα π.χ. είναι $S = 123.6K$ και για το οξυγόνο $S = 138K$.

Ο υπολογισμός του ιξώδους του αέρα γίνεται και ανεξάρτητα από την κατάσταση αναφοράς χρησιμοποιώντας την σχέση του Sutherland στην τροποποιημένη μορφή

$$\mu = \frac{\beta T^{1.5}}{S + T} \quad (4.26)$$

όπου οι σταθερές β και S έχουν τιμές $\beta = 1.458 \times 10^{-6}$ και $S = 110.4K$.

Δυναμικό ιξώδες σωματιδίων

Η θεώρηση των σωματιδίων σαν ψευδορευστό προσδίδει σε αυτά ιδιότητες ρευστών, μια από τις οποίες είναι και το "μοριακό ιξώδες" των σωματιδίων. Για την ιδιότητα όμως αυτή των σωματιδίων δεν υπάρχει κάποια σχέση υπολογισμού της και έτσι είναι αναγκαίο να εισάγουμε μια τέτοια σχέση.

Σύμφωνα με τον Pai [1], το κινηματικό ιξώδες του μίγματος αέρα σωματιδίων μπορεί να δοθεί με τη σχέση

$$v_m = \frac{v_g}{1+n} \quad (4.27)$$

όπου η παράμετρος n , που εκφράζει ουσιαστικά την επίδραση της στερεής φάσης είναι

$$n = \frac{k_p}{1-k_p} \quad \text{και} \quad k_p = \frac{Z\rho_{sp}}{Z\rho_{sp} + (1-Z)\rho_g} = \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_m} \quad (4.28)$$

Η παράμετρος k_p εκφράζει ουσιαστικά την μαζική συγκέντρωση των σωματιδίων, αφού όπως φαίνεται από τη σχ. (4.28) είναι ίση με το λόγο της μερικής πυκνότητας των σωματιδίων $\bar{\rho}_p$, προς την πυκνότητα του μίγματος ρ_m .

Θεωρώντας ότι για το μίγμα ισχύει η σχέση $\mu_m = v_m\rho_m$, όπως για κάθε ρευστό, και με τη βοήθεια των σχ. (4.27) και (4.28) προκύπτει ότι το μοριακό ιξώδες του μίγματος εκφράζεται με τη σχέση

$$\mu_m = \mu_g - Z\mu_g \quad (4.29)$$

Εξετάζοντας τη σχέση αυτή διαπιστώνουμε ότι το μοριακό ιξώδες του μίγματος είναι μικρότερο από το μοριακό ιξώδες του αέρα κατά τον όρο $Z\mu_g$. Ο όρος αυτός εκφράζει την επίδραση των στερεών σωματιδίων, τα οποία με την παρουσία τους στο στοιχειώδη όγκο του μίγματος, "σπάζουν" την συνεκτικότητα του ρευστού, με αποτέλεσμα το μίγμα να εμφανίζει μικρότερη συνεκτικότητα άρα και μικρότερο μοριακό ιξώδες. Έτσι μπορούμε τελικά να θεωρήσουμε ότι ο όρος $Z\mu_g$ εκφράζει το μοριακό ιξώδες των στερεών σωματιδίων

$$\mu_p = Z\mu_g \quad (4.30)$$

Για πολύ μικρές τιμές του Z μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μ_p είναι αμελητέο και έτσι το μοριακό ιξώδες του μίγματος θα είναι ίσο με το μοριακό ιξώδες του

ρευστού. Πράγματι και από την σχ. (4.29) φαίνεται ότι για $Z=0$ έχουμε $\mu_m = \mu_g$. Για πεπερασμένες τιμές του Z πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπ' όψη και το μοριακό ιξώδες των στερεών σωματιδίων και ο υπολογισμός του να γίνεται από τη σχ. (4.30).

4.6.2 Τυρβώδης ροή

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα στη διερεύνηση της ροής των ρευστών είναι ο υπολογισμός του ιξώδους τύρβης. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα, τα οποία δεν έχουν καθολική ισχύ, αλλά εφαρμοζόμενα σε ειδικά ροϊκά φαινόμενα δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Το πρόβλημα γίνεται πολυπλοκότερο στη διερεύνηση της διαφασικής ροής και ειδικότερα στην περίπτωση της ροής αέρα στερεών σωματιδίων σε αγωγούς. Για την εξέταση της κίνησης της κάθε φάσης, με εφαρμογή των κινηματικών εξισώσεων χωριστά για κάθε φάση, πρέπει να γίνει ο υπολογισμός του ιξώδους τύρβης του αέρα και των στερεών σωματιδίων χωριστά. Αυτό αυξάνει τη δυσκολία του προβλήματος, αφού δεν υπάρχουν σχέσεις αντίστοιχες με του αέρα, για τον υπολογισμό του ιξώδους των σωματιδίων. Έτσι γίνεται φανερή η ανάγκη εισαγωγής ενός μοντέλου κατάλληλου για τον υπολογισμό του ιξώδους τύρβης του αέρα και των στερεών σωματιδίων.

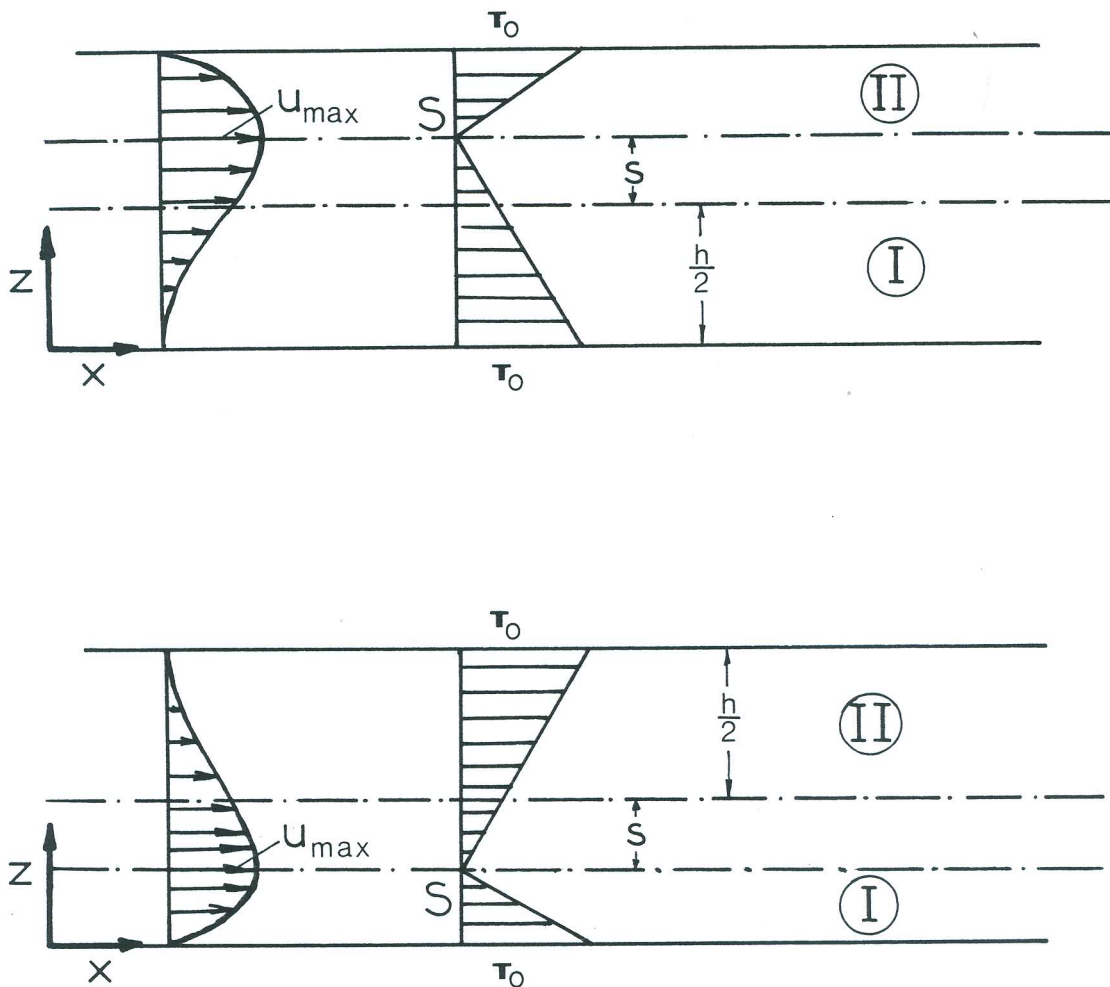
Το προτεινόμενο μοντέλο βασίζεται σε μια πρόταση του Schlichting [59] κατά την οποία είναι προτιμότερο ο υπολογισμός του ιξώδους τύρβης να γίνεται κάθε φορά από τις γνωστές, υπολογιζόμενες ή μετρούμενες, κατανομές της ταχύτητας του ρευστού, με εφαρμογή της σχέσης $\tau = \mu du/dr$ και με κατάλληλο προσδιορισμό της διατμητικής τάσης. Το μοντέλο αυτό έχει ήδη χρησιμοποιηθεί από τους [62], για τον υπολογισμό του ιξώδους τύρβης του αέρα στην περίπτωση της ασυμπίεστης μονοφασικής ροής σε κυλινδρικούς αγωγούς, με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Χρησιμοποίηση του μοντέλου σε διαφασική ροή γίνεται για πρώτη φορά στην εργασία αυτή, όπως διαπιστώνεται από τη διερεύνηση της βιβλιογραφίας.

4.6.2.1 Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης

Όπως είναι γνωστό η κατανομή ταχύτητας του αέρα, στην περίπτωση της μονοφασικής ροής σε κυλινδρικό αγωγό ή μεταξύ παραλλήλων πλακών, παρουσιάζει μέγιστη τιμή στον άξονα του αγωγού, όπου η διατμητική τάση είναι μηδέν, και ελάχιστη στα τοιχώματα, όπου η διατμητική τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της, τ_0 . Μια εύλογη επομένως θεώρηση είναι αυτή της γραμμικής κατανομής της διατμητικής τάσης. Η σχέση που θα εκφράζει αυτήν την θεώρηση θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η διατμητική τάση στον άξονα του αγωγού να είναι $\tau = 0$ και στα τοιχώματα $\tau = \tau_0$, [59].

A1. Στην περίπτωση της διφασικής ροής αέρα-σωματιδίων μεταξύ παραλλήλων πλακών, οι κατανομές των ταχυτήτων των δύο φάσεων δεν παρουσιάζουν μέγιστη τιμή στον άξονα του αγωγού αλλά σε άλλο τυχαίο σημείο, που μπορεί να βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα [3]. Αξονοσυμμετρική διφασική ροή είναι δυνατόν να έχουμε μόνο στην περίπτωση της αραιής πνευματικής μεταφοράς. Η γενική θεώρηση όμως του ροϊκού φαινομένου μας αναγκάζει να λάβουμε υπόψη μας την ασύμμετρη μορφή της κατανομής των ταχυτήτων.

Έστω h η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλακών και s η απόσταση από τον άξονα του σημείου S , που εμφανίζεται η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού, Σχήμα 4.2. Αν το σημείο S βρίσκεται πάνω από τον άξονα, τότε η διατμητική τάση δίνεται από τις σχέσεις



Σχήμα 4.2: Μοντέλο για τον προσδιορισμό της διατμητικής τάσης σε ροή αέρα-σωματιδίων μεταξύ παραλλήλων πλακών.

$$\tau_I = \left(\frac{\frac{h}{2} + s - r}{\frac{h}{2} + s} \right) \tau_0 = \left(1 - \frac{r}{\frac{h}{2} + s} \right) \tau_0 \quad (4.31\alpha)$$

$$\tau_{II} = \left(\frac{r - s - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2} - s} \right) \tau_0 \quad (4.31\beta)$$

όπου τ_I η διατμητική τάση για την περιοχή I, από το κάτω τοίχωμα μέχρι το σημείο S και τ_{II} η διατμητική τάση για την περιοχή II, από το σημείο S μέχρι το πάνω τοίχωμα.

Αν το σημείο S βρίσκεται κάτω από τον άξονα του αγωγού, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις για τη διατμητική τάση είναι

$$\tau_I = \left(\frac{\frac{h}{2} - s - r}{\frac{h}{2} - s} \right) \tau_0 = \left(1 - \frac{r}{\frac{h}{2} - s} \right) \tau_0 \quad (4.31\gamma)$$

$$\tau_{II} = \left(\frac{r + s - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2} + s} \right) \tau_0 \quad (4.31\delta)$$

A2. Στην περίπτωση της ροής σε κυλινδρικό αγωγό θεωρούμε διαφορετική γραμμική κατανομή της διατμητικής τάσης. Η κατανομή αυτή δίνεται από τη σχέση

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \quad (4.32)$$

με R την ακτίνα του αγωγού, και έχει μέγιστη τιμή, $\tau = \tau_0$, στο τοίχωμα όπου $r = R$, και ελάχιστη, $\tau = 0$, στον άξονα του αγωγού, όπου $r = 0$. Η θεώρηση αυτής της κατανομής της διατμητικής τάσης εξηγείται από το γεγονός ότι εξετάζεται η αραιή μόνο πνευματική μεταφορά σε κυλινδρικό αγωγό, η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί με πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθεί αξονοσυμμετρική.

4.6.2.2 Ιξώδες τύρβης αέρα

Ο υπολογισμός του ιξώδους τύρβης του αέρα γίνεται με εφαρμογή της σχέσης του Boussinesq

$$\tau_{tg} = \mu_{tg} \frac{d\bar{u}_g}{dr} \quad (4.33\alpha)$$

και με τη βοήθεια μιας των σχέσεων (4.31) και (4.32). Για τον προσδιορισμό της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα, τ_{og} , γίνεται διάκριση του είδους της ροής.

A. Στη ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών για τη διατμητική τάση στο τοίχωμα χρησιμοποιείται η σχέση

$$\tau_{og} = 0.0225 \rho_{gR} u_{gR}^2 \left(\frac{v_{gR}}{u_{gR} \delta(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.33\beta)$$

που δίνει τη διατμητική τάση επίπεδης πλάκας, πάνω στην οποία αναπτύσσεται τυρβώδες οριακό στρώμα. Το v_{gR} είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού και το $\delta(x)$ το πάχος του οριακού στρώματος ίσο με

$$\delta(x) = 0.37 x \left(\frac{u_{gR} x}{v_{gR}} \right)^{-\frac{1}{5}} \quad (4.33\gamma)$$

Όπως φαίνεται η διατμητική τάση, άρα και το ιξώδες τύρβης του αέρα, είναι συνάρτηση της απόστασης x από την αρχική διατομή.

B. Στην ροή σε κυλινδρικό αγωγό για τη διατμητική τάση στο τοίχωμα χρησιμοποιείται η σχέση

$$\tau_{0,g} = 0.03955 \rho \bar{u}_g^{7/4} \nu^{1/4} d^{-1/4} \quad (4.34)$$

όπου \bar{u}_g η μέση ταχύτητα του αέρα για την οποία ισχύει η σχέση

$$\frac{\bar{u}_g}{u_{g\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (4.35)$$

Το n μεταβάλλεται ελάχιστα με τον αριθμό Reynolds και συγκεκριμένα από την τιμή $n = 6$ για χαμηλούς αριθμούς Reynolds, $Re = 4 \times 10^3$, μέχρι την τιμή $n = 10$ για πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds, $Re = 3240 \times 10^3$ [59]. Για αριθμούς Reynolds $O(10^5)$, που συναντούνται στους υπολογισμούς εδώ, η τιμή του n είναι $n = 7$.

4.6.2.3 Ιξώδες τύρβης σωματιδίων

Ο υπολογισμός του ιξώδους τύρβης των σωματιδίων γίνεται με εφαρμογή σχέσης παρόμοιας με αυτή του Boussinesq

$$\tau_{tp} = \mu_{tp} \frac{d\bar{u}_p}{dr} \quad (4.36)$$

και με τη βοήθεια πάλι μιας των σχέσεων (4.31) και (4.32). Ο υπολογισμός της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα, τ_{op} , που οφείλεται στη ροή των σωματιδίων, δεν είναι τόσο εύκολος, όπως στην περίπτωση της ροής του αέρα. Όπως διαπιστώθηκε, από τη σχετική διερεύνηση της βιβλιογραφίας, δεν αναφέρεται πουθενά εξέταση τυρβώδους οριακού στρώματος επίπεδης πλάκας ή κυλινδρικού αγωγού, σε διφασική ροή αέρα σωματιδίων, από την οποία να προκύπτει η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση στο τοίχωμα. Αντίθετα το στρωτό οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας εξετάζεται από τον [1], ο οποίος χρησιμοποιώντας πεδιακή μέθοδο, δίνει λύση αντίστοιχη της λύσης Blasius του στρωτού οριακού στρώματος επίπεδης πλάκας για ροή αέρα, και από τον [63], ο οποίος χρησιμοποιώντας ολοκληρωτική μέθοδο, δίνει λύση αντίστοιχη της λύσης Pohlhausen.

A. Σύμφωνα με τους Pai [1] και Boothroyd [2] η λύση του ασυμπίεστου οριακού στρώματος επίπεδης πλάκας για ροή αέρα-σωματιδίων, με εφαρμογή της μεθόδου του Blasius για την περίπτωση της μονοφασικής ροής, δίνει για τη διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας τη σχέση

$$\tau_{ogp} = \left(\frac{0.332 \rho_{gR} u_{gR}^2}{\text{Re}_x^{1/2}} \right) (1+n)^{1/2} \left(1 + 0.49 \frac{L_v}{x} \frac{n}{1+n} \right) \quad (4.37)$$

όπου ο όρος στην πρώτη παρένθεση εκφράζει τη διατμητική τάση τ_{og} , που οφείλεται στη ροή του αέρα μόνο, όπως είναι γνωστή από την κλασική ρευστομηχανική, και

$$n = \frac{Z \rho_p}{(1-Z) \rho_g} \quad (4.38)$$

ο λόγος των μερικών πυκνοτήτων των δύο φάσεων και Z η ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων. Το μήκος αποκατάστασης της ταχύτητας L_v , δηλαδή το μήκος εκείνο μέσα στο οποίο τα σωματίδια αποκτούν ταχύτητα περίπου ίση με την ταχύτητα του αέρα, δίνεται από τη σχέση

$$L_v = \frac{4 \rho_p d_p^2 u_{gR}}{18 \mu_{gR}} \quad (4.39)$$

όπου d_p η διάμετρος και ρ_p η πυκνότητα των σωματιδίων και μ_{gR} το δυναμικό ιξώδες του αέρα. Η σχέση αυτή ισχύει για $L_v/x \ll 1$.

Η σχ.(4.37) δίνει την ολική διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας, που οφείλεται στη ροή του αέρα και των σωματιδίων και για $Z=0$ δίνει τη διατμητική τάση της ροής του αέρα μόνο. Έτσι μπορεί να γραφεί

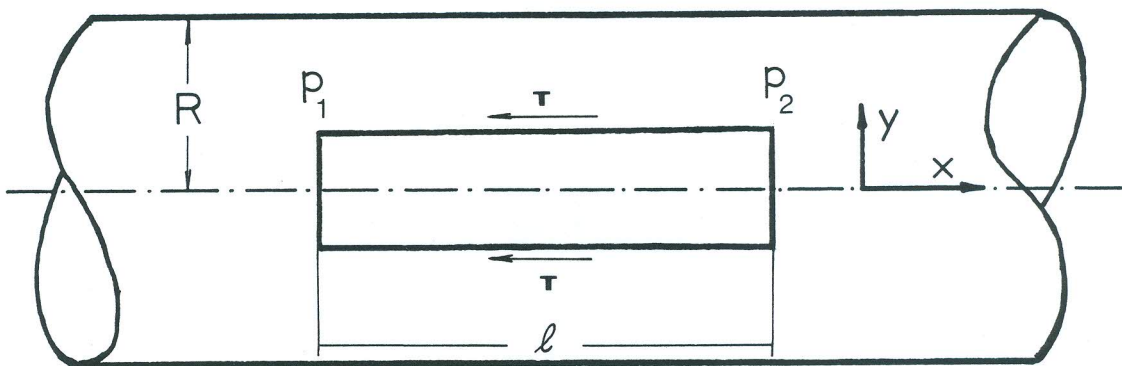
$$\tau_{ogp} = \tau_{og} + \tau_{op} \quad (4.40)$$

οπότε η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας, που οφείλεται στη ροή των σωματιδίων μόνο είναι

$$\tau_{op} = \left(\frac{0.332 \rho_{gR} u_{gR}^2}{Re_x^{1/2}} \right) \left[(1+n)^{1/2} \left(1 + 0.49 \frac{L_v}{x} \frac{n}{1+n} \right) - 1 \right] \quad (4.41)$$

και έτσι μετά τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης από την ανωτέρω σχέση, μπορεί να υπολογιστεί το ιξώδες τύρβης των σωματιδίων για τη διφασική ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών.

B. Για τη ροή σε κυλινδρικό αγωγό ακολουθείται η εξής μέθοδος. Έστω ένα στοιχειώδες κυλινδρικό τμήμα μήκους l και ακτίνας y ομοαξονικό με τον αγωγό, Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης σε ροή αέρα-σωματιδίων σε αγωγό κυκλικής διατομής.

Θεωρώντας ότι στο στοιχείο δεν επιδρούν αδρανειακές δυνάμεις μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη ισορροπίας μεταξύ της δύναμης, που αναπτύσσεται λόγω διατμητικών τάσεων τ στην παράπλευρη επιφάνεια και της δύναμης, που οφείλεται στη διαφορά των πιέσεων στις μετωπικές επιφάνειες του στοιχείου

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{1} \frac{y}{2} = \frac{\Delta p}{1} \frac{y}{2} \quad (4.42)$$

Η διατμητική αυτή τάση έχει γραμμική κατανομή και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, τ_0 , στο τοίχωμα, όπου

$$\tau_0 = \frac{\Delta p R}{1} \quad (4.43)$$

Η πτώση πίεσης Δp οφείλεται στη ροή του αέρα και των σωματιδίων, η οποία σύμφωνα με την ανάλυση του Hinkle [35] είναι

$$\Delta p = \Delta p_{\text{gas}} + \Delta p_{\text{solid}} = \frac{1}{2} \rho_g u_g^2 \left(1 + \lambda_g \frac{1}{d}\right) + \bar{\rho}_p u_p^2 \left(1 + \lambda_p \frac{1}{2d}\right) \quad (4.44)$$

όπου λ_g ο συντελεστής τριβής του αέρα και λ_p ο συντελεστής τριβής των σωματιδίων

$$\lambda_p = \frac{3\rho_g c_D d (u_g - u_p)^2}{2d \rho_{sp} u_p} \quad (4.45)$$

Για το συντελεστή αντίστασης των σωματιδίων, c_D , χρησιμοποιείται η σχ. (3.34). Λαμβάνοντας τώρα υπόψη μόνο την πτώση πίεσης, που οφείλεται στη ροή των σωματιδίων και αμελώντας αδρανειακούς όρους έχουμε

$$\tau_{0p} = \frac{1}{1} \bar{\rho}_p u_p^2 \frac{\lambda_p R}{2d} = \frac{1}{8} \lambda_p \bar{\rho}_p u_p^2 \quad (4.46)$$

Μετά τον υπολογισμό της τ_{0p} , με τη γνωστή διαδικασία υπολογίζεται το ιξώδες τύρβης των σωματιδίων στην περίπτωση της ροής σε κυλινδρικό αγωγό.

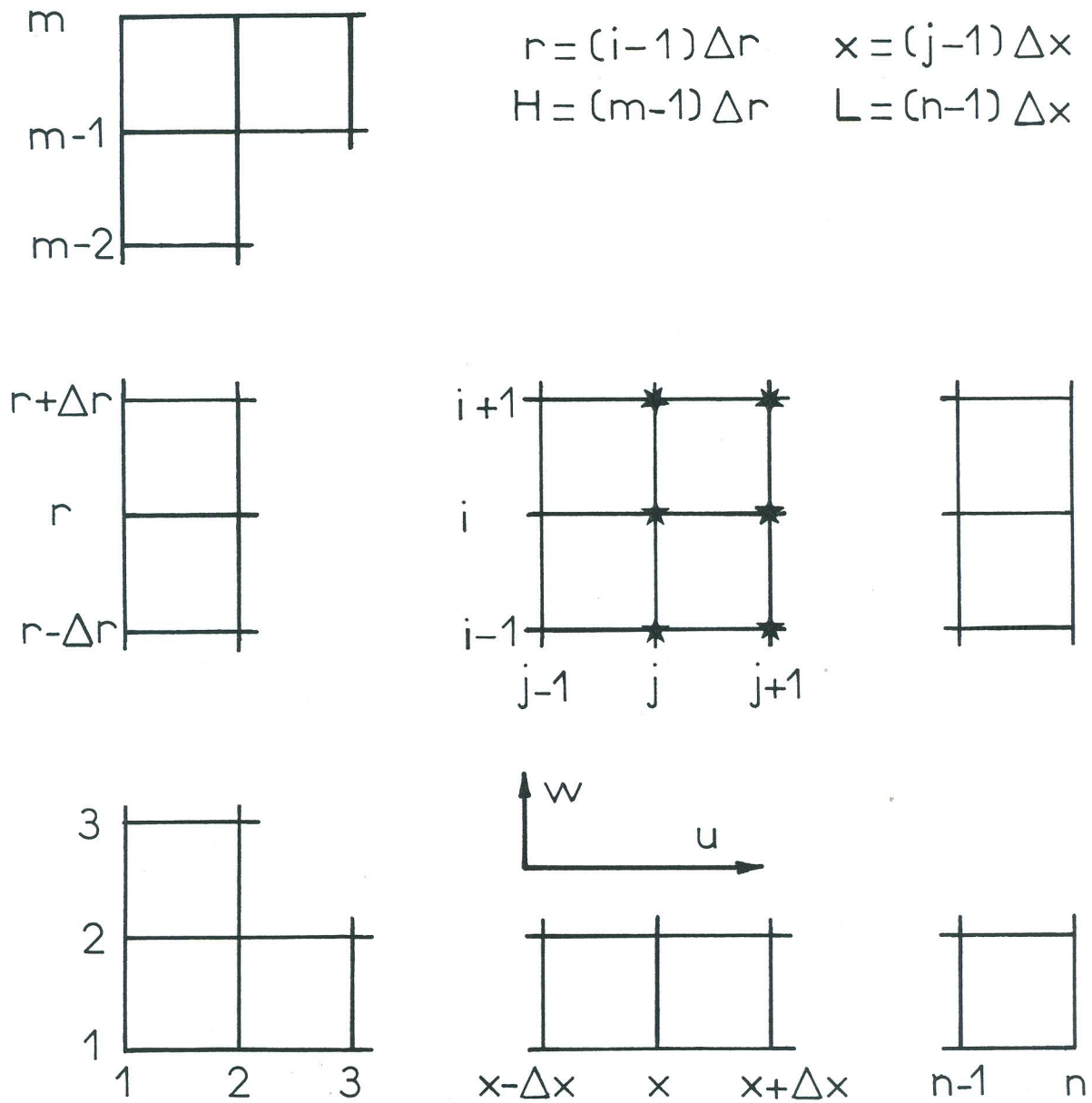
5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

5.1 Πλέγμα και εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών

Για τη λύση του συστήματος των εξισώσεων, σχ. (4.8), (4.9), εφαρμόζεται μια μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Η συμμετρία της αξονικής ροής στον κυλινδρικό αγωγό επιτρέπει να εξεταστεί η ροή μόνο στο ημιεπίπεδο, το ένα όριο του οποίου είναι ο άξονας του ρεύματος, δηλ. η τετμημένη x , και το άλλο το τοίχωμα του αγωγού. Η τομή του ημιεπιπέδου αυτού με το επίπεδο της αρχικής διατομής του αγωγού συμπίπτει με την τεταγμένη r . Στην περίπτωση της ροής μεταξύ παραλλήλων πλακών η ροή εξετάζεται σ' ένα τυχαίο τμήμα επιπέδου, που ορίζεται από την άνω και την κάτω πλάκα. Η κάτω πλάκα ορίζει το ένα όριο της ροής, δηλ. την τετμημένη x , ενώ η τεταγμένη r ορίζεται όμοια από την τομή του επιπέδου αυτού με το επίπεδο της αρχικής διατομής. Το γεωμετρικό πρότυπο της ροής φαίνεται στο Σχήμα 5.1.

Το ροϊκό πεδίο χωρίζεται με ένα πλέγμα, το οποίο αποτελείται από m οριζόντιες γραμμές, που καλύπτουν όλο το ημιεπίπεδο, και n κάθετες γραμμές, που καλύπτουν όλο το μήκος του αγωγού. Η αρίθμηση των γραμμών γίνεται με τους δείκτες j στην αξονική διεύθυνση και i στην ακτινική διεύθυνση και είναι $j=1,2,\dots,n-1,n$ και $i=1,2,\dots,m-1,m$. Το αριθμητικό σχήμα, που χρησιμοποιείται, αποτελείται από έξι κόμβους του δικτύου:



Σχήμα 5.1: Το γεωμετρικό πρότυπο της ροής.

$P_{i-1,j}$, $P_{i,g}$, $P_{i+1,j}$ στη γραμμή j , στην οποία οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών είναι γνωστές ή μπορούν να υποτεθούν σαν γνωστές, και $P_{i-1,j+1}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$ στην επόμενη γραμμή $j+1$. Οι ζητούμενες τιμές των μεταβλητών στους κόμβους της νέας αυτής γραμμής εξαρτώνται, μέσω των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος, από τις γνωστές τιμές των αντιστοίχων κόμβων της προηγούμενης γραμμής. Αν ο αριθμός των κόμβων στη γραμμή $j+1$ είναι m , τότε οι εξισώσεις των πεπερασμένων διαφορών, οι οποίες προέρχονται από τις διαφορικές εξισώσεις (4.8), αποτελούν ένα σύστημα $m-2$ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες συμπληρώνονται με τις δύο οριακές συνθήκες, σχηματίζοντας έτσι ένα σύστημα m γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων η λύση του οποίου δίνει τις τιμές των m αγνώστων μεγεθών, δηλαδή τη ζητούμενη κατανομή από κόμβο σε κόμβο. Με την κατανομή αυτή τώρα γνωστή συνεχίζεται ο υπολογισμός στη νέα γραμμή.

Η πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών χαρακτηρίζεται για την ευστάθεια της, δηλαδή την ανθεκτικότητα της έναντι αποκλίσεων, οι οποίες προέρχονται από προσεγγιστικά σφάλματα κατά το σχηματισμό των πεπερασμένων διαφορών. Πρόσθετα σφάλματα εισέρχονται κατά την απλοποίηση μη γραμμικών όρων των διαφορικών εξισώσεων, γινομένων μιας εξαρτημένης μεταβλητής και της παραγώγου της ή γινομένων παραγώγων δύο διαφορετικών μεταβλητών, σε γραμμικές εκφράσεις. Σε ένα ευσταθές αριθμητικό σχήμα τα σφάλματα αυτά παραμένουν μικρότερα ορισμένων ελαχίστων ορίων. Η απόκλιση της λύσης από την “ιδανική” λύση με ελάχιστα ή μηδενικά σφάλματα τείνει προς το μηδέν και δεν αυξάνει εκθετικά κατά την πορεία του υπολογισμού, όπως συμβαίνει με τις ασταθείς αριθμητικές μεθόδους, κατά την υπέρβαση της συνθήκης ευστάθειας. Την ευστάθεια χωρίς όρους της μεθόδου του Laasonen απέδειξε ο Abbot [64] με τη βοήθεια του απλού παραδείγματος της ασυμπέστης ροής σε κυλινδρικό αγωγό.

Το πλεονέκτημα της ευστάθειας της πεπλεγμένης μεθόδου επιτρέπει να εκλέγονται οι διαστάσεις των βρόγχων του δικτύου έτσι ώστε να πετυχαίνεται μια επιθυμητή ακρίβεια της λύσης με όσο το δυνατόν μικρότερη διάρκεια των υπολογισμών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Τα διαφορικά του συστήματος των εξισώσεων προσεγγίζονται στον κόμβο $P_{i,j+1}$ με τις παρακάτω εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών, όπου M είναι γενικά κάθε εξαρτημένη μεταβλητή και Δx , Δr οι διαστάσεις των βρόγχων του δικτύου (βλ. Σχήμα 5.1) [65,66,67]

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{i,j+1} = \frac{M_{i,j+1} - M_{i,j}}{\Delta x} \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_{i,j+1} = \frac{\Theta(M_{i+1,j+1} - M_{i-1,j+1})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(M_{i+1,j} - M_{i-1,j})}{2\Delta r} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}\right)_{i,j+1} = & \frac{\Theta(M_{i+1,j+1} - 2M_{i,j+1} + M_{i-1,j+1})}{(\Delta r)^2} + \\ & + \frac{(1-\Theta)(M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j})}{(\Delta r)^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Η παράμετρος Θ , που εμφανίζεται στις παραπάνω εκφράσεις, είναι μια παράμετρος βαρύτητας. Αυτή καθορίζει με ποια βαρύτητα οι τιμές μιας εξαρτημένης μεταβλητής στους πέντε κόμβους του πλέγματος επηρεάζουν τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής αυτής στον κόμβο $P_{i,j+1}$. Η παράμετρος Θ παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι ένα. Για $\Theta=0$ το σχήμα είναι καθαρά ρητό (explicit) και αποτελείται από τέσσερις κόμβους, τρεις στην j -γραμμή και ένα στην $j+1$ -γραμμή. Η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής στον κόμβο $P_{i,j+1}$ εξαρτάται μόνο από τις γνωστές τιμές στους τρεις κόμβους της j -γραμμής. Για $\Theta=1$ το σχήμα είναι καθαρά πεπλεγμένο (implicit) και αποτελείται από τέσσερις κόμβους, ένα στην j -γραμμή και τρεις στην $j+1$ -γραμμή. Στην περίπτωση αυτή η τιμή κάθε μεταβλητής στον κόμβο $P_{i,j+1}$ εξαρτάται και από τις άγνωστες τιμές της στους γειτονικούς κόμβους της $j+1$ -γραμμής. Τέλος για $\Theta=1/2$ προκύπτει το γνωστό σχήμα των Crank-Nicolson [65] αποτελούμενο από τους έξι κόμβους του πλέγματος με ίση βαρύτητα γνωστών και αγνώστων τιμών για τον υπολογισμό της εξαρτημένης μεταβλητής στον κόμβο $P_{i,j+1}$.

Με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Taylor αποδεικνύεται ότι το προσεγγιστικό σφάλμα της πρώτης σχέσης είναι της τάξης του Δx και των δυο άλλων σχέσεων της τάξης του $(\Delta r)^2$. Από τις απαιτήσεις λοιπόν της ακρίβειας της λύσης ή της διάρκειας των υπολογισμών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή γίνεται η εκλογή του μεγέθους των διαστάσεων Δx και Δr των βρόγχων του πλέγματος.

5.2 Ανάπτυξη εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές.

5.2.1 Οι εξισώσεις ορμής

A. Εξίσωση ορμής x-διεύθυνση

Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών αναπτύσσονται στην $j+1$ γραμμή, αν στις σχ. (4.8) και (4.9) εφαρμοστούν οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών, που δίνονται

από τις σχ. (5.1), (5.2) και (5.3). Με την αντικατάσταση αυτή η εξίσωση ορμής για την x-διεύθυνση γράφεται

$$\begin{aligned}
& (\bar{\rho}_r \mathbf{u}_r)_{i,j+1} \frac{u_{r_{i,j+1}} - u_{r_{i,j}}}{\Delta x} + (\bar{\rho}_r \mathbf{w}_r)_{i,j+1} \left[\frac{\Theta(u_{r_{i+1,j+1}} - u_{r_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \right. \\
& \left. + \frac{(1-\Theta)(u_{r_{i+1,j}} - u_{r_{i-1,j}})}{2\Delta r} \right] = - \frac{p_{r_{i,j+1}} - p_{r_{i,j}}}{\Delta x} + \\
& + \frac{\mu_{r_{i,j+1}}}{\text{Re}_R} \left[\frac{\Theta(u_{r_{i+1,j+1}} - 2u_{r_{i,j+1}} + u_{r_{i-1,j+1}})}{(\Delta r)^2} + \frac{(1-\Theta)(u_{r_{i+1,j}} - 2u_{r_{i,j}} + u_{r_{i-1,j}})}{(\Delta r)^2} \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re}_R} \left[\frac{\Theta(\mu_{r_{i+1,j+1}} - \mu_{r_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(\mu_{r_{i+1,j}} - \mu_{r_{i-1,j}})}{2\Delta r} \right] \bullet \\
& \bullet \left[\frac{\Theta(u_{r_{i+1,j+1}} - u_{r_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(u_{r_{i+1,j}} - u_{r_{i-1,j}})}{2\Delta r} \right] + \\
& + \frac{\mu_{r_{i,j+1}}}{\text{Re}_R} \frac{k}{r} \left[\frac{\Theta(u_{r_{i+1,j+1}} - u_{r_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(u_{r_{i+1,j}} - u_{r_{i-1,j}})}{2\Delta r} \right] \pm \\
& \pm \frac{3}{8r_p} c_{Dx} Z \rho_g (u_g - u_p)_{i,j+1}^2 \pm J_y Z \rho_g (w_g - w_p)_{i,j+1} \bullet \\
& \bullet \left[\frac{\Theta(u_{g_{i+1,j+1}} - u_{g_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(u_{g_{i+1,j}} - u_{g_{i-1,j}})}{2\Delta r} \right]
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει η αξονική ταχύτητα u_r σε κάθε κόμβο της γραμμής $j+1$. Η σύνδεση με την προηγούμενη γραμμή j , στην οποία είναι γνωστή η κατανομή των μεγεθών, γίνεται αν οι γραμμένοι έντονα συντελεστές της παραπάνω σχέσης υποτεθούν σαν γνωστοί στην j -γραμμή, αν δηλαδή ο δείκτης $j+1$ αντικατασταθεί με τον j , γεγονός που αποκαθιστά την γραμμικότητα της σχ. (5.4).

Εισάγοντας τα μεγέθη $\lambda = \Delta x / (\Delta r)^2$ και $r = (i-1)\Delta r$ (βλ. Σχήμα 5.1) και μετά την εκτέλεση των πράξεων και την αναγωγή των ομοίων όρων, προκύπτει ένα σύστημα $m-2$ γραμμικών εξισώσεων m -αγνώστων της μορφής

$$A_{r_{i,j}} u_{r_{i+1,j+1}} + B_{r_{i,j}} u_{r_{i,j+1}} + C_{r_{i,j}} u_{r_{i-1,j+1}} = D_{r_{i,j}} \tag{5.5}$$

με $i=2,3,\dots,m-1$. Οι συντελεστές της σχ. (5.5) γράφονται αναλυτικά

$$A_{r_{i,j}} = \left[\frac{\lambda \Delta r \bar{\rho}_r w_{r_{i,j}}}{2} - \frac{\lambda \mu_{r_{i,j}}}{Re_R} - \frac{\lambda}{4 Re_R} (\mu_{r_{i+1,j}} - \mu_{r_{i-1,j}}) - \frac{\lambda k \mu_{r_{i,j}}}{2(i-1) Re_R} + M_1 \frac{J_y Z \rho_g (w_g - w_p)_{i,j} \lambda \Delta r}{2} \right] \Theta = A_{r_{i,j}}^* \Theta \quad (5.6)$$

$$B_{r_{i,j}} = \bar{\rho}_r u_{r_{i,j}} + \frac{2 \lambda \mu_{r_{i,j}} \Theta}{Re_R} \quad (5.7)$$

$$C_{r_{i,j}} = \left[-\frac{\lambda \Delta r \bar{\rho}_r w_{r_{i,j}}}{2} - \frac{\lambda \mu_{r_{i,j}}}{Re_R} + \frac{\lambda}{4 Re_R} (\mu_{r_{i+1,j}} - \mu_{r_{i-1,j}}) + \frac{\lambda k \mu_{r_{i,j}}}{2(i-1) Re_R} - M_1 \frac{J_y Z \rho_g (w_g - w_p) \lambda \Delta r}{2} \right] \Theta = C_{r_{i,j}}^* \Theta \quad (5.8)$$

$$D_{r_{i,j}} = -p_{r_{i,j+1}} + p_{r_{i,j}} - A_{r_{i,j}}^* u_{r_{i+1,j}} (1 - \Theta) + \left[B_{r_{i,j}} - \frac{2 \mu_{r_{i,j}} \lambda}{Re_R} \right] u_{r_{i,j}} - C_{r_{i,j}}^* u_{r_{i-1,j}} (1 - \Theta) + M_3 \frac{3c_{Dx}}{8r_p} Z \rho_g (u_g - u_p)_{i,j}^2 \Delta x + M_2 \frac{J_y Z \rho_g (w_g - w_p)_{i,j} \lambda \Delta r}{2} (u_{g_{i+1,j+1}} - u_{g_{i-1,j+1}}) \Theta + M_2 \frac{J_y Z \rho_g (w_g - w_p)_{i,j} \lambda \Delta r}{2} (u_{g_{i+1,j}} - u_{g_{i-1,j}}) (1 - \Theta) \quad (5.9)$$

όπου οι συντελεστές M παίρνουν τιμές: $M_1=1$, $M_2=0$, $M_3=-1$ όταν με τη σχ. (5.5) γίνεται ο υπολογισμός της ταχύτητας του αέρα, και $M_1=0$, $M_2=1$, $M_3=1$, όταν γίνεται υπολογισμός της ταχύτητας των σωματιδίων.

Η σχ. (5.5) ισχύει για $2 < i < m-1$ οπότε από την ανάπτυξή της προκύπτει ένα σύστημα $m-2$ γραμμικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό συμπληρώνεται, για την περίπτωση της ροής μεταξύ παραλλήλων πλακών, με τις δύο οριακές συνθήκες

$$i=1 \quad u_r(x, -h/2) = 0 \quad (5.10\alpha)$$

$$i=m \quad u_r(x, +h/2) = 0 \quad (5.10\beta)$$

δίνοντας έτσι ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους.

Στην περίπτωση της ροής σε κυλινδρικό αγωγό το σύστημα των $m-2$ εξισώσεων συμπληρώνεται με την οριακή συνθήκη στο τοίχωμα, σχ. (4.17), και την οριακή συνθήκη στον άξονα, σχ. (4.16). Για $i=1$, δηλαδή για τα σημεία $P_{i,j+1}$ πάνω στον άξονα ισχύει η σχ. (4.16). Με εφαρμογή των εκφράσεων πεπερασμένων διαφορών στη σχέση αυτή προκύπτει η εξίσωση των πεπερασμένων διαφορών για τον άξονα. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι σύμφωνα με τη σχ. (4.14), ισχύει $du_r/dr = 0$ έχουμε

$$\frac{\Theta(u_{r_{i+1,j+1}} - u_{r_{i-1,j+1}})}{2\Delta r} + \frac{(1-\Theta)(u_{r_{i+1,j}} - u_{r_{i-1,j}})}{2\Delta r} = 0 \quad (5.11)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$u_{r_{i+1,j+1}} = u_{r_{i-1,j+1}} \quad (5.12\alpha)$$

$$u_{r_{i+1,j}} = u_{r_{i-1,j}} \quad (5.12\beta)$$

όποτε η εξίσωση ορμής για τον άξονα παίρνει τελικά τη μορφή

$$R_{r_{i,j}} u_{r_{i+1,j+1}} + S_{r_{i,j}} u_{r_{i,j+1}} = T_{r_{i,j}} \quad (5.13)$$

για $i=1$. Οι συντελεστές γράφονται αναλυτικά

$$R_{r_{i,j}} = \left(-\frac{4\lambda\mu_{r_{i,j}}}{Re_R}\right)\Theta = R_{r_{i,j}}^* \Theta \quad (5.14)$$

$$S_{r_{i,j}} = (\bar{\rho}_r u_r)_{i,j} + \frac{4\lambda\mu_{r_{i,j}} \Theta}{Re_R} \quad (5.15)$$

$$T_{r_{i,j}} = -p_{r_{i,j+1}} + p_{r_{i,j}} - u_{r_{i+1,j}} R_{r_{i,j}}^* (1-\Theta) + \\ + u_{r_{i,j}} (S_{r_{i,j}} + R_{r_{i,j}}^*) + M_3 \frac{3}{8r_p} c_{Dx} Z \rho_g (u_g - u_p)_{i,j}^2 \Delta x \quad (5.16)$$

όπου και πάλι οι τιμές του συντελεστή M_3 είναι $M_3=-1$ για τον αέρα και $M_3=1$ για τα σωματίδια.

B. Εξίσωση ορμής r-διεύθυνση.

Από τις εξισώσεις ορμής στην r-διεύθυνση υπολογίζονται η πίεση και η ογκομετρική συγκέντρωση. Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις ορμής των δυο φάσεων στην r-διεύθυνση, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{Fr_R} Z(\rho_{sp} - \rho_g) - \frac{1}{Fr_R} \rho_g \quad (5.17)$$

η οποία μετά την ανάπτυξή της με πεπερασμένες διαφορές και την εκτέλεση των πράξεων δίνει

$$p_{i,j+1} = p_{i-1,j+1} - p_{i,j} + p_{i-1,j} - \frac{\Delta r}{Fr_R} [Z_{i,j}(\rho_{sp} - \rho_g) + \rho_g] \quad (5.18)$$

Η σχ. (5.18) παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της κατανομής της πίεσης στην j+1 γραμμή. Η χρησιμοποίηση τώρα μιας εκ των δύο εξισώσεων ορμής κατά την r-διεύθυνση δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της ογκομετρικής συγκέντρωσης της αντίστοιχης φάσης στην j+1 γραμμή. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $Z_g + Z_p = 1$ υπολογίζεται κατόπιν η ογκομετρική συγκέντρωση της δεύτερης φάσης. Έτσι η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό της ογκομετρικής συγκέντρωσης του αέρα είναι

$$\begin{aligned} Z_{g,i,j+1} &= Z_{g,i+1,j+1} + Z_{g,i+1,j} - Z_{g,i,j} + \\ &+ \left(\frac{Z_g}{p}\right)_{i,j} (p_{i+1,j+1} - p_{i,j+1} + p_{i+1,j} - p_{i,j}) + \\ &\frac{2\Delta r}{p_{i,j}} \left(\frac{3}{8r_p} c_{Dr} Z_p \rho_g (w_g - w_p)^2\right)_{i,j} + \frac{2\Delta r}{p_{i,j}} \frac{\rho_g}{Fr_R} + \frac{J_y Z_p \rho_g}{p_{i,j}} (u_g - u_p)_{i,j} \bullet \\ &\bullet (u_{g,i+1,j+1} - u_{g,i,j+1} + u_{g,i+1,j} - u_{g,i,j}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Στις προηγούμενες σχέσεις, για την ανάπτυξη των διαφορικών χρησιμοποιήθηκε σχήμα τεσσάρων κόμβων, όπως το σχήμα Paskonov, που χρησιμοποιείται στην ανάλυση της εξίσωσης της συνέχειας. Η αλλαγή του σχήματος επιβάλλεται από την ανάγκη σύνδεσης του κόμβου i-1 με τον κόμβο i και όχι με τον κόμβο i+1, όπως συμβαίνει στο σχήμα των έξι κόμβων.

5.2.2 Η εξίσωση συνέχειας

Η ακτινική ταχύτητα υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας, η οποία γράφεται

$$\frac{\partial(\bar{\rho}_r u_r)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}_r w_r)}{\partial r} + \frac{k\bar{\rho}_r w_r}{r} = 0 \quad (5.20)$$

Εδώ εφαρμόζεται το υπολογιστικό σχήμα του Paskonov [68] κατά το οποίο οι επί του σημείου $r_{i-1/2, j+1/2}$ αναπτυσσόμενες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών είναι

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_p = \frac{M_{i,j+1} - M_{i,j} + M_{i-1,j+1} - M_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_p = \frac{M_{i,j+1} - M_{i-1,j+1} + M_{i,j} - M_{i-1,j}}{2\Delta r} \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{kM}{r}\right)_p = \frac{\left(\frac{kM}{r}\right)_{i,j} + \left(\frac{kM}{r}\right)_{i-1,j} + \left(\frac{kM}{r}\right)_{i,j+1} + \left(\frac{kM}{r}\right)_{i-1,j+1}}{4} \quad (5.23)$$

όπου

$$r_{i,j} = r_{i,j+1} = (i-1)\Delta r \quad (5.24\alpha)$$

$$r_{i-1,j} = r_{i-1,j+1} = (i-2)\Delta r \quad (5.24\beta)$$

Με εφαρμογή των παραπάνω εκφράσεων των πεπερασμένων διαφορών στην εξίσωση συνέχειας προκύπτει

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}_r w_r)_{i,j+1} = & -(\bar{\rho}_r w_r)_{i,j} + \frac{(i-1)[2(i-2)-k]}{(i-2)[2(i-1)+k]} [(\bar{\rho}_r w_r)_{i-1,j+1} + \\ & + (\bar{\rho}_r w_r)_{i-1,j}] - \frac{2(i-1)\Delta r}{(2(i-1)+k)\Delta x} [(\bar{\rho}_r u_r)_{i,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i,j} + \\ & + (\bar{\rho}_r u_r)_{i-1,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i-1,j}] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $i > 3$ και με εφαρμογή της υπολογίζεται η κατανομή της ακτινικής ταχύτητας από τον κόμβο 3 μέχρι το όριο του ροϊκού πεδίου.

Για τον άξονα, δηλαδή για $i=1$, χρησιμοποιείται η εξίσωση συνέχειας, που δίνει η σχ. (4.15), από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}_r w_r)_{i,j+1} &= (\bar{\rho}_r w_r)_{i-1,j+1} - (\bar{\rho}_r w_r)_{i,j} + (\bar{\rho}_r w_r)_{i-1,j} - \\ &- \frac{\Delta r}{2\Delta x} [(\bar{\rho}_r u_r)_{i,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i,j} + (\bar{\rho}_r u_r)_{i-1,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i-1,j}] \end{aligned} \quad (5.26)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι λόγω συμμετρίας ισχύει

$$u_{r_{i+1}} = u_{r_{i-1}} \quad \text{και} \quad w_{r_{i+1}} = -w_{r_{i-1}} \quad (5.27)$$

και επιπλέον ότι $w_{r_1} = w_{r_2} = 0$ η σχ. (5.26) δίνει τελικά

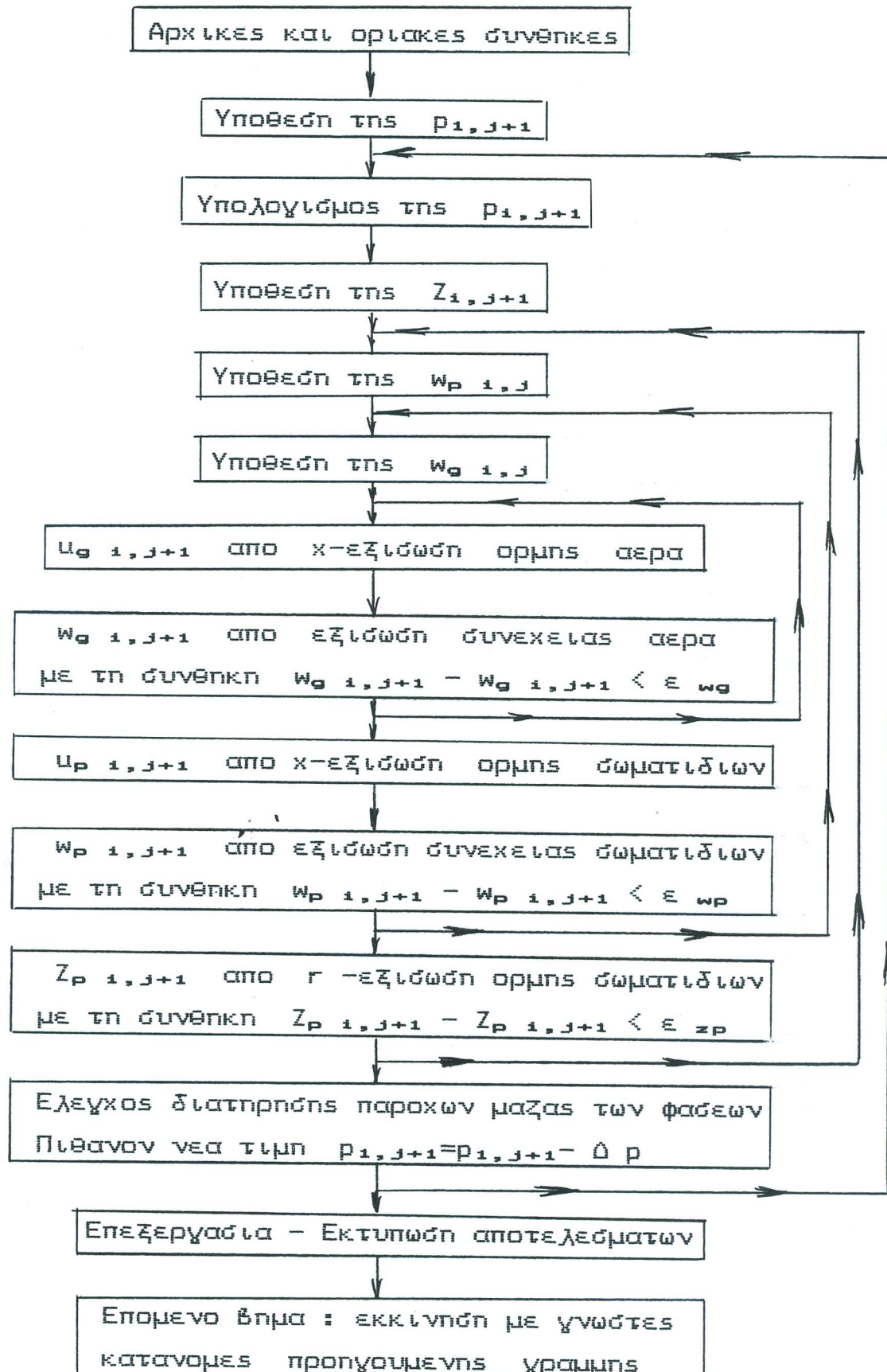
$$\begin{aligned} (\bar{\rho}_r w_r)_{i+1,j+1} &= -(\bar{\rho}_r w_r)_{i+1,j} - \frac{\Delta r}{\Delta x} [(\bar{\rho}_r u_r)_{i,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i,j} + \\ &+ (\bar{\rho}_r u_r)_{i+1,j+1} - (\bar{\rho}_r u_r)_{i+1,j}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Έτσι τελικά η κατανομή της ακτινικής ταχύτητας βρίσκεται για $i>3$ από τη σχ. (5.25), για $i=1$ υπολογίζεται η τιμή της w_{r_2} από τη σχ. (5.28) και το σύστημα συμπληρώνεται με την οριακή συνθήκη $w_{r_1} = 0$.

Η παραπάνω ανάπτυξη της εξίσωσης της συνέχειας είναι προσαρμοσμένη για την περίπτωση της ροής σε κυλινδρικό αγωγό. Δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην περίπτωση της ροής μεταξύ παραλλήλων πλακών, διότι βρέθηκε από τη διερεύνηση, ότι και το είδος αυτό της ροής περιγράφεται με τις ίδιες ακριβώς σχέσεις.

5.3 Υπολογιστικό σχήμα

Όλη η υπολογιστική διαδικασία αποτελείται από τέσσερα στάδια. Πρώτα υπολογίζεται η κατανομή της πίεσης σύμφωνα με τη σχ. (5.18). Ακολουθεί η λύση της εξίσωσης της ορμής, από την οποία υπολογίζεται η αξονική ταχύτητα u_g , και λύση της εξίσωσης συνέχειας, από την οποία υπολογίζεται η ακτινική ταχύτητα w_g του αέρα. Τα δύο αυτά στάδια επαναλαμβάνονται κατά παρόμοιο τρόπο για τον υπολογισμό των ταχυτήτων u_p και w_p των σωματιδίων. Το τελευταίο στάδιο περιλαμβάνει την λύση της δεύτερης εξίσωσης ορμής, κατά την r -διεύθυνση, για τον υπολογισμό της ογκομετρικής συγκέντρωσης του αέρα και των σωματιδίων. (Υπολογιστικό σχήμα, βλ. Σχήμα 5.2.).



Σχήμα 5.2: Οργανόγραμμα υπολογιστικού σχήματος.

Ο υπολογισμός αρχίζει με την εισαγωγή των αρχικών κατανομών της ταχύτητας του αέρα και των σωματιδίων, της πίεσης και της ογκομετρικής συγκέντρωσης των σωματιδίων. Ακολουθεί ο ορισμός των διαστάσεων του δικτύου και των μεγεθών αναφοράς και δίνονται δύο υποθετικές κατανομές για τις ακτινικές ταχύτητες του αέρα και των σωματιδίων. Οι κατανομές αυτές συνήθως δεν είναι γνωστές και έτσι χρειάζεται να γίνει ο προσδιορισμός τους κατά την διάρκεια των υπολογισμών.

Για τη λύση της εξίσωσης της ορμής εφαρμόζεται ο κατάλληλος για παραβολικά προβλήματα αλγόριθμος του Richtmyer [69]. Η εξίσωση ορμής, σχ. (5.13) και (5.5) γράφεται αναλυτικά ως εξής

$$\begin{aligned}
 i=1 & \quad R_{r_1,j} u_{r_2,j+1} + S_{r_1,j} u_{r_1,j+1} & = T_{r_1,j} \\
 i=2 & \quad A_{r_2,j} u_{r_3,j+1} + B_{r_2,j} u_{r_2,j+1} + C_{r_2,j} u_{r_1,j+1} & = D_{r_2,j} \\
 i=3 & \quad A_{r_3,j} u_{r_4,j+1} + B_{r_3,j} u_{r_3,j+1} + C_{r_3,j} u_{r_2,j+1} & = D_{r_3,j} \\
 \dots & \quad \dots & \dots \\
 i=m-2 & \quad A_{r_{m-2},j} u_{r_{m-1},j+1} + B_{r_{m-2},j} u_{r_{m-2},j+1} + C_{r_{m-2},j} u_{r_{m-3},j+1} & = D_{r_{m-2},j} \\
 i=m-1 & \quad B_{r_{m-1},j} u_{r_{m-1},j+1} + C_{r_{m-1},j} u_{r_{m-2},j+1} & = D_{r_{m-1},j}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Το σύστημα των $m-1$ αυτών εξισώσεων συμπληρώνεται με την οριακή συνθήκη $u_{r,m,j+1} = 0$. Στην περίπτωση του ορθογωνικού αγωγού για $i = 1$ αντικαθίσταται η πρώτη εξίσωση του συστήματος με την οριακή συνθήκη $u_{r_1,j+1} = 0$. Έτσι τελικά έχουμε ένα σύστημα m - εξισώσεων με m - αγνώστους.

Κατά τον αλγόριθμο του Richtmyer η λύση του συστήματος αυτού πετυχαίνεται με την εισαγωγή της σχέσης επαναφοράς

$$u_{r_i,j+1} = E_{r_i,j} u_{r_{i+1},j+1} + F_{r_i,j} \tag{5.30}$$

όπου οι συντελεστές $E_{r_i,j}$ και $F_{r_i,j}$ ορίζονται με τις σχέσεις

$$E_{r_i,j} = \frac{-A_{r_i,j}}{B_{r_i,j} + C_{r_i,j} E_{r_{i-1},j}} \tag{5.31}$$

$$F_{r_i,j} = \frac{D_{r_i,j} - C_{r_i,j} F_{r_{i-1},j}}{B_{r_i,j} + C_{r_i,j} E_{r_{i-1},j}} \tag{5.32}$$

για $i > 2$, ενώ για $i = 1$ είναι

$$E_{r_{i,j}} = - \frac{R_{r_{i,j}}}{S_{r_{i,j}}} \quad (5.33)$$

$$F_{r_{i,j}} = \frac{T_{r_{i,j}}}{S_{r_{i,j}}} \quad (5.34)$$

Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής: Από τα δεδομένα n από τα κατά το προηγούμενο βήμα υπολογισθέντα μεγέθη στη γραμμή j υπολογίζεται η κατανομή των συντελεστών (5.33) και (5.34) στον άξονα και των (5.31) και (5.32) μέχρι το οριακό σημείο του ροϊκού πεδίου, δηλαδή το τοίχωμα, όπου $i = m$. Κατόπιν με γνωστούς τους συντελεστές $E_{r_{i,j}}$, $F_{r_{i,j}}$, υπολογίζεται η κατανομή της ταχύτητας u_r στη νέα γραμμή $j + 1$ από τη σχ. (5.30) σε αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή από το τοίχωμα μέχρι τον άξονα.

Μετά τον υπολογισμό της αξονικής ταχύτητας γίνεται ο υπολογισμός της ακτινικής ταχύτητας στη νέα γραμμή $j + 1$ από την εξίσωση της συνέχειας. Ο υπολογισμός αρχίζει στον άξονα όπου $w_{r_{i,j+1}} = 0$. Με $i = 1$ προκύπτει από τη σχ. (5.28) η τιμή $w_{r_{2,j+1}}$ στον επόμενο κόμβο. Οι υπόλοιπες τιμές της ακτινικής ταχύτητας $w_{r_{i,j+1}}$ προκύπτουν από τη σχ. (5.25) με $3 < i < m$.

Με τον τρόπο αυτόν υπολογίζονται τα μεγέθη $(u_g, w_g)_{1,j+1}$. Ο υπολογισμός όμως αυτός γίνεται με την υποθετική κατανομή της $w_{g_{i,j}}$, της οποίας η ορθότητα πρέπει να αποδειχτεί με τη βοήθεια διαδοχικών προσεγγίσεων και μάλιστα τόσες φορές μέχρι να εκπληρωθεί η συνθήκη

$$\left| w_{g_{i,j+1}}^{(v)} - w_{g_{i,j+1}}^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon_{w_g} \quad (5.35)$$

δηλαδή τότε όταν δυο διαδοχικές κατανομές της υπολογισθείσας ακτινικής ταχύτητας $w_{g_{i,j+1}}$ διαφέρουν σε κάθε κόμβο του δικτύου λιγότερο από ένα επιθυμητό όριο ε_{w_g} . Αν η συνθήκη αυτή δεν εκπληρώνεται τότε η αρχική κατανομή $w_{g_{i,j}}$ αντικαθίσταται με τον ακόλουθο μέσο όρο

$$w_{g_{i,j}} = \frac{w_{g_{i,j}}^{(v-1)} + w_{g_{i,j+1}}^{(v)}}{2} \quad (5.36)$$

και επαναλαμβάνεται ο υπολογισμός των u_g και w_g .

Επειδή ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται και με υποθετική κατανομή της ακτινικής ταχύτητας των σωματιδίων, πρέπει να επαναληφθεί. Έτσι η διαδικασία συνεχίζεται με υπολογισμό, κατά παρόμοιο τρόπο, των ταχυτήτων w_p , w_p . Ακολουθεί ίδιος έλεγχος για την ορθότητα της $w_{p_{i,j+1}}$ και αν η συνθήκη

$$\left| w_{p_{i,j+1}}^{(v)} - w_{p_{i,j+1}}^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon_{w_p} \quad (5.37)$$

δεν εκπληρώνεται, τότε αντικαθίσταται η αρχική κατανομή της $w_{p_{i,j}}$ με το μέσο όρο

$$w_{p_{i,j}} = \frac{w_{p_{i,j}}^{(v-1)} + w_{p_{i,j+1}}^{(v)}}{2} \quad (5.38)$$

και επαναλαμβάνεται η διαδικασία με νέο υπολογισμό των ταχυτήτων του αέρα και κατόπιν των σωματιδίων.

Κατόπιν ακολουθεί έλεγχος της ογκομετρικής συγκέντρωσης, αφού όλη η διαδικασία γίνεται με υποθετική κατανομή της ογκομετρικής συγκέντρωσης των σωματιδίων στην $j + 1$ γραμμή. Έτσι μετά τον υπολογισμό των ταχυτήτων αέρα και σωματιδίων υπολογίζεται από την δεύτερη εξίσωση ορμής, σχ. (5.19), η συγκέντρωση $Z_{g_{i,j+1}}$ του αέρα και κατόπιν η συγκέντρωση $Z_{p_{i,j+1}}$ των σωματιδίων, η οποία συγκρίνεται με την υποθετική κατανομή. Εάν δεν εκπληρώνεται η συνθήκη

$$\left| Z_{p_{i,j+1}}^{(v)} - Z_{p_{i,j+1}}^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon_{z_p} \quad (5.39)$$

ο υπολογισμός επαναλαμβάνεται με νέα υπόθεση της συγκέντρωσης το μέσο όρο

$$Z_{p_{i,j+1}} = \frac{Z_{p_{i,j+1}}^{(v-1)} + Z_{p_{i,j+1}}^{(v)}}{2} \quad (5.40)$$

Τελικά επειδή όλη η παραπάνω διαδικασία γίνεται με κατανομή της πίεσης, η οποία βασίζεται σε υποθετική τιμή για το σημείο $p_{i,j+1}$, η ακρίβεια των υπολογισμών πρέπει να ελεγχθεί. Για τον έλεγχο αυτόν υπολογίζονται κάθε φορά τα ολοκληρώματα παροχής μάζας αέρα και σωματιδίων και οι τιμές αυτές συγκρίνονται με τις αρχικές τιμές παροχής μάζας του αέρα και των σωματιδίων, που έχουν προκύψει από τις αρχικές κατανομές των ταχυτήτων. Εάν εκπληρώνονται οι σχέσεις

$$\left| \text{QM}_{g_{i,j+1}} - \text{QM}_{g_{i,j}} \right| \leq \varepsilon_{mg} \quad (5.41)$$

$$\left| \text{QM}_{p_{i,j+1}} - \text{QM}_{p_{i,j}} \right| \leq \varepsilon_{mp} \quad (5.42)$$

τότε ο υπολογισμός προχωρεί στο επόμενο βήμα και συνεχίζεται με την ίδια διαδικασία μέχρι το επιθυμητό μήκος του ροϊκού πεδίου. Εάν όμως δεν εκπληρώνεται η συνθήκη αυτή, γίνεται νέα υπόθεση για την κατανομή της πίεσης, η οποία είναι

$$p_{i,j+1}^{(v+1)} = p_{i,j+1}^{(v)} - \varepsilon_p \quad (5.43)$$

Η υπόθεση αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η πίεση στην $j + 1$ γραμμή θα είναι μικρότερη της πίεσης στην j γραμμή. Έτσι με πολύ μικρές τιμές του ε_p και με επαναληπτικούς υπολογισμούς προσπαθούμε να πετύχουμε την “ακριβή” τιμή της πίεσης στην $j + 1$ γραμμή. Μετά τον υπολογισμό τους τα μεγέθη της $j + 1$ γραμμής τυπώνονται και κατόπιν χρησιμοποιούνται σαν δεδομένα για το επόμενο βήμα υπολογισμού στην $j + 2$ γραμμή.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της παροχής μάζας γίνεται από τις σχέσεις

$$\dot{m}_g = b \rho_{gR} u_{gR} L_R \int_0^1 Z_g \bar{\rho}_g \bar{u}_g d\bar{r} \quad (5.44)$$

$$\dot{m}_p = b \rho_{gR} u_{gR} L_R \int_0^1 Z_p \bar{\rho}_{sp} \bar{u}_p d\bar{r} \quad (5.45)$$

για την περίπτωση της ροής μεταξύ παραλλήλων πλακών, ενώ για τη ροή σε κυλινδρικό αγωγό από τις σχέσεις

$$\dot{m}_g = \pi \rho_{gR} u_{gR} \frac{L_R^2}{2} \int_0^1 Z_g \bar{\rho}_g \bar{u}_g \bar{r} d\bar{r} \quad (5.46)$$

$$\dot{m}_p = \pi \rho_{gR} u_{gR} \frac{L_R^2}{2} \int_0^1 Z_p \bar{\rho}_{sp} \bar{u}_p \bar{r} d\bar{r} \quad (5.47)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται με τον κανόνα του Simpson.

Παρόμοια μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών έχει χρησιμοποιηθεί με ικανοποιητικά αποτελέσματα από τους [62,70,71] για τη λύση διαφόρων προβλημάτων

μονοφασικής ροής καθώς και από τους [72,73] σε προβλήματα διφασικής ροής. Ο Spalding [73] αναφέρει τον χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο, σαν αλγόριθμο της τριδιαγωνίου μήτρας, λόγω της μορφής των εξισώσεων, σε αντιπαράθεση με τη χρησιμοποιούμενη εδώ ονομασία “αλγόριθμος του Richtmyer”.