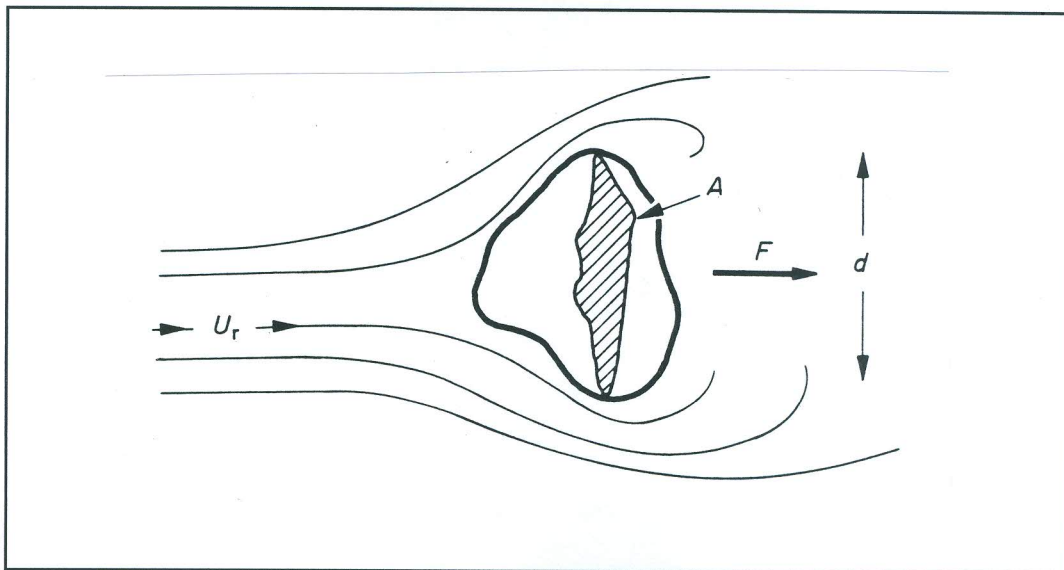


ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ**



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1.1
2.	Η ΡΟΗ ΜΙΓΜΑΤΟΣ ΑΕΡΑ-ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	2.1
2.1	Γενική περιγραφή ροϊκού φαινομένου	2.1
2.2	Προβλήματα στη θεωρητική διερεύνηση	2.3
2.3	Ανασκόπηση στη βιβλιογραφία	2.8
2.4	Βασικές προσεγγίσεις	2.11
3.	ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΜΙΓΜΑΤΟΣ ΑΕΡΑ-ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	3.1
3.1	Θεωρία του συνεχούς μέσου	3.1
3.2	Ορισμοί ροϊκών μεγεθών και παραμέτρων	3.2
3.3	Καταστατική εξίσωση	3.4
3.4	Εξίσωση συνέχειας	3.5
3.5	Εξίσωση ορμής	3.6
3.6	Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης	3.7
3.6.1	Αντίσταση σωματιδίων	3.8
3.6.2	Αεροδυναμική άνοση σωματιδίων	3.11
3.6.3	Στατική άνοση σωματιδίων	3.14
3.7	Πεδιακές δυνάμεις	3.15
3.8	Εξίσωση ενέργειας	3.16

4.	ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΑΕΡΑ - ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ.....	4.1
4.1	Το σύστημα εξισώσεων για τη διδιάστατη ροή	4.1
4.2	Μεγέθη αναφοράς	4.4
4.3	Προσέγγιση και απλοποίηση του συστήματος.....	4.5
4.4	Αρχικές και οριακές συνθήκες	4.7
4.5	Το σύστημα εξισώσεων για τυρβώδη ροή	4.8
4.6	Μεγέθη μεταφοράς.....	4.10
4.6.1	Στρωτή ροή.....	4.11
4.6.2	Τυρβώδης ροή	4.13
4.6.2.1	Προσδιορισμός της διατμητικής τάσης.....	4.13
4.6.2.2	Ιξώδες τύρβης αέρα.....	4.15
4.6.2.3	Ιξώδες τύρβης σωματιδίων.....	4.16
5.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ	5.1
5.1	Πλέγμα και εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών	5.1
5.2	Ανάπτυξη εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές.	5.4
5.2.1	Οι εξισώσεις ορμής	5.4
5.2.2	Η εξίσωση συνέχειας.....	5.9
5.3	Υπολογιστικό σχήμα	5.10
6.	ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	6.1
6.1	Ανάλυση θεωρητικών αποτελεσμάτων.....	6.1
6.2	Σύγκριση θεωρητικών με πειραματικά αποτελέσματα.....	6.14
7.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΜΕΡΟΥΣ	7.1

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις τρεις γνωστές φάσεις ή καταστάσεις της ύλης, στερεή, υγρή και αέρια, έχει προστεθεί, σχετικά πρόσφατα, και μια τέταρτη φάση, το πλάσμα. Οι τρεις καταστάσεις, υγρή, αέρια και πλάσμα, χαρακτηρίζονται γενικά με τον όρο ρευστά, επειδή παραμορφώνονται χωρίς την εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων. Είναι όμως δυνατόν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να χαρακτηριστεί με τον όρο ρευστό και η στερεή φάση. Αυτό συμβαίνει όταν, για παράδειγμα, ένας μεγάλος αριθμός μικρών στερεών σωματιδίων ρέει σε ένα ρευστό, η ταχύτητα του οποίου είναι αρκετά μεγάλη. Επειδή η δυναμική συμπεριφορά αυτών των σωματιδίων είναι παρόμοια με αυτήν ενός συνήθους ρευστού, μπορούμε να θεωρήσουμε τα στερεά αυτά σωματίδια σαν ένα “ψευδορευστό”. Έτσι, υπό κατάλληλες συνθήκες, προβλήματα ροής στερεών (ψευδορευστά), υγρών, αερίων και/ή πλάσματος αντιμετωπίζονται γενικά σαν ροϊκά προβλήματα ρευστών [1].

Η κλασική Ρευστομηχανική εξετάζει ροϊκά φαινόμενα στα οποία εμφανίζονται ρευστά σε μια μόνο φάση, δηλ. Υγρή, αέρια ή πλάσμα, και η στερεή φάση εμφανίζεται σαν σταθερές επιφάνειες, οι όποιες καθορίζουν τις οριακές συνθήκες των ροϊκών προβλημάτων. Μια τέτοια απλή ανάλυση, όμως, αποδεικνύεται ανεπαρκής για τη μελέτη πολλών ρευστομηχανικών προβλημάτων, στα οποία είναι απαραίτητο να λαμβάνεται υπόψη η ταυτόχρονη κίνηση δύο ή περισσότερων φάσεων με σκοπό την ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος. Ένα τέτοιο σύστημα χαρακτηρίζεται με τον

όρο Πολυφασική Ροή. Η πιο συνήθης περίπτωση πολυφασικής ροής είναι η ροή δύο φάσεων ή Διφασική Ροή, η οποία εξετάζει την ταυτόχρονη ροή οποιουδήποτε συνδυασμού δύο εκ των τεσσάρων καταστάσεων της ύλης. Ένα είδος διφασικής ροής αποτελεί η Πνευματική Μεταφορά Στερεών Σωματιδίων, η οποία εξετάζει τη ροή ενός μίγματος αέρα και στερεών σωματιδίων.

2

**Η ΡΟΗ ΜΙΓΜΑΤΟΣ
ΑΕΡΑ-ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ****2.1 Γενική περιγραφή ροϊκού φαινομένου**

Η μελέτη της ροής ρευστών, που περιέχουν στερεά σωματίδια, έχει αποτελέσει το αντικείμενο εργασιών πολλών ερευνητών. Υπάρχουν πολλά προβλήματα μηχανικής, που αφορούν τη ροή ρευστών με στερεά σωματίδια, όπως είναι ο φυγοκεντρικός διαχωρισμός στερεών σωματιδίων από τα ρευστά, η συγκράτηση σκόνης σε ηλεκτροστατικά φίλτρα, πολλές χημικές διεργασίες και η ροή σκόνης σε διάφορα γεωφυσικά και αστροφυσικά προβλήματα. Ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα αποτελεί η μεταφορά ιζημάτων με νερό ή αέρα, διότι σχετίζεται με προβλήματα ρύπανσης του περιβάλλοντος, ένα αντικείμενο υψηλού ενδιαφέροντος στις μέρες μας.

Αν και έχουν γίνει πολλές διερευνήσεις σχετικά με τη ροή ρευστών-στερεών σωματιδίων, οι περισσότερες είναι κατά βάση εμπειρικές, και μόνο πρόσφατα έχει αναπτυχθεί μια προσπάθεια για συστηματική αναλυτική διερεύνηση, όπως φαίνεται και από τη μελέτη της διεθνούς βιβλιογραφίας. Επειδή το ροϊκό φαινόμενο είναι πολύπλοκο, είναι δύσκολο να αναπτυχθεί μια γενική αναλυτική διερεύνηση, η οποία να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις προβλημάτων ροής ρευστών σωματιδίων. Είναι αναγκαίο να γίνει διαχωρισμός σε διάφορα είδη ροής ρευστών-στερεών σωματιδίων και κάθε

είδος ροής να εξετάζεται με τον καταλληλότερο γι αυτήν τρόπο. Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να γίνει μια σύντομη αναφορά σχετικά με τα διάφορα στάδια, από τα οποία διέρχεται το σύστημα ρευστό-σωματίδια, μέχρι να φτάσει στο είδος εκείνο της ροής, που καλείται Διφασική Ροή Μίγματος Ρευστού Στερεών Σωματιδίων.

(α) Στάδιο πορώδους μέσου

Θεωρούμε ένα πλήθος σωματιδίων, τοποθετημένα έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα στερεό στρώμα αρκετού πάχους, και έστω ένα ρευστό, υγρό ή αέριο, που ρέει δια μέσου του στρώματος αυτού. Εάν η παροχή του ρευστού είναι πολύ μικρή, θα παρατηρήσουμε ότι τα σωματίδια δεν διαταράσσονται. Το ρευστό κινείται μέσα από τα σωματίδια, όπως ακριβώς και μέσα από ένα στερεό αντικείμενο. Δηλαδή τα σωματίδια παραμένουν στην περίπτωση αυτή σταθερά στο χώρο, και το είδος αυτό της ροής εξετάζεται σαν ροή σε πορώδη μέσα.

(β) Στάδιο ιζηματογένεσης

Αυξάνοντας την παροχή του ρευστού, παρατηρούμε ότι μερικά από τα σωματίδια κινούνται μαζί με το ρευστό. Επί πλέον αύξηση της παροχής προκαλεί αύξηση του αριθμού των σωματιδίων, τα οποία ακολουθούν την κίνηση του ρευστού. Η ροϊκή αυτή κατάσταση, κατά την οποία μερικά από τα σωματίδια μεταφέρονται από το ρευστό, καλείται στάδιο ιζηματογένεσης. Στη φάση αυτή τα σωματίδια εξετάζονται σαν ξεχωριστά στερεά σώματα, οι ιδιότητες των οποίων παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της ροής του ρευστού.

(γ) Στάδιο ρευστοποίησης

Συνεχίζοντας την αύξηση της παροχής του ρευστού, παρατηρούμε ότι για μια κρίσιμη τιμή αλλάζει ξαφνικά η συμπεριφορά των σωματιδίων. Τα σωματίδια συμπεριφέρονται πλέον σαν ένα ψευδο-ρευστό και σχηματίζουν μια ελεύθερη επιφάνεια όπως τα συνήθη ρευστά. Η ροϊκή αυτή κατάσταση καλείται συνήθως πυκνή φάση ρευστοποιημένου στρώματος. Στην περίπτωση αυτή, η ολική πυκνότητα του μίγματος του αέρα και των στερεών σωματιδίων μειώνεται δραστικά, συγκρινόμενη με την πυκνότητα του μίγματος κατά τη ροή σε πορώδη μέσα. Τώρα ο όγκος που καταλαμβάνουν τα σωματίδια στο μίγμα είναι ίσος με 10% έως 50% του συνολικού όγκου του μίγματος.

(δ) Στάδιο κυματοειδούς ροής

Επιπλέον αύξηση της παροχής του ρευστού προκαλεί ανωμαλίες στη ροή του μίγματος. Εάν, για παράδειγμα, το ρευστό είναι αέριο, εμφανίζονται φυσαλίδες αερίου, οι οποίες, καθώς περνούν από τα στρωματοποιημένα σωματίδια, σπάζουν,

αναγκάζοντας όλο και περισσότερα σωματίδια να ακολουθούν την κίνηση του ρευστού. Η κίνηση των σωματιδίων γίνεται κατά ομάδες δίνοντας έτσι στη ροή μορφή κυματοειδούς μεταφοράς.

(ε) Διφασική ροή μίγματος ρευστού - στερεών σωματιδίων

Για ακόμα μεγαλύτερη αύξηση της παροχής του ρευστού φτάνουμε στο σημείο όπου τα σωματίδια καταλαμβάνουν λιγότερο από το 5% του ολικού όγκου του μίγματος. Στη φάση αυτή παρατηρείται πλήρης ανάμιξη των σωματιδίων με το ρευστό σε όλο το ροϊκό πεδίο. Η ροϊκή αυτή κατάσταση είναι γνωστή σαν αραιή διφασική ροή μίγματος ρευστού και στερεών σωματιδίων.

Επειδή, στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις, τα σωματίδια συμπεριφέρονται σαν ένα ψευδορευστό, και τα τρία αυτά είδη ροής περιγράφονται από τις ίδιες θεμελιώδεις εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της γενικής θεωρίας ροής μίγματος δύο ρευστών σε τέτοιου είδους προβλήματα. Έτσι η θεωρητική διερεύνηση, που γίνεται στα επόμενα κεφάλαια, εφαρμόζεται γενικά και στα τρία αυτά είδη ροής, αναφέρεται όμως ειδικότερα στη διφασική ροή μίγματος αέρα στερεών σωματιδίων, αφού δεν γίνεται ιδιαίτερη μελέτη σχετικά με τις ανωμαλίες, που εμφανίζονται στην κυματοειδή ροή.

2.2 Προβλήματα στη θεωρητική διερεύνηση

Στη διφασική ροή αέρα σωματιδίων θεωρούνται συχνά σωματίδια πολύ μικρού μεγέθους, π.χ. διαμέτρου της τάξης ενός μικρού. Το μέγεθος αυτό των σωματιδίων, και με αυτήν ακόμα τη θεώρηση, είναι πολύ μεγαλύτερο (περίπου τέσσερις τάξεις μεγέθους) από το μέγεθος των μορίων του αέρα, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η προσέγγιση της κίνησης των σωματιδίων με βάση την κινητική θεωρία των αερίων. Η συμπεριφορά των σωματιδίων στο ροϊκό πεδίο του ρευστού, πρέπει να προσδιοριστεί από την κλασική θεωρία της Ρευστομηχανικής, για ροή ρευστού γύρω από ένα σώμα. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει μέχρι στιγμής κατανοηθεί πλήρως, επειδή οι συνθήκες του τοπικού ροϊκού πεδίου εξαρτώνται από τον αριθμό Reynolds του σωματιδίου, τον αριθμό Mach, τον αριθμό Knudsen, το σχήμα και το μέγεθος του σωματιδίου και από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος επιβάλλει ορισμένες προσεγγίσεις, ώστε να καταστεί δυνατή η ανάπτυξη εύλογης θεωρίας για τη διφασική ροή αέρα σωματιδίων.

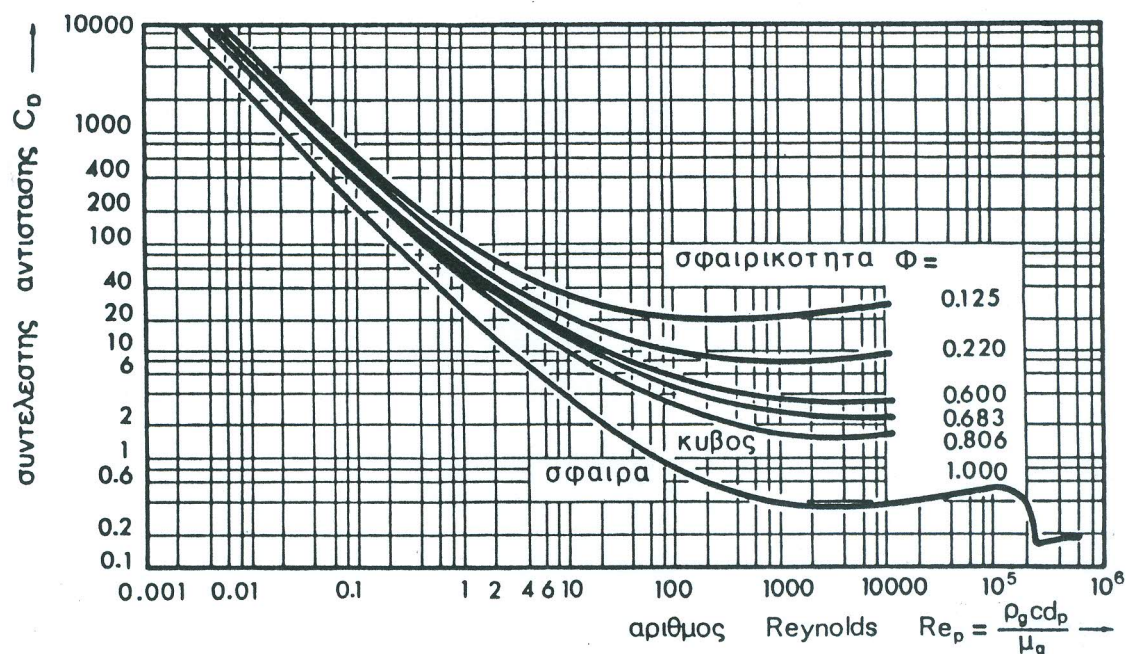
Οι χαρακτηριστικότερες προσεγγίσεις, που έχουν γίνει στις μέχρι τώρα ερευνητικές εργασίες, είναι οι παραδοχές της ομοιομορφίας του μεγέθους των

σωματιδίων, του σφαιρικού σχήματος των σωματιδίων και της έλλειψης αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων.

Στην πρώτη παραδοχή, αν και το μέγεθος των σωματιδίων δεν είναι ομοιόμορφο, στη διφασική ροή αέρα σωματιδίων χρησιμοποιείται μια μέση τιμή του μεγέθους σαν πρώτη προσέγγιση. Στην ανάπτυξη μιας περισσότερο ακριβούς θεωρίας πρέπει να συμπεριληφθεί η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους των σωματιδίων.

Επόμενο πρόβλημα αποτελεί το σχήμα των σωματιδίων. Σωματίδια διαφορετικού σχήματος έχουν διαφορετικό συντελεστή αντίστασης και διαφορετικό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Γενικά όλα τα σωματίδια δεν έχουν το ίδιο σχήμα και έτσι δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια γενική θεωρία σχετικά με το συντελεστή αντίστασης. Για το σκοπό αυτό, σε πρώτη προσέγγιση, θεωρείται ότι όλα τα σωματίδια έχουν σφαιρικό σχήμα. Έτσι χρησιμοποιείται ο συντελεστής αντίστασης μιας σφαίρας διαμέτρου d σαν μέσος συντελεστής αντίστασης όλων των σωματιδίων.

Σε συγκεκριμένο πρόβλημα μεταφοράς σωματιδίων, τα μεταφερόμενα σωματίδια έχουν κατά κανόνα όμοιο σχήμα, όχι όμως σφαιρικό. Αυτό συμβαίνει, π.χ. στην περίπτωση μεταφοράς γεωργικών προϊόντων, όπου οι προσεγγίσεις του μικρού μεγέθους και του σφαιρικού σχήματος δεν ευσταθούν. Η αδυναμία της προσέγγισης μετριάζεται θεωρώντας μεγάλα σωματίδια ίδιου μεγέθους, δηλ. θεωρείται ομοιόμορφη κατανομή μεγέθους, και το σχήμα λαμβάνεται υπόψη στις εξισώσεις προσομοιώνοντας τα σωματίδια με ισοδύναμες σφαίρες, εισάγοντας ένα νέο μέγεθος τη σφαιρικότητα.



Σχήμα 2.1: Συντελεστής αντίστασης σωματιδίων σε συνάρτηση με τον αριθμό Reynolds, Re_p .

Σαν σφαιρικότητα Φ , ενός σωματιδίου ορίζεται ο λόγος της εξωτερικής επιφάνειας μιας σφαίρας, ίσου όγκου με το σωματίδιο, προς την εξωτερική επιφάνεια του σωματιδίου [2]. Η παράμετρος αυτή επηρεάζει δραστικά το συντελεστή αντίστασης του σωματιδίου, ο οποίος δεν είναι μόνο συνάρτηση του αριθμού Reynolds, Re , αλλά και της σφαιρικότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1, [3]. Μεγάλη απομάκρυνση του σχήματος των σωματιδίων από το σφαιρικό σχήμα σημαίνει μικρό Φ , Σχήμα 2.2, και σύγχρονα αύξηση του συντελεστή αντίστασης μέχρι περίπου δύο τάξεις μεγέθους, σε σχέση με το συντελεστή αντίστασης της σφαίρας.

σχημα σωματιδίου	σφαιρικότητα
σφαιρα	1.
οκταεδρο	0.847
κυβος	0.806
πρισματα	
$a \times a \times 2a$	0.767
$a \times 2a \times 2a$	0.761
$a \times 2a \times 3a$	0.725
κυλινδροι	
$h = 2r$	0.874
$h = 3r$	0.860
$h = 10r$	0.691
$h = 20r$	0.580
δισκοι	
$h = 133r$	0.858
$h = r$	0.827
$h = r/3$	0.594
$h = r/10$	0.323
$h = r/15$	0.254
ελλειψοειδεις εκ περιστροφης	
$\phi = 3d$	0.683

Σχήμα 2.2: Πίνακας τιμών σφαιρικότητας σωματιδίων διαφόρων σχημάτων.

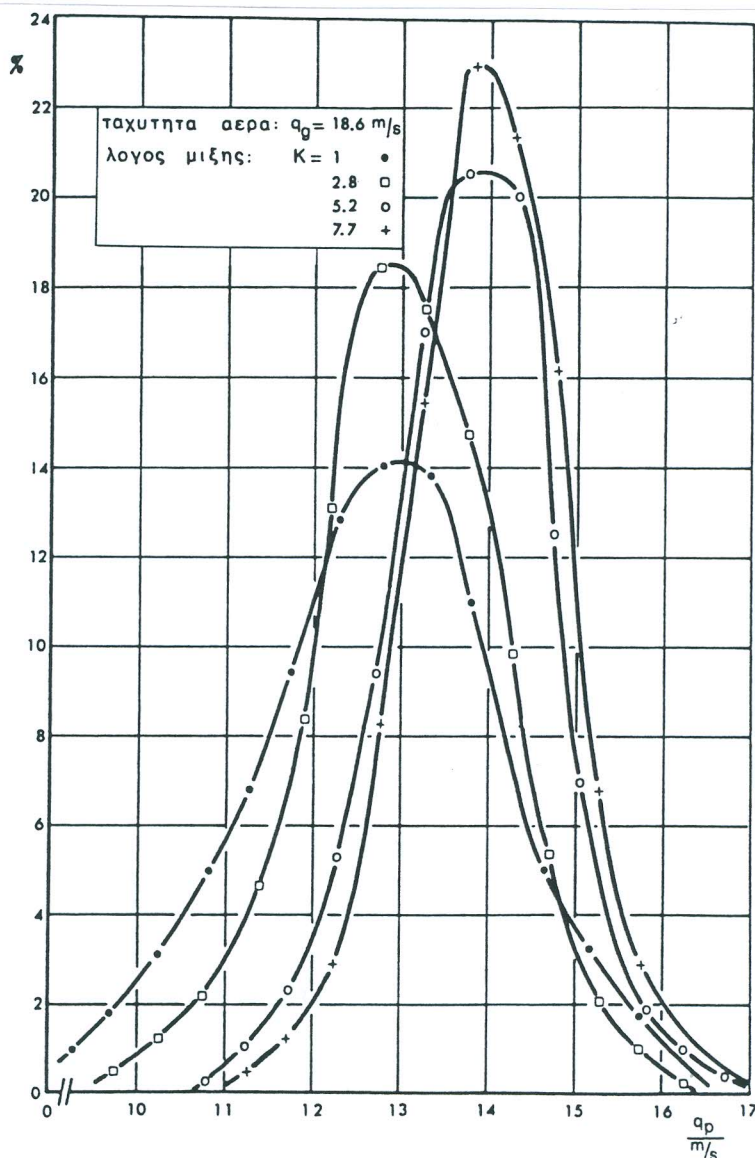
Άλλος παράγοντας, που επηρεάζει το συντελεστή αντίστασης του σωματιδίου, είναι ο αριθμός Mach, σαν μέτρο της επίδρασης της συμπιεστότητας στην αντίσταση της σφαίρας. Επειδή όμως η ταχύτητα, η οποία προσδιορίζει τον αριθμό Mach της σφαίρας στη διφασική ροή, είναι η διαφορά των ταχυτήτων αέρα σωματιδίου, που είναι σχετικά μικρή και δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές, η επίδραση του αριθμού Mach μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Η τραχύτητα της εξωτερικής επιφάνειας του σωματιδίου επηρεάζει επίσης το συντελεστή αντίστασης. Επειδή όμως σε μικρούς αριθμούς Re (στρωτή ροή) η τραχύτητα δεν επηρεάζει και σε μεγάλους αριθμούς Re (τυρβώδη ροή) η αντίσταση τριβής είναι μικρή σε σύγκριση με την αντίσταση πίεσης, η επίδραση αυτή είναι μικρή και θεωρείται αμελητέα. Αντίθετα δεν είναι αμελητέα η επίδραση της περιστροφής του σωματιδίου κατά την οποία αναπτύσσεται η αεροδυναμική άνωση, γνωστή σαν φαινόμενο Magnus. Έτσι στην ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου περιγραφής της διφασικής ροής αέρα σωματιδίων περιλαμβάνονται οι δυνάμεις στατικής άνωσης, αντίστασης και αεροδυναμικής άνωσης, λόγω της περιστροφής των σωματιδίων.

Το τρίτο βασικό πρόβλημα, στη μελέτη της ροής, είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων. Η θεωρία, η οποία έχει αναπτυχθεί μέχρι στιγμής αναφέρεται στη ροή αέρα σωματιδίων χωρίς αλληλεπίδραση των σωματιδίων. Η προσέγγιση αυτή ισχύει στην αραιή πνευματική μεταφορά, όπου, λόγω της μικρής παροχτευόμενης μάζας του υλικού, η αλληλεπίδραση των σωματιδίων είναι αμελητέα. Στην πυκνή πνευματική μεταφορά όμως, λόγω του μεγάλου αριθμού των μεταφερόμενων σωματιδίων πρέπει οπωσδήποτε να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις οι όροι που εκφράζουν την αλληλεπίδραση των σωματιδίων.

Όταν η ροή του ρευστού μέσου είναι μόνιμη, η διφασική ροή αέρα σωματιδίων θεωρείται μόνιμη. Η εύλογη αυτή παραδοχή έρχεται σε αντίθεση με πειραματικές παρατηρήσεις της κίνησης των σωματιδίων [4]. Συγκεκριμένα από πειράματα, που έγιναν σε κατάλληλη πειραματική εγκατάσταση, φαίνεται ότι η ταχύτητα των σωματιδίων σε σταθερό σημείο μέτρησης δεν είναι σταθερή, αλλά παρουσιάζει μια στατιστική κατανομή γύρω από μια μέση τιμή, Σχήμα 2.3. Οι κατανομές αυτές, που βρέθηκαν για λόγους μίξης, $k=m_p/m_g$ (m_p = παροχή μάζας σωματιδίων, m_g = παροχή μάζας αέρα) 1, 2.8, 5.2, και 7.7 δείχνουν το ποσοστό των σωματιδίων, τα οποία πέρασαν από το σημείο μέτρησης με μια ορισμένη ταχύτητα σε χρονικό διάστημα $t = 1$ min. Όπως φαίνεται από το σχήμα, αυξανόμενου του λόγου μίξης αυξάνεται το ποσοστό των σωματιδίων, που έχουν ίδια ταχύτητα, καθώς επίσης αυξάνεται και η μέση ταχύτητα των σωματιδίων.

Το απλό αυτό συμπέρασμα εκφράζει απόλυτα τη φυσική κατάσταση του ροϊκού φαινομένου, αφού αυξανόμενου του λόγου μίξης αυξάνεται ο αριθμός των σωματιδίων στο μίγμα και επομένως και ο ρυθμός των συγκρούσεων και της ανταλλαγής ορμής



Σχήμα 2.3: Στατιστική κατανομή της ταχύτητας των σωματιδίων, σε συγκεκριμένο σημείο μέτρησης του αγωγού μεταφοράς, για χρονική διάρκεια 1 min.

μεταξύ των σωματιδίων. Επειδή η θεώρηση της ροής σαν μη μόνιμης, αυξάνει τα προβλήματα της θεωρητικής διερεύνησης, μπορεί, σε πρώτη προσέγγιση, να θεωρηθεί ότι η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με τη μέση τιμή της σε κάθε σημείο στο ροϊκό πεδίο. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται σαν οιονεί μόνιμη.

Η παραπάνω αναφορά των προβλημάτων, που εμφανίζονται, στη θεωρητική διερεύνηση του φαινομένου της πνευματικής μεταφοράς, δεν ασχολήθηκε με τη λεπτομερή και σε βάθος εξέταση κάθε βασικού προβλήματος και των, συνδεδεμένων με αυτά, δευτερευόντων προβλημάτων. Πιστεύεται όμως ότι ήταν αρκετή, για να γίνει κατανοητή η πολυπλοκότητα του ροϊκού αυτού φαινομένου.

2.3 Ανασκόπηση στη βιβλιογραφία

Η καθημερινή εφαρμογή του φαινομένου της πνευματικής μεταφοράς σε πληθώρα τεχνικών προβλημάτων έκανε επιτακτική την ανάγκη της διερεύνησής του. Έτσι μέχρι σήμερα έχουν γίνει πολλές διερευνήσεις σχετικά με τη ροή ρευστών-στερεών σωματιδίων, που λόγω της πολυπλοκότητας του φαινομένου, είναι κατά βάση εμπειρικές. Προσπάθεια για συστηματική αναλυτική διερεύνηση έχει αναπτυχθεί σχετικά πρόσφατα με αποτέλεσμα πολύ λίγα προβλήματα να έχουν λυθεί κατά τρόπο γενικά παραδεκτό.

Από τις πρώτες εργασίες σχετικά με τη ροή ρευστών-στερεών σωματιδίων αναφέρεται η εργασία του Boussinesq[5] σχετικά με τη μεταφορά ιζημάτων σε ροές ρευστών σε ανοιχτούς αγωγούς, που αποτελεί και τυπικό παράδειγμα των πρώτων εμπειρικών προσπαθειών για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Οι πρώτες όμως προσπάθειες της συστηματικής θεωρητικής διερεύνησης έγιναν κυρίως από τους Marble [6], Murray [7], Soo [8] και Vasiliev [9] με παρουσίαση των θεμελιωδών κινηματικών εξισώσεων του μίγματος αέρα-στερεών σωματιδίων.

Η εργασία του Marble [6] αποτελεί την πρώτη προσπάθεια εφαρμογής των σύγχρονων τεχνικών της Ρευστομηχανικής στην έρευνα της διφασικής ροής του αέρα και των στερεών σωματιδίων. Ο Marble εισήγαγε πολλές σημαντικές παραμέτρους στην ανάπτυξη των εξισώσεων του για τη ροή του μίγματος, όπως είναι η θερμοκρασία και η διάμετρος των στερεών σωματιδίων. Η ανάλυση όμως του Marble περιορίζεται στην περίπτωση της αραιής μεταφοράς, διότι θεωρεί την ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων πάρα πολύ μικρή και συνεπώς αμελητέα. Όπως όμως απέδειξε ο Rudinger [10] η ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων επηρεάζει σημαντικά την ανάπτυξη του ροϊκού πεδίου του μίγματος αέρα-στερεών σωματιδίων.

Ο Murray [7] παρουσιάζει πρώτος την ανάπτυξη των κινηματικών εξισώσεων του μίγματος εφαρμόζοντας την θεωρία του συνεχούς μέσου και λαμβάνοντας υπόψη πεπερασμένες τιμές για την ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων. Στο σύστημα των εξισώσεων του όμως δεν λαμβάνει υπόψη του τη μερική πίεση των στερεών σωματιδίων, η οποία είναι ανάλογη προς την ογκομετρική συγκέντρωση των σωματιδίων, και έτσι αντικαθιστά τη μερική πίεση του αέρα με την ολική πίεση του μίγματος.

Ο Soo [8] έδωσε έμφαση στη σπουδαιότητα της κατανομής του μεγέθους των στερεών σωματιδίων στις κινηματικές εξισώσεις του μίγματος αέρα και στερεών σωματιδίων. Το σύστημα των εξισώσεων, που παρουσίασε, αναφέρεται σε πολυφασική ροή, όπου ο αριθμός των φάσεων του μίγματος καθορίζεται από τον αριθμό των διαφορετικών μεγεθών των σωματιδίων. Το σύστημα αυτό των εξισώσεων δεν είναι εύχρηστο, επειδή η κατανομή του μεγέθους των σωματιδίων είναι γενικά συνεχής και

έτσι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν άπειρο αριθμό μεγεθών. Επιπλέον ο Soo δεν αναφέρει πώς είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι φάσεις με διαφορετική μέση διάμετρο στερεών σωματιδίων, για οποιαδήποτε γνωστή κατανομή του μεγέθους των στερεών σωματιδίων.

Στην εργασία του Vasiliev [9] αναφέρονται διάφορες θεωρίες διφασικής ροής αέρα-στερεών σωματιδίων, που αναπτύχθηκαν από Σοβιετικούς επιστήμονες. Έχοντας όμως σαν κύριο αντικείμενο την υδραυλική, ο Vasiliev θεώρησε μόνο την περίπτωση της ροής ασυμπύεστου ρευστού, δηλ. τη ροή υγρού στερεών σωματιδίων. Έτσι η εξίσωση ενέργειας, που χρησιμοποιεί, είναι η εξίσωση της κινητικής ενέργειας του υγρού και των στερεών σωματιδίων, η οποία δεν είναι ανεξάρτητη αλλά προκύπτει από την εξίσωση κίνησης του μίγματος. Δεν χρησιμοποίησε την εξίσωση ενέργειας για την κατανομή της θερμοκρασίας, που είναι ανεξάρτητη από την εξίσωση κίνησης αλλά εξαρτάται από την κατανομή θερμοκρασίας των σωματιδίων και από τις τυχαίες κινήσεις τους. Όμως ο Vasiliev αναφέρει επιπλέον μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα από τη διερεύνηση της τυρβώδους διφασικής ροής.

Αντίθετα ο Faizullaev [11] αναφέρεται αποκλειστικά στη στρωτή πολυφασική ροή σε αγωγούς. Δίνει την κατάλληλη μορφή του συστήματος των εξισώσεων για διάφορα είδη ροής και με τη λύση τους προσφέρει ικανοποιητικές αναλυτικές σχέσεις. Λεπτομερή εξέταση της μονοδιάστατης διφασικής ροής κάνει ο Wallis [12] με κύρια εφαρμογή των αποτελεσμάτων του σε χημικές διεργασίες.

Τη διφασική ροή αέρα-στερεών σωματιδίων εξετάζουν λεπτομερώς οι Boothroyd [2] και Pai [1, 13]. Ο Boothroyd αναπτύσσει το σύστημα των εξισώσεων και για την τυρβώδη ροή, ενώ ο Pai χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της σύγχρονης Ρευστομηχανικής εξετάζει το φαινόμενο μακροσκοπικά, με εφαρμογή της θεωρίας του συνεχούς μέσου, και μικροσκοπικά, με εφαρμογή της κινητικής θεωρίας και εξαγωγή της εξίσωσης Boltzmann για τη ροή του μίγματος αέρα-σωματιδίων. Και οι δύο όμως δεν δίνουν λύσεις, αλλά περιγράφουν την εξαγωγή του συστήματος των εξισώσεων δίνοντας κατευθύνσεις για ερευνητικές εργασίες. Παρόμοια εξέταση, με χρήση της εξίσωσης Boltzmann, έγινε και από τον Culick [14].

Εκτός από τις παραπάνω εργασίες, που ασχολούνται με τη γενική αντιμετώπιση του ροϊκού φαινομένου, υπάρχουν κι άλλες εργασίες, που ασχολούνται με επί μέρους προβλήματα της ροής του μίγματος αέρα-σωματιδίων. Τέτοια προβλήματα είναι, για παράδειγμα, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των δύο φάσεων. Η πιο σημαντική δύναμη αλληλεπίδρασης, που αναφέρεται σε όλες σχεδόν τις θεωρητικές διερευνήσεις, είναι η δύναμη της αντίστασης των στερεών σωματιδίων. Ο αντικειμενικός σκοπός αυτών των διερευνήσεων είναι ο υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης των σωματιδίων. Οι περισσότεροι ερευνητές εξετάζουν σωματίδια σφαιρικού σχήματος και πολύ μικρού μεγέθους [6, 15, 16, 17] με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν τη σχέση του Stokes για το

συντελεστή αντίστασης της σφαίρας. Προσπάθεια απομάκρυνσης από το σφαιρικό σχήμα των σωματιδίων έγινε από τους Acrivos & Taylor [18] με την εξέταση σωματιδίου σχήματος ελαφρά παραμορφωμένης σφαίρας, όπου όμως η εξέταση έγινε για συνθήκες έρπουσας ροής, δηλαδή για πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds, όπως συμβαίνει στο πρότυπο της ροής Stokes, και από τους Marchildon, Clamen & Gauvin, [19], με την εξέταση της ελεύθερης πτώσης κυλινδρικών σωματιδίων.

Ο Torobin [16] εξετάζει το συντελεστή αντίστασης μιας σφαίρας, που κινείται με σταθερή και επιταχυνόμενη κίνηση μέσα σε ένα τυρβώδες ρευστό, ενώ ο Lee [20] ασχολείται με την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σφαιρών σε ροή υψηλού αριθμού Reynolds. Αλληλεπίδραση όμως μεγάλου αριθμού σωματιδίων δεν αναφέρεται στη βιβλιογραφία.

Πολύ λίγα αναφέρονται επίσης στη βιβλιογραφία σχετικά με τον υπολογισμό της αεροδυναμικής άνωσης, δηλαδή της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της περιστροφής των σωματιδίων. Σχέση υπολογισμού της αεροδυναμικής άνωσης μιας σφαίρας δίνουν οι Rubinow & Keller [21] και παρόμοια σχέση επίσης οι Happel & Brenner [22], αλλά περιορίζονται σε ροές πολύ μικρού αριθμού Reynolds. Τα αποτελέσματά τους εφαρμόζονται σε αργή κίνηση μιας μικρής σφαίρας σε ρευστό, όπως είναι τα αιωρήματα στερεών σωματιδίων σε ρευστά. Μια πιο βελτιωμένη σχέση υπολογισμού της άνωσης παρουσίασε ο Willetts [23], η οποία όμως περιέχει σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν πειραματικά. Τέλος οι Ahmad & Goulas [24] ανέπτυξαν μια αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό της τροχιάς των σφαιρικών σωματιδίων σε φαινόμενα πνευματικής μεταφοράς. Στην εργασία αυτή λαμβάνεται υπόψη η δύναμη της άνωσης, που επιδρά στην κίνηση των σωματιδίων και η οποία προκαλείται από την περιστροφή των σωματιδίων. Η περιστροφή αυτή δημιουργείται από την πρόσκρουση των σωματιδίων στα τοιχώματα του αγωγού. Η ανάλυση όμως αυτή περιορίζεται στην κίνηση ενός μεμονωμένου σφαιρικού σωματιδίου και δεν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση άλλων σωματιδίων. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η πειραματική προσπάθεια προσδιορισμού της άνωσης, που παρουσίασαν οι Murray & Willetts [25].

Η ίδια εικόνα παρατηρείται και σχετικά με την εξέταση της μη μόνιμης ροής αέρα στερεών σωματιδίων. Η διερεύνηση αυτού του είδους της ροής είναι πιο δύσκολη και απαιτεί μεγάλο αριθμό παραδοχών για την επίλυσή της. Για παράδειγμα αναφέρεται η εργασία των Rudinger & Chang [15] οι οποίοι εξετάζουν τη μη μόνιμη μονοδιάστατη διφασική ροή. Οι παραδοχές, που γίνονται στην εργασία αυτή, είναι οι εξής: ο αέρας θεωρείται σαν τέλειο αέριο, σφαιρικά σωματίδια ομοιόμορφου μεγέθους είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κάθε διατομή του αγωγού, η θερμική κίνηση των σωματιδίων δεν έχει επίδραση στην πίεση, ο όγκος που καταλαμβάνουν τα σωματίδια είναι αμελητέος, η θερμοκρασία είναι ομοιόμορφη σε κάθε σωματίδιο. Επί πλέον πρέπει να προσδιοριστεί κατάλληλη σχέση υπολογισμού της αντίστασης των

σωματιδίων και της μεταφοράς θερμότητας και να προδιαγραφεί οποιαδήποτε μεταβολή της διατομής του αγωγού και οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη, που τυχόν επιδρά στον αέρα ή τα σωματίδια.

Αντίθετα με τη θεωρητική, η πειραματική διερεύνηση του φαινομένου της πνευματικής μεταφοράς στερεών σωματιδίων εμφανίζεται πλούσια στη διεθνή βιβλιογραφία καλύπτοντας ένα πολύ μεγάλο πεδίο γενικών και ειδικών εφαρμογών. Έτσι πολλές εργασίες εξετάζουν την επίδραση διαφόρων παραμέτρων, όπως είναι η διάμετρος του αγωγού ή το μέγεθος και η πυκνότητα των σωματιδίων, στην πτώση πίεσης σε οριζόντιους [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32] ή κάθετους αγωγούς [33, 34, 35, 36].

Η πτώση πίεσης είναι η σπουδαιότερη παράμετρος υπολογισμού σε εγκαταστάσεις πνευματικής μεταφοράς διότι από αυτήν εξαρτάται η εγκατεστημένη ισχύς του συστήματος. Έτσι εκτός της διερεύνησης των ευθύγραμμων τμημάτων των αγωγών μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα ιδιόμορφα τμήματα, που προκαλούν τις τοπικές απώλειες, όπως είναι οι γωνίες αλλαγής διεύθυνσης [37, 38, 39, 40], οι στενώσεις και διαπλατύνσεις του αγωγού [41, 42, 43], οι περιστροφικοί τροφοδότες [44, 45] και άλλα.

Τέλος μεγάλος αριθμός εργασιών αναφέρονται στην πειραματική διερεύνηση ειδικών εφαρμογών πνευματικής μεταφοράς, όπως είναι η εξόρυξη μεταλλευμάτων από ορυχεία [46, 47, 48, 49, 50], η φορτοεκφόρτωση υλικών [51, 52, 53, 54] καθώς και η μεταφορά στερεών πυρηνικών αποβλήτων σε πυρηνικούς σταθμούς [55, 56].

2.4 Βασικές προσεγγίσεις

Για τη θεωρητική διερεύνηση της διφασικής ροής αέρα στερεών σωματιδίων χρησιμοποιούνται εδώ οι τεχνικές της σύγχρονης ρευστομηχανικής και εξετάζεται το φαινόμενο μακροσκοπικά με εφαρμογή της θεωρίας του συνεχούς μέσου. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή τα σωματίδια θεωρούνται σαν ένα συνεχές μέσο, ένα ψευδορευστό, γεγονός που σημαίνει ότι θεωρείται μεγάλος αριθμός σωματιδίων στη μονάδα του όγκου, δηλαδή η ογκομετρική συγκέντρωση δεν είναι αμελητέα αλλά παραμένει σαν μια από τις βασικές παραμέτρους στην εξέταση του φαινομένου.

Σχετικά με τα σωματίδια και με τα προβλήματα που εμφανίζονται, λόγω του μεγέθους και του σχήματός των, γίνονται οι παρακάτω παραδοχές. Θεωρούνται σωματίδια σχετικά μεγάλου μεγέθους, με διάμετρο της τάξης του 1 mm, και ομοιόμορφης κατανομής του μεγέθους. Το μέγεθος αυτό των σωματιδίων αποτελεί και τη μέση τιμή του μεγέθους των χρησιμοποιούμενων σωματιδίων στην πειραματική διερεύνηση του φαινομένου. Λόγω του μεγέθους αυτού των σωματιδίων, δημιουργείται

πρόβλημα στον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης των σωματιδίων, διότι προκύπτουν υψηλοί αριθμοί Reynolds και δεν είναι έτσι δυνατόν να εφαρμοσθεί η σχέση του Stokes, αλλά πρέπει να αναζητηθεί μια πιο κατάλληλη σχέση για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης.

Ένας άλλος παράγοντας, που επηρεάζει το συντελεστή αντίστασης, είναι και το σχήμα των σωματιδίων. Η επίδραση του σχήματος λαμβάνεται υπόψη με την εισαγωγή της σφαιρικότητας, της παραμέτρου δηλαδή που δείχνει πόσο το σχήμα του σωματιδίου πλησιάζει ή απομακρύνεται από το σφαιρικό σχήμα. Έτσι τελικά ο υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης των σωματιδίων γίνεται με κατάλληλη σχέση [57, 82], που ισχύει για αριθμούς Reynolds μέχρι $Re < 10^4$, και λαμβάνοντας υπόψη τη σφαιρικότητα του σωματιδίου, η οποία αυξάνει μέχρι δύο τάξεις μεγέθους την τιμή του [3, 57].

Σημαντικό ενδιαφέρον αλλά και δυσκολία παρουσιάζουν στη θεωρητική διερεύνηση οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των φάσεων. Οι δυνάμεις που λαμβάνονται υπόψη στην παρούσα εξέταση, είναι η αντίσταση των σωματιδίων, που αναφέρθηκε παραπάνω, η αεροδυναμική άνωση, που προκαλείται από την περιστροφή των σωματιδίων στο χώρο λόγω της βαθμίδας της ταχύτητας του ρευστού, η στατική άνωση και οι δυνάμεις βαρύτητας. Οι δύο τελευταίες δεν παρουσιάζουν δυσκολίες στον υπολογισμό τους σε αντίθεση με την αεροδυναμική άνωση, που παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες, για την αντιμετώπιση των οποίων καταστρώθηκε κατάλληλο μοντέλο υπολογισμού της αεροδυναμικής άνωσης.

Άλλες δυνάμεις αλληλεπίδρασης, όπως είναι οι συγκρούσεις των σωματιδίων μεταξύ τους και με τα τοιχώματα του αγωγού, ή οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται λόγω του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από την τριβή των σωματιδίων, δεν λαμβάνονται υπόψη στη θεωρητική αυτή διερεύνηση, όπως δεν λαμβάνονται υπόψη και οι συνθήκες της μη μόνιμης ροής.

Δίνεται όμως μεγάλη βαρύτητα στον υπολογισμό του δυναμικού ιξώδους και του ιξώδους τύρβης του ψευδορευστού των σωματιδίων. Έτσι καταστρώνεται μοντέλο για τον υπολογισμό του μοριακού ιξώδους των σωματιδίων για την περίπτωση της στρωτής ροής. Αναπτύσσονται οι εξισώσεις για την τυρβώδη ροή και, κατά παρόμοιο τρόπο με την υπόθεση του Boussinesq, γίνεται υπόθεση για αντίστοιχη έκφραση του ιξώδους τύρβης των σωματιδίων και αναπτύσσεται αντίστοιχο μοντέλο για τον υπολογισμό του.

Τέλος αναφέρεται ότι στην προσπάθεια γενικότερης εξέτασης του φαινομένου και ευρύτερης εφαρμογής των αποτελεσμάτων, αναπτύσσονται οι εξισώσεις για καρτεσιανό και κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, συνδυάζονται σ' ένα σύνθετο σύστημα, και γίνεται η επίλυση αυτού σε γενική μορφή.

3

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΜΙΓΜΑΤΟΣ ΑΕΡΑ - ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

3.1 Θεωρία του συνεχούς μέσου

Η πολυπλοκότητα της ροής μίγματος αέρα και στερεών σωματιδίων δημιουργεί προβλήματα στην προσπάθεια της θεωρητικής διερεύνησης του ροϊκού αυτού φαινομένου. Οι παράμετροι, που πρέπει να ληφθούν υπόψη, όπως το σχήμα και το μέγεθος των σωματιδίων, σε συνδυασμό με διάφορες δευτερογενείς καταστάσεις, που λαμβάνουν χώρα κατά την εξέλιξη της ροής, όπως είναι η κρούσεις των σωματιδίων μεταξύ τους και με τα στερεά τοιχώματα, η συγκέντρωση των σωματιδίων σε ομάδες και η διάσπαση αυτών σε μικρότερες ομάδες ή μεμονωμένα σωματίδια, καθιστούν δύσκολη την ακριβή μαθηματική περιγραφή της ροής. Έτσι γίνεται αναγκαία η εφαρμογή προσεγγιστικών μεθόδων, οι οποίες ανάλογα με τις βασικές παραδοχές που περιέχουν, προσεγγίζουν, άλλες λιγότερο και άλλες περισσότερο, την περιγραφή του πραγματικού ροϊκού φαινομένου. Ορισμένες από τις μεθόδους αυτές βρίσκουν εφαρμογή σε συγκεκριμένα είδη ροών, ενώ άλλες εφαρμόζονται σε περισσότερες περιπτώσεις ροϊκών προβλημάτων.

Η θεωρία του συνεχούς μέσου, που χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή, θεωρείται σαν μια από τις πιο ικανοποιητικές μεθόδους προσέγγισης του προβλήματος. Σύμφωνα με αυτή τα σωματίδια θεωρούνται σαν ένα ρευστό, ή όπως καλύτερα

ονομάζεται ψευδορευστό, το οποίο έχει τις ιδιότητες που έχει και ένα πραγματικό ρευστό, δηλαδή ένα συνεχές μέσο. Έτσι το ψευδορευστό των σωματιδίων χαρακτηρίζεται από τα ροϊκά του μεγέθη, ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία και πυκνότητα, αλλά και από τα μεγέθη μεταφοράς, όπως είναι ο συντελεστής ιξώδους και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Με το χαρακτηρισμό των σωματιδίων σαν ψευδορευστό γίνεται και η βασική παραδοχή ότι αυτά υπακούουν στους νόμους κίνησης των ρευστών. Η θεωρία του συνεχούς μέσου εφαρμόζεται χωρίς περιορισμούς σε κάθε είδους ροής αέρα σωματιδίων εκτός από την περίπτωση της πολύ αραιής πνευματικής μεταφοράς, όπου λόγω του πολύ μικρού αριθμού των σωματιδίων δεν είναι εύλογος ο χαρακτηρισμός αυτών σαν συνεχές μέσο.

3.2 Ορισμοί ροϊκών μεγεθών και παραμέτρων

Η ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου, που ακολουθεί, βασίζεται στην εξέταση του μίγματος αέρα σωματιδίων από την άποψη του συνεχούς μέσου [1,2,13]. Το μίγμα αποτελείται από δύο ρευστά, για καθένα των οποίων εφαρμόζονται χωριστά οι κινηματικές εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη και την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φάσεων. Λόγω του μεγάλου αριθμού των ροϊκών μεγεθών και των παραμέτρων, που εμφανίζονται στο μαθηματικό αυτό μοντέλο, είναι απαραίτητο να προηγηθούν διάφοροι ορισμοί για να καταστεί σαφέστερη η ανάπτυξη του μοντέλου.

Τα σωματίδια είναι σφαίρες με μάζα m_p , ακτίνα r_p , και ειδική θερμοχωρητικότητα c_s του υλικού. Εάν τα σωματίδια δεν έχουν σφαιρικό σχήμα τότε γίνεται αναγωγή αυτών σε ισοδύναμες σφαίρες λαμβάνοντας υπόψη τη σφαιρικότητα τους. Για κάθε φάση r στο μίγμα μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{q}_r , τη θερμοκρασία T_r , την πίεση p_r και την πυκνότητα ρ_r .

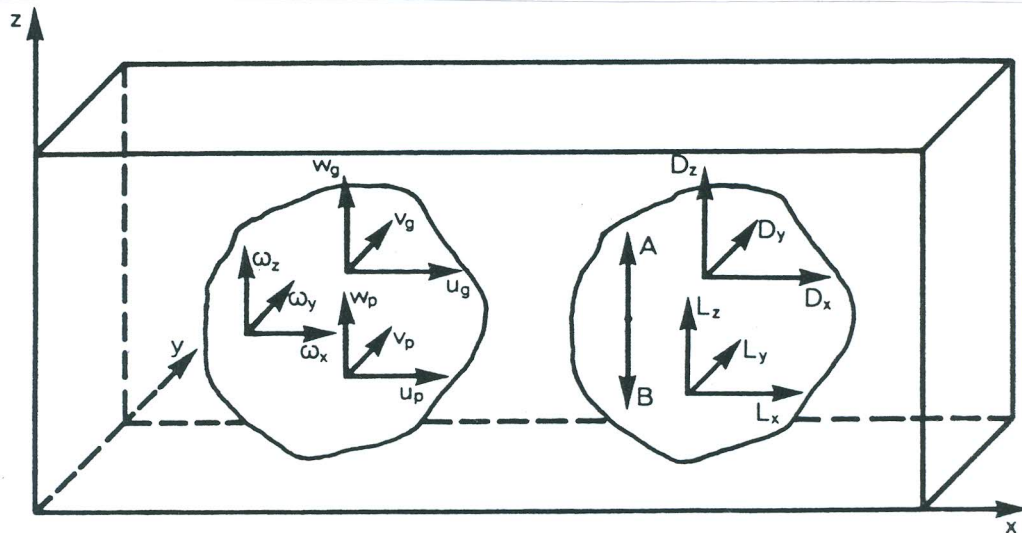
Ένα στοιχείο του μίγματος αέρα σωματιδίων, Σχήμα 3.1, έχει ολική μάζα

$$M = M_p + M_g \quad (3.1)$$

και ολικό όγκο

$$V = V_p + V_g \quad (3.2)$$

όπου οι δείκτες g και p αναφέρονται στον αέρα και τα σωματίδια αντίστοιχα. Εισάγοντας το μέγεθος n_p , το οποίο ορίζεται σαν ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου σε ένα σημείο στο ροϊκό πεδίο, ο όγκος V_p , που καταλαμβάνουν τα σωματίδια είναι



Σχήμα 3.1: Όγκος ελέγχου και διανυσματικά μεγέθη, για την κατάστρωση του μαθηματικού μοντέλου.

$$V_p = n_p V v_s \quad (3.3)$$

όπου v_s είναι ο όγκος που καταλαμβάνει ένα σωματίδιο στο μίγμα. Ο όγκος αυτός για σωματίδιο σφαιρικού σχήματος είναι $v_s = 4\pi r^3/3$. Ανάλογα, η μάζα των στερεών σωματιδίων στον όγκο V του μίγματος είναι

$$M_p = m_p n_p V \quad (3.4)$$

Η φασική πυκνότητα του υλικού των στερεών σωματιδίων ορίζεται σαν

$$\rho_{sp} = M_p / V_p = m_p / v_s \quad (3.5)$$

και επομένως η πυκνότητα των σωματιδίων είναι σταθερή για την ίδια στερεή φάση.

Στην ανάλυση της θεωρίας της διφασικής ροής πρέπει να χρησιμοποιείται η μερική πυκνότητα κάθε φάσης. Σαν μερική πυκνότητα ορίζεται ο λόγος της μάζας κάθε φάσης προς τον ολικό όγκο του μίγματος των δύο φάσεων. Έτσι η μερική πυκνότητα του ψευδορευστού των στερεών σωματιδίων ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\rho}_p = \frac{M_p}{V} = m_p n_p = \rho_{sp} v_s n_p = \rho_{sp} Z \quad (3.6)$$

όπου Z η ογκομετρική συγκέντρωση των στερεών σωματιδίων στο μίγμα. Η ογκομετρική συγκέντρωση είναι μια από τις σημαντικές μεταβλητές στη διερεύνηση της διφασικής ροής. Είναι ο λόγος του όγκου του υλικού προς το συνολικό όγκο ροής

$$Z = \frac{V_p}{V} \quad (3.7)$$

Η μεταβλητή Z χαρακτηρίζει το είδος της πνευματικής μεταφοράς. Μικρές τιμές του Z αντιστοιχούν σε αραιή πνευματική μεταφορά, μεγάλες σε πυκνή. Η μονοφασική ροή έχει $Z = 0$ για ροή του αέρα και $Z = 1$ για “ροή” του ψευδορευστού. Ανάλογη είναι η σημασία και της μερικής πυκνότητας των στερεών σωματιδίων, $\bar{\rho}_p$, η οποία, όπως φαίνεται από τη σχ. (3.6), είναι ανάλογη του Z ή του n_p .

Κατ’ αντιστοιχία με τα σωματίδια και για τον αέρα έχουμε τη φασική πυκνότητα και τη μερική πυκνότητα του αέρα στο μίγμα. Έτσι η φασική πυκνότητα του αέρα ορίζεται σαν

$$\rho_g = \frac{M_g}{V_g} \quad (3.8)$$

και η μερική πυκνότητα του αέρα ορίζεται σαν

$$\bar{\rho}_g = \frac{M_g}{V} = \frac{M_g}{V_g} \frac{V_g}{V} = (1-Z)\rho_g \quad (3.9)$$

Από τη σχ. (3.9) φαίνεται ότι για απειροστές τιμές του Z η μερική πυκνότητα του αέρα είναι κατά προσέγγιση ίση με τη φασική πυκνότητα, για πεπερασμένες, όμως, τιμές του Z πρέπει οπωσδήποτε να γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο αυτών πυκνοτήτων.

3.3 Καταστατική εξίσωση

Για κάθε φάση στο μίγμα αέρα-ψευδορευστού έχουμε μια καταστατική εξίσωση. Η ολική πίεση του μίγματος είναι το άθροισμα της μερικής πίεσης του αέρα, p_g , και της μερικής πίεσης των σωματιδίων, p_p

$$p = p_g + p_p \quad (3.10)$$

η οποία, σύμφωνα με το νόμο των τελείων αερίων δίνεται από τη σχέση

$$p = \rho_g R T_g \quad (3.11)$$

όπου T_g η μερική θερμοκρασία και R η ειδική σταθερά του αέρα.

Για τον αέρα, σαν τέλειο αέριο, η μερική πίεση p_g είναι

$$p_g = \bar{\rho}_g R T_g = (1-Z)\rho_g R T_g = (1-Z)p \quad (3.12)$$

Με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει ότι η μερική πίεση του ψευδορευστού των σωματιδίων είναι

$$p_g = p\left(1 - \frac{p_g}{p}\right) = Zp \quad (3.13)$$

Για αραιή πνευματική μεταφορά ($Z \ll 1$) η μερική πίεση p_p των σωματιδίων είναι αμελητέα [6,15]. Όμως για συνηθισμένες τιμές του Z πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιείται η σχ.(3.13).

Η πυκνότητα των στερεών σωματιδίων είναι σταθερή, ανεξάρτητη από τις ροϊκές συνθήκες, και η καταστατική εξίσωση για το ψευδορευστό είναι απλά

$$\rho_{sp} = \text{σταθ.} \quad (3.14)$$

3.4 Εξίσωση συνέχειας

Για κάθε φάση στο μίγμα έχουμε μια εξίσωση συνέχειας, η οποία εκφράζει τη διατήρηση της μάζας της φάσης αυτής. Για το ψευδορευστό, και για ροή i -διαστάσεων, είναι

$$\frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}_p u_p^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (3.15)$$

όπου u_p^i είναι η i -συνιστώσα της ταχύτητας \vec{q}_p των στερεών σωματιδίων. Για τρισδιάστατη ροή είναι

$$\vec{q}_p = \vec{i} u_p + \vec{j} v_p + \vec{k} w_p \quad (3.16)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\bar{\rho}_p = Z\rho_{sp}$, από τη σχ.(3.6), η εξίσωση συνέχειας για τα σωματίδια γράφεται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\frac{\partial Z\rho_{sp}}{\partial t} + \frac{\partial (Z\rho_{sp} u_p)}{\partial x} + \frac{\partial (Z\rho_{sp} v_p)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\rho_{sp} w_p)}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

Για τον αέρα η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}_g u_g^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (3.18)$$

όπου u_g^i είναι η i -συνιστώσα της ταχύτητας \vec{q}_g του αέρα. Όμοια για τρισδιάστατη ροή είναι

$$\vec{q}_g = \vec{i} u_g + \vec{j} v_g + \vec{k} w_g \quad (3.19)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\bar{\rho}_g = (1 - Z)\rho_g$, από τη σχ.(3.9), η εξίσωση συνέχειας για τον αέρα γράφεται αναλυτικά

$$\frac{\partial((1 - Z)\rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial((1 - Z)\rho_g u_g)}{\partial x} + \frac{\partial((1 - Z)\rho_g v_g)}{\partial y} + \frac{\partial((1 - Z)\rho_g w_g)}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

3.5 Εξίσωση ορμής

Για κάθε φάση στο μίγμα η εξίσωση διατήρησης της ορμής εκφράζει την εξίσωση κίνησης της φάσης αυτής.

Για το ψευδορευστό των στερεών σωματιδίων η εξίσωση ορμής γράφεται

$$\bar{\rho}_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mathbf{q}_p = \bar{\rho}_p \frac{D_p \mathbf{q}_p}{Dt} = -\nabla p_p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \vec{F}_{bp} + \vec{F}_p \quad (3.21)$$

και για τον αέρα η εξίσωση ορμής είναι

$$\bar{\rho}_g \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mathbf{q}_g = \bar{\rho}_g \frac{D_g \mathbf{q}_g}{Dt} = -\nabla p_g + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_g + \vec{F}_{bg} + \vec{F}_g \quad (3.22)$$

όπου p_p , p_g είναι οι μερικές πιέσεις των σωματιδίων και του αέρα στο μίγμα αντίστοιχα, $\boldsymbol{\tau}_p$, $\boldsymbol{\tau}_g$ οι αντίστοιχοι τανυστές των διατμητικών τάσεων, \vec{F}_{bp} , \vec{F}_{bg} οι πεδιακές δυνάμεις και \vec{F}_p , \vec{F}_g οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των φάσεων. Η ουσιαστική παράγωγος της ταχύτητας D/Dt δίνει την ουσιαστική επιτάχυνση της κάθε φάσης. Οι δείκτες p και g της ουσιαστικής παραγώγου στις αντίστοιχες εξισώσεις, δηλώνουν ότι η ανάπτυξη της

παραγώγου γίνεται ως προς την ταχύτητα της αντίστοιχης φάσης. Επειδή οι ταχύτητες των δυο φάσεων είναι διαφορετικές, προκύπτουν και διαφορετικές ουσιαστικές επιταχύνσεις.

Αν και η μελέτη των διατμητικών τάσεων, που αναπτύσσονται στο ψευδορευστό, δεν έχει ακόμα ολοκληρωθεί, σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να λάβουμε παρόμοιες εκφράσεις με τις σχέσεις Navier-Stokes, για τις διατμητικές τάσεις, που αναπτύσσονται στα σωματίδια, όπως και στον αέρα. Έτσι έχουμε την έκφραση

$$\tau_r^{ij} = \mu_r \left(\frac{\partial u_r^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_r^j}{\partial x^i} \right) + \mu_{r1} \left(\frac{\partial u_r^k}{\partial x^k} \right) \delta^{ij} \quad (3.23)$$

όπου $\delta^{ij} = 1$ αν $i=j$ και $\delta^{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Ο δείκτης r αναφέρεται στις τιμές των μεγεθών της r -φάσης και η ανάπτυξη του ταυυστή θα γίνει μόνο ως προς τους δείκτες i, j και k . Το μ_r είναι ο συντελεστής ιξώδους της r -φάσης, ενώ το μ_{r1} είναι ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους για τον οποίο, σε πρώτη προσέγγιση, από την υπόθεση Stokes είναι

$$\mu_{r1} = -\frac{2}{3}\mu_r \quad (3.24)$$

Έτσι οι σχέσεις για τις διατμητικές τάσεις σύμφωνα με τη σχ.(3.24) θα δίνονται από την έκφραση

$$\tau_r^{ij} = \mu_r \left[\left(\frac{\partial u_r^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_r^j}{\partial x^i} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_r^k}{\partial x^k} \right) \delta^{ij} \right] \quad (3.25)$$

3.6 Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης

Τη μεγαλύτερη δυσκολία στη θεωρητική διερεύνηση παρουσιάζουν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ του αέρα και των στερεών σωματιδίων, οι οποίες στις σχ.(3.21) και (3.22) αναφέρονται γενικά σαν \vec{F}_p και \vec{F}_g . Για τις δυνάμεις αυτές ισχύει πάντα, σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα του Newton,

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_p \quad (3.26)$$

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης συνίστανται από πολλούς όρους, όπως από τις δυνάμεις αντίστασης των σωματιδίων, τη δύναμη στατικής άνωσης των σωματιδίων, τις

δυνάμεις αδράνειας, τις αεροδυναμικές ανώσεις κ.α. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης, που λαμβάνονται υπόψη στην παρούσα ανάλυση, υπολογίζονται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

3.6.1 Αντίσταση σωματιδίων

Στις περισσότερες θεωρητικές αναλύσεις η μόνη δύναμη αλληλεπίδρασης των φάσεων, που λαμβάνεται υπόψη, είναι η δύναμη αντίστασης των στερεών σωματιδίων. Η δύναμη αυτή δίνεται γενικά από τη σχέση

$$\vec{D} = c_D \frac{1}{2} \rho u^2 A = c_D A p_d \quad (3.27)$$

όπου c_D ο συντελεστής αντίστασης, A η μέγιστη επιφάνεια του σωματιδίου, εγκάρσια στη διεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού, και p_d η δυναμική πίεση του ρευστού. Στην περίπτωση όμως της διφασικής ροής αέρα σωματιδίων υπάρχουν n_p σωματίδια ανά μονάδα όγκου του μίγματος, που κινούνται με ταχύτητα \vec{q}_p ενώ ο αέρας κινείται ταυτόχρονα με ταχύτητα \vec{q}_g . Έτσι η δύναμη αντίστασης των σωματιδίων είναι

$$\vec{F}_p = \vec{D} = c_D n_p \frac{1}{2} \rho_g (\vec{q}_g - \vec{q}_p)^2 A_p = c_D n_p p_d A_D \quad (3.28)$$

όπου p_d η δυναμική πίεση, που προκύπτει από τη σχετική ταχύτητα αέρα σωματιδίων

$$p_d = \frac{1}{2} \rho_g \bar{c}^2 = \frac{1}{2} \rho_g (\vec{q}_g - \vec{q}_p)^2 \quad (3.29)$$

και A_p η μέγιστη διατομή του σωματιδίου, η οποία για σωματίδια σφαιρικού σχήματος είναι $A_p = \pi r_p^2$.

Η δυσκολία στον υπολογισμό της αντίστασης των σωματιδίων εντοπίζεται ουσιαστικά στον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης c_D . Πολλοί ερευνητές [6,15,16,17] θεωρούν σφαιρικά σωματίδια και χρησιμοποιούν για τον συντελεστή αντίστασης τη σχέση του Stokes

$$c_D = \frac{24}{Re_p} \quad (3.30)$$

όπου Re_p ο αριθμός Reynolds του σωματιδίου

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_g \bar{c} d_p}{\mu_g} \quad (3.31)$$

Η αντίσταση των σωματιδίων στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F}_p = 6\pi r_p \mu_g n_p (\vec{q}_g - \vec{q}_p) = \frac{1}{2} c_D n_p A_p \rho_g \bar{c}^2 \quad (3.32)$$

Η σχέση του Stokes ισχύει για $\text{Re}_p < 0.2$ ενώ για μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds και μέχρι $\text{Re}_p < 4$ χρησιμοποιείται η προσέγγιση του Ossen, σύμφωνα με την οποία ο συντελεστής αντίστασης είναι

$$c_D = \frac{24}{\text{Re}_p} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right) \quad (3.33)$$

Για πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds η σχέση του Ossen οδηγεί στο νόμο του Stokes.

Και οι δύο παραπάνω σχέσεις έχουν περιορισμένη εφαρμογή διότι αριθμοί Re_p της τάξης αυτής προκύπτουν μόνο όταν τα μεταφερόμενα σωματίδια έχουν διάμετρο της τάξης του 10^{-6} m. Όταν όμως η διάμετρος των σωματιδίων είναι της τάξης του 10^{-3} m, όπως για παράδειγμα στα γεωργικά προϊόντα, τότε ο αριθμός Reynolds λαμβάνει τιμές που κυμαίνονται στην περιοχή $10^2 < \text{Re}_p < 10^4$.

Υπάρχουν πολλές σχέσεις για τον συντελεστή αντίστασης c_D οι οποίες ισχύουν ανάλογα για διάφορες περιοχές του αριθμού Reynolds [2]. Όπως φαίνεται όμως και στον Molerus [57] η σχέση

$$c_D = \frac{24}{\text{Re}_p} + \frac{4}{\sqrt{\text{Re}_p}} + 0.4 \quad (3.34)$$

αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση της πειραματικής καμπύλης του συντελεστή αντίστασης σφαίρας σε όλο το φάσμα του αριθμού Re_p και μέχρι $\text{Re}_p < 10^4$. Η σχ.(3.34) χρησιμοποιείται στην παρούσα ανάλυση για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης σωματιδίων σφαιρικού σχήματος. Η ίδια σχέση, αλλά με διαφορετικούς αριθμητικούς συντελεστές, προτείνεται και από τον Muschelknautz [82], για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης σωματιδίων σφαιρικού, κυλινδρικού, κυβικού και πολυεδρικού σχήματος. Οι σχέσεις αυτές έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες εργασίες [83,84] με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο υπολογιζόμενος, έτσι, συντελεστής αντίστασης είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds, ο οποίος είναι

συνάρτηση της σχετικής ταχύτητας αέρα σωματιδίων. Οι διαφορετικές συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας στις τρεις διευθύνσεις δίνουν διαφορετικούς αριθμούς Re_p και κατ' αντιστοιχία από τη σχ.(3.34) λαμβάνονται διαφορετικοί συντελεστές αντίστασης για κάθε διεύθυνση. Έτσι για τη διεύθυνση x είναι

$$Re_{p_x} = \frac{(u_g - u_p) \rho_g d_p}{\mu_g} \quad (3.35)$$

και η σχ.(3.34) με τη βοήθεια της σχ.(3.35) δίνει το συντελεστή αντίστασης στη x -διεύθυνση, δηλαδή τον c_{D_x} . Ο υπολογισμός της αντίστασης γίνεται από τη σχέση

$$D_x = c_{D_x} n_p \frac{1}{2} \rho_g (u_g - u_p)^2 A_p = c_{D_x} n_p p_{d_x} A_p \quad (3.36)$$

η οποία, λαμβάνοντας υπόψη, ότι η επιφάνεια του σφαιρικού σωματιδίου είναι $A_p = \pi r_p^2$, η δυναμική πίεση είναι $p_{d_x} = \rho(u_g - u_p)^2/2$ και ο αριθμός των σωματιδίων στο στοιχειώδη όγκο είναι, εξ' ορισμού από τη σχ.(3.6), $n_p = Z/v_s$, μπορεί να γραφεί αναλυτικά

$$D_x = \frac{3}{8} c_{D_x} \frac{Z}{r_p} \rho_g (u_g - u_p)^2 \quad (3.36a)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις διευθύνσεις y και z . Το άθροισμα των τριών συνιστωσών D_x , D_y , D_z δίνει τη δύναμη αντίστασης των στερεών σωματιδίων.

Στην περίπτωση της μεταφοράς στερεών σωματιδίων μη σφαιρικού σχήματος ο συντελεστής αντίστασης δεν είναι μόνο συνάρτηση του αριθμού Reynolds αλλά και της σφαιρικότητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1. Η σφαιρικότητα ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi = \frac{\pi \left(\frac{6v_s^{2/3}}{\pi} \right)}{S_p} = (6\sqrt{\pi})^{2/3} \frac{v_s^{2/3}}{S_p} = \frac{\pi D_{i\sigma}^2}{S_p} \quad (3.37)$$

όπου v_s ο όγκος, S_p η εξωτερική επιφάνεια του σωματιδίου και $D_{i\sigma}$ η διάμετρος της ισοδύναμης σφαίρας, δηλ. της σφαίρας ίσου όγκου με το σωματίδιο. Έτσι από το Σχήμα 2.1 φαίνεται ότι είναι δυνατός ο υπολογισμός του συντελεστή αντίστασης c_D , και κατ' επέκταση της αντίστασης D , σωματιδίων οποιουδήποτε σχήματος και για αριθμούς Reynolds μέχρι $Re_p < 10^4$.

3.6.2 Αεροδυναμική άνωση σωματιδίων

Η δεύτερη σημαντική δύναμη αλληλεπίδρασης είναι η αεροδυναμική άνωση των σωματιδίων. Η δύναμη αυτή εμφανίζεται λόγω της περιστροφικής κίνησης των σωματιδίων. Ο ακριβής θεωρητικός υπολογισμός της αεροδυναμικής άνωσης απαιτεί την γνώση του τοπικού ροϊκού πεδίου γύρω από το σωματίδιο. Σε πρώτη προσέγγιση θεωρείται το σωματίδιο σαν μια σφαίρα ισοδύναμου όγκου, το ροϊκό πεδίο της οποίας δεν επηρεάζεται από το ροϊκό πεδίο των άλλων σφαιρών. Την περιστροφή του σωματιδίου κατά την κίνηση του μακριά από τοιχώματα, προκαλεί η κλίση της ταχύτητας του ρευστού μέσου. Αν αντί του σωματιδίου θεωρηθεί στην ίδια θέση ο αντίστοιχος όγκος ρευστού, τότε ο όγκος αυτός θα περιστρέφεται με την περιστροφή της ροής, δηλαδή τη γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (3.38)$$

όπου οι τρεις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_g}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \quad (3.39\alpha)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \quad (3.39\beta)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \quad (3.39\gamma)$$

Στην περίπτωση του σωματιδίου η περιστροφή του κατά τη διεύθυνση x, για παράδειγμα, είναι μειωμένη σε σύγκριση με την ω_x λόγω της αδράνειας του, που αντιστέκεται στις δυνάμεις συνάφειας. Έτσι για την γενική περίπτωση περιστροφής του σωματιδίου είναι

$$\vec{\omega}' = \omega'_x \vec{i} + \omega'_y \vec{j} + \omega'_z \vec{k} \quad (3.40)$$

και οι τρεις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας των σωματιδίων δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega'_x = J_x \omega_x \quad (3.41\alpha)$$

$$\omega'_y = J_y \omega_y \quad (3.41\beta)$$

$$\omega'_z = J_z \omega_z \quad (3.41\gamma)$$

όπου J_x, J_y, J_z συντελεστές αδράνειας των σωματιδίων. Οι συντελεστές $J_{x, y, z}$ λαμβάνουν τιμές στην περιοχή $0 \leq J_{x, y, z} \leq 1$. Για $J_{x, y, z} = 0$ έχουμε καθαρά μεταφορική κίνηση του σωματιδίου ενώ για $J_{x, y, z} = 1$ έχουμε περιστροφή του σωματιδίου ίση με την περιστροφή του ρευστού. Η περίπτωση αυτή συναντάται σε προβλήματα διφασικής ροής δύο αερίων, όπου τον ρόλο των σωματιδίων παίζει το δεύτερο αέριο, η πυκνότητα του οποίου είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με του αέρα. Όπως φαίνεται στον [85] ο συντελεστής J είναι ίσος με τον λόγο των πυκνοτήτων αέρα σωματιδίων. Έτσι όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των σωματιδίων τόσο μικρότερη θα είναι η περιστροφή τους, που οφείλεται στη βαθμίδα της ταχύτητας του ρευστού, και κατ' αναλογία τόσο μικρότερη θα είναι και η δύναμη της αεροδυναμικής άνωσης.

Για τον υπολογισμό της αεροδυναμικής άνωσης θεωρούμε ότι το σωματίδιο είναι σφαίρα, Σχήμα 3.2, που αποτελείται από στοιχειώδεις κυλίνδρους εκπετάσματος $d\delta = r_p \eta \mu \phi \, d\phi$ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Η άνωση, σύμφωνα με τη σχέση των Kutta-Joukowski, είναι

$$dL = \rho_g u_\infty \Gamma r_p \eta \mu \phi \, d\phi \quad (3.42)$$

όπου Γ η κυκλοφορία, η οποία σύμφωνα με τον ορισμό της είναι

$$\Gamma = 2 \pi \omega r_p^2 \eta \mu^2 \phi \quad (3.43)$$

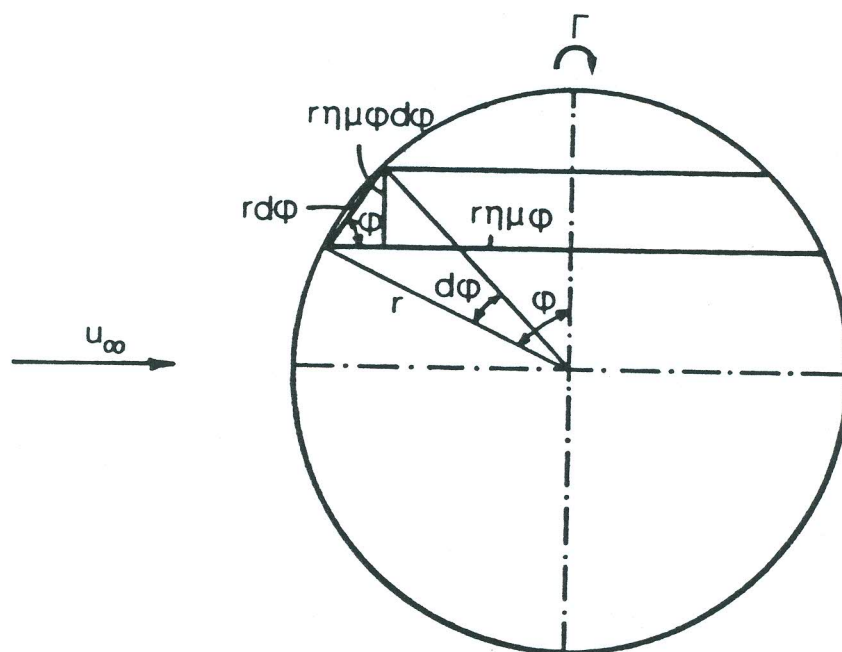
Η άνωση ενός σφαιρικού σωματιδίου θα δίνεται επομένως από την σχέση

$$L = \int_0^\pi 2\pi \omega r_g u_\infty r_p^3 \eta \mu^3 \phi \, d\phi \quad (3.44)$$

Με ολοκλήρωση της σχ.(3.44) προκύπτει η άνωση του σφαιρικού σωματιδίου ίση με

$$L = c_{Lid} \frac{1}{2} \rho_g u^2 A_p \quad (3.45)$$

όπου $A_p = \pi r_p^2$ η μέγιστη διατομή του σωματιδίου και c_{Lid} ο συντελεστής άνωσης ιδεώδους ροής



Σχήμα 3.2: Γεωμετρικό πρότυπο για τον υπολογισμό της αεροδυναμικής άνωσης σφαιρικών σωματιδίων.

$$c_{Lid} = \frac{16}{3} \frac{\omega r_p}{u_\infty} = \frac{16}{3} M_{Re} \quad (3.46)$$

Ο αριθμός M_{Re} είναι ο λόγος του αριθμού Reynolds περιστροφικής προς τον αριθμό Reynolds μεταφορικής κίνησης

$$M_{Re} = \frac{Re_{Rot}}{Re_{Tran}} = \frac{\frac{\rho_g d_p \omega r_p}{\mu_g}}{\frac{\rho_g d_p u_\infty}{\mu_g}} = \frac{\omega r_p}{u_\infty} \quad (3.47)$$

Για μικρές τιμές του αριθμού M_{Re} η κίνηση του σωματιδίου μπορεί να θεωρηθεί σαν καθαρά μεταφορική, ενώ για μεγάλες τιμές πρέπει να λαμβάνεται οπωσδήποτε υπόψη και η περιστροφική του κίνηση, σαν αποτέλεσμα της οποίας θα εμφανίζεται η δύναμη άνωσης L , σχ.(3.45).

Ο παραπάνω υπολογισμός της άνωσης, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2, έγινε για κυλίνδρους με άξονα παράλληλο στη z-διεύθυνση περιστρεφόμενους με γωνιακή

ταχύτητα ω_z σε ρευστό με ταχύτητα u_∞ παράλληλη στη x-διεύθυνση. Η δύναμη που προκύπτει είναι παράλληλη στην y-διεύθυνση. Με παρόμοιο υπολογισμό για κυλίνδρους με άξονα παράλληλο στη x-διεύθυνση, περιστρεφόμενους με γωνιακή ταχύτητα ω_x , σε ρευστό με ταχύτητα w_∞ παράλληλη στη z-διεύθυνση προκύπτει πάλι άνωση παράλληλη στην y-διεύθυνση. Έτσι συμπεραίνεται τελικά ότι η συνιστώσα της αεροδυναμικής άνωσης σε κάθε διεύθυνση αποτελείται από δύο επί μέρους συνιστώσες, που προκύπτουν από το συνδυασμό των συνιστωσών στις δύο άλλες διευθύνσεις της μεταφορικής ταχύτητας του ρευστού και της γωνιακής ταχύτητας του σωματιδίου.

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι η ταχύτητα της απέραντης ροής είναι πάντα η σχετική ταχύτητα του αέρα σωματιδίων, $c = q_g - q_p$, ο αριθμός των σωματιδίων στο στοιχειώδη όγκο του μίγματος είναι n_p , και τις σχ.(3.39) και (3.40) για τις γωνιακές ταχύτητες των σωματιδίων, εκφράζουμε την αεροδυναμική άνωση των σωματιδίων στη διεύθυνση x (και αντίστοιχα στις άλλες διευθύνσεις) με τη σχέση

$$L_x = \frac{16}{3} n_p A_p \left[\frac{J_z \omega_z r_p}{v_g - v_p} \frac{1}{2} \rho_g (v_g - v_p)^2 + \frac{J_y \omega_y r_p}{w_g - w_p} \frac{1}{2} \rho_g (w_g - w_p)^2 \right] \quad (3.48)$$

ή γράφοντας αναλυτικά τις εκφράσεις των γωνιακών ταχυτήτων έχουμε την σχέση

$$L_x = \frac{16}{3} n_p A_p \left[\frac{J_z r_p p_{dy}}{v_g - v_p} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \frac{J_y r_p p_{dz}}{w_g - w_p} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \right] \quad (3.49)$$

όπου $p_{dy} = 1/2 \rho_g (u_g - u_p)^2$ η δυναμική πίεση κατά την y-διεύθυνση και αντίστοιχα η p_{dz} .

Αναλυτικός υπολογισμός και πλήρεις σχέσεις για την αεροδυναμική άνωση δίνονται στον [85].

3.6.3 Στατική άνωση σωματιδίων

Η τρίτη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο φάσεων είναι η στατική άνωση. Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη κάθε σώμα βυθισμένο σε ρευστό δέχεται δύναμη ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού. Τα σωματίδια που βρίσκονται στο στοιχειώδη όγκο V του μίγματος καταλαμβάνουν όγκο V_p εκτοπίζοντας ταυτόχρονα V_p όγκο ρευστού. Ο όγκος αυτός σύμφωνα με τη σχ.(3.7) είναι ίσος με ZV . Έτσι λοιπόν η δύναμη στατικής άνωσης, που όπως όλες οι δυνάμεις στην εξίσωση ορμής δίνονται ανά μονάδα όγκου, εκφράζεται απλά με τη σχέση

$$\vec{F}_{p(b)} = -Z\rho_g \vec{g} \quad (3.50)$$

3.7 Πεδιακές δυνάμεις

Οι πεδιακές δυνάμεις \vec{F}_{bp} και \vec{F}_{bg} , που αναφέρονται στις σχ.(3.20) και (3.21), είναι εδώ μόνο οι δυνάμεις βαρύτητας. Έτσι η πεδιακή δύναμη που δέχεται το ψευδορευστό των σωματιδίων είναι

$$\vec{F}_{bp(\text{grav})} = \bar{\rho}_p \vec{g} = Z\rho_{sp} \vec{g} \quad (3.51)$$

και η πεδιακή δύναμη που δέχεται ο αέρας είναι

$$\vec{F}_{bg(\text{grav})} = \bar{\rho}_g \vec{g} = (1-Z)\rho_{sp} \vec{g} \quad (3.52)$$

όπου \vec{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας. Για την περίπτωση της οριζόντιας μεταφοράς στερεών σωματιδίων, που μελετάται εδώ, οι δυνάμεις αυτές ενεργούν μόνο κατά την z-διεύθυνση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συνδυασμός της στατικής άνωσης, σχ.(3.50), με τις αντίστοιχες πεδιακές δυνάμεις. Για το ψευδορευστό ο συνδυασμός αυτός δίνει

$$\vec{F}_{bp(\text{grav})} + \vec{F}_{p(b)} = Z\rho_{sp} \vec{g} - Z\rho_g \vec{g} = Z(\rho_{sp} - \rho_g) \vec{g} \quad (3.53)$$

και για το αέρα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η στατική άνωση εφαρμόζεται με αντίθετη διεύθυνση, είναι

$$\vec{F}_{bg(\text{grav})} + \vec{F}_{g(b)} = (1-Z)\rho_g \vec{g} + Z\rho_g \vec{g} = \rho_g \vec{g} \quad (3.54)$$

Οι σχέσεις αυτές αναφέρονται στον [8] χωρίς να δίνεται αναλυτικά ο τρόπος της προέλευσής τους.

Μετά από συνδυασμό των προηγούμενων σχέσεων, για τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, και ανάπτυξη της σχ.(3.25), για τις διατμητικές τάσεις, η γενική εξίσωση της ορμής για το ψευδορευστό, σχ.(3.21), γράφεται αναλυτικά για τη x-διεύθυνση

$$\begin{aligned}
Z\rho_{sp}\left(\frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} + w_p \frac{\partial u_p}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p_p}{\partial x} + \\
+ \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_p \frac{\partial u_p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_p \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} + \frac{\partial w_p}{\partial z} \right) \right] &+ \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_p \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_p \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} + \frac{\partial u_p}{\partial z} \right) \right] &+ c_{Dx} n_p A_p p_{dx} + \\
+ \left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \frac{J_z p_{dx}}{v_g - v_p} + \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \frac{J_y p_{dz}}{w_g - w_p} \right] &\frac{8}{3} n_p r_p A_p
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Όμοια, η γενική εξίσωση ορμής για τον αέρα, σχ.(3.22) γράφεται αναλυτικά για τη x-διεύθυνση

$$\begin{aligned}
(1-Z)\rho_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} + w_g \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_g}{\partial x} + \\
+ \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_g \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial w_g}{\partial z} \right) \right] &+ \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_g \left(\frac{\partial w_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) \right] &- c_{Dx} n_p A_p p_{dx} - \\
- \left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \frac{J_z p_{dy}}{v_g - v_p} + \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \frac{J_y p_{dz}}{w_g - w_p} \right] &\frac{8}{3} n_p r_p A_p
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Αντίστοιχα προκύπτουν οι εξισώσεις ορμής και των δυο φάσεων για τις διευθύνσεις y και z.

3.8 Εξίσωση ενέργειας

Για κάθε φάση στο μίγμα, η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει την αντίστοιχη εξίσωση ενέργειας.

Για το ψευδορευστό των στερεών σωματιδίων η εξίσωση ενέργειας έχει τη μορφή

$$\frac{D}{Dt} \left[Z\rho_{sp} \left(U_{mp} + \frac{1}{2} q_p^2 + \Phi_p \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\delta^{ij} u_p^i p_p - u_p^i \tau_p^{ij} - Q_{cp}^j \right] = k_T (T_g - T_p) \tag{3.57}$$

και για τον αέρα η εξίσωση ενέργειας έχει τη μορφή

$$\frac{D}{Dt} \left[(1-Z)\rho_g \left(U_{mg} + \frac{1}{2} q_g^2 + \Phi_g \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\delta^{ij} u_g^i p_g - u_g^i \tau_g^{ij} - Q_{cg}^j \right] = k_T (T_p - T_g) \quad (3.58)$$

όπου U_{mg} είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας της r -φάσης, τ^{ij} είναι η ij -συνιστώσα του τανυστή των διατμητικών τάσεων, Q_{cg}^j είναι η j -συνιστώσα της μεταφοράς θερμότητας αγωγής, Φ η δυναμική ενέργεια και q_r είναι το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Ο συντελεστής k_T καλείται θερμικός συντελεστής τριβής μεταξύ των σωματιδίων και του αέρα. Οι γνώσεις μας, για την έκφραση του k_T συναρτήσει των φυσικών ιδιοτήτων των σωματιδίων και διαφόρων άλλων παραμέτρων, είναι ελάχιστες. Είναι περισσότερο πολύπλοκη από την έκφραση των δυνάμεων αλληλεπίδρασης. Σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να εκφραστεί με τη δύναμη αντίστασης των σωματιδίων. Η έκφραση αυτή πετυχαίνεται με τη χρήση μιας αναλογίας, μεταξύ μεταφοράς θερμότητας και δύναμης αντίστασης, παρόμοιας με την αναλογία Reynolds της κλασικής ρευστομηχανικής.

Χρησιμοποιώντας το νόμο αγωγής του Fourier

$$Q = -k \text{grad}T = k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.59)$$

και με τη βοήθεια των εξισώσεων ορμής, μπορούμε να αναλύσουμε τις εξισώσεις ενέργειας. Έτσι για το ψευδορευστό η εξίσωση ενέργειας γράφεται αναλυτικά

$$\begin{aligned} & Z\rho_{sp}c_{pp} \left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial T_p}{\partial y} + w_p \frac{\partial T_p}{\partial z} \right) - \frac{\partial p_p}{\partial t} - u_p \frac{\partial p_p}{\partial x} - \\ & - v_p \frac{\partial p_p}{\partial y} - w_p \frac{\partial p_p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_p \frac{\partial T_p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_p \frac{\partial T_p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_p \frac{\partial T_p}{\partial z} \right) - \\ & - \mu \Phi_p + c_{Dx} u_p n_p A_p p_{dx} + c_{Dy} v_p n_p A_p p_{dy} + c_{Dz} w_p n_p A_p p_{dz} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \frac{J_z p_{dy}}{v_g - v_p} + \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \frac{J_y p_{dz}}{w_g - w_p} \right] \frac{8}{3} n_p r_p A_p u_p + \\ & + \left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \frac{J_z p_{dx}}{u_g - u_p} + \left(\frac{\partial w_g}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \frac{J_x p_{dz}}{w_g - w_p} \right] \frac{8}{3} n_p r_p A_p v_p + \\ & + \left[\left(\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} \right) \frac{J_y p_{dx}}{u_g - u_p} + \left(\frac{\partial w_g}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \frac{J_x p_{dy}}{v_g - v_p} \right] \frac{8}{3} n_p r_p A_p w_p + \\ & Z\rho_g g w_p + Z\rho_{sp} g w_p = k_T (T_g - T_p) \end{aligned} \quad (3.60)$$

όπου Φ_p η συνάρτηση των αναντίστρεπτων απωλειών λόγω τριβής του ψευδορευστού

$$\begin{aligned}
\Phi_p = & 2 \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_p}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial v_p}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} \right) \right]^2 + \\
& + \left[\left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_p}{\partial z} \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right) \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} + \frac{\partial w_p}{\partial z} \right]^2
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Αντίστοιχα προκύπτει η εξίσωση ενέργειας και η συνάρτηση Φ_g των αναντίστρεπτων απωλειών λόγω τριβής του αέρα.

Από την ανάλυση του φαινομένου της διφασικής ροής αέρα στερεών σωματιδίων, που αναπτύχθηκε, φαίνεται ότι οι άγνωστες μεταβλητές είναι έντεκα: \bar{q}_g , \bar{q}_p , p , Z , ρ_g , T_p , T_g , δεδομένου ότι η πυκνότητα των σωματιδίων ρ_{sp} είναι σταθερή, και καθορίζονται από τις έντεκα εξισώσεις σχ. (3.11), (3.17), (3.20), (3.21), (3.22), (3.57) και (3.58).