

## **Η ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ**

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>4</b>	<b>Η ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ</b>	<b>4.2</b>
4.1	Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΙΣΕΝΤΡΟΠΙΚΗ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ	4.2
4.2	ΚΑΘΕΤΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ	4.4
4.3	ΤΑ ΠΛΑΓΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ	4.6
4.4	ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΥΓΚΛΙΝΟΝ ΑΚΡΟΦΥΣΙΟ	4.7

## Η ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Πολλές φορές, η μεταβολή στην πυκνότητα του ρευστού στη ροή μέσα σε μια στροβιλομηχανή είναι σημαντική. Αν αυτή η μεταβολή συνοδεύεται και από αντίστοιχη μεγάλη τιμή του τοπικού αριθμού Mach, επιβάλλεται η χρήση των εξισώσεων της συμπιεστής ροής. Παρακάτω θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των πιο σημαντικών στοιχείων της συμπιεστής ροής (compressible flow). Εν γένει όταν  $M > 0.3$  η ροή πρέπει να θεωρηθεί συμπιεστή (Horlock (1973), Dixon (1973)).

### 4.1 Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΙΣΕΝΤΡΟΠΙΚΗ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Όταν η ροή είναι ισηντροπική, εν γένει, ισχύει η σχέση:

$$p = C \cdot \rho^\gamma \quad [4.1]$$

όπου:  $C = \text{σταθερά}$

Πάνω, λοιπόν, σε μια ροϊκή γραμμή η εξίσωση ορμής της μη συνεκτικής ροής είναι :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + u_s \frac{du_s}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{d(u_s^2)}{ds} = 0 \quad [4.2]$$

Άρα, με βάση την παραπάνω σχέση, έχουμε :

$$\frac{1}{(C \cdot p)^{1/\gamma}} \frac{dp}{ds} + \frac{d\left(\frac{u_s^2}{2}\right)}{ds} = 0 \quad [4.3]$$

ή, ολοκληρώνοντας κατά το μήκος  $s$  :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{σταθ.} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \quad [4.4]$$

Η εξίσωση συνέχειας για μονοδιάστατη ροή μας δίνει :

$$\rho \cdot A \cdot u = \dot{m} = \text{σταθ.} \quad [4.5]$$

ή, σε διαφορική μορφή,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0 \quad [4.6]$$

ή συναρτήσει του Mach :

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad [4.7]$$

και από την καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων έχουμε :

$$p = \rho RT \quad [4.8]$$

ή σε διαφορική μορφή :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad [4.9]$$

Ο αριθμός Mach της ροής (M) ορίζεται ως :

$$M = \frac{u}{a} \quad [4.10]$$

$$\text{όπου : } a = \text{ταχύτητα του ήχου} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{ισεντ.}}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad [4.11]$$

Με βάση αυτό τον ορισμό, έχουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad [4.12]$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad [4.13]$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{A \cdot P_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \cdot \frac{M}{\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad [4.14]$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{A \cdot P} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \cdot M \cdot \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.15]$$

$$\frac{V}{\sqrt{T_0}} = \sqrt{\gamma R} \cdot M \cdot \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.16]$$

Οι σχέσεις αυτές, σαν συνάρτηση του λόγου  $P_0/P$ , φαίνονται στο σχήμα 4.1. Εδώ, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα :

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{A \cdot P_0} \quad [4.17]$$

λαμβάνει τη μέγιστη τιμή όταν ο αριθμός  $M = 1$ .

Όταν, λοιπόν, έχουν ορισθεί οι  $T_0$ ,  $P_0$ , τότε η μαζική παροχή  $\dot{m}$ , για μια ορισμένη διατομή  $A$  γίνεται μέγιστη όταν  $M = 1$  στη διατομή αυτή.

Μια άλλη προσέγγιση, στην έκφραση των παραπάνω λόγων, είναι να θεωρήσουμε τις αντίστοιχες συνθήκες, όπου ο αριθμός  $M$  θα ήταν ίσος με τη μονάδα (κρατώντας όλες τις παραμέτρους σταθερές, εκτός από αυτήν που εξετάζουμε). Αν λοιπόν, οι αντίστοιχες συνθήκες για  $M=1$  χαρακτηρίζονται με αστερίσκο, έχουμε :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad [4.18]$$

$$M^* = \frac{u}{u^*} = M \left[ \frac{\gamma+1}{2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [4.19]$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad [4.20]$$

$$\frac{F}{F^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M \left[ 2(\gamma+1) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad [4.21]$$

Η παράμετρος  $F$  αποκαλείται "συνάρτηση ώσης" (impulse function), είναι δε:

$$F = pA + \rho Au^2 \quad [4.22]$$

## **4.2 ΚΑΘΕΤΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ**

Τα κάθετα κρουστικά κύματα (Normal Shock Waves) εμφανίζονται στη μονοδιάστατη ροή, όταν η ροή δεν προλαβαίνει να ειδοποιηθεί από τα πιεστικά κύματα, οτι έχει δημιουργηθεί κάποια μεταβολή στις συνθήκες (π.χ. αλλαγή στη στατική πίεση κλπ.). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα πιεστικά κύματα μεταδίδονται με την ταχύτητα του ήχου. Όταν, λοιπόν, η ροή είναι υπερηχητική ( $M_1 > 1$ ), οι μεταβολές στις συνθήκες ροής δε μεταφέρονται άμεσα, με αποτέλεσμα στη μονοδιάστατη ροή, να έχουμε ασυνέχειες, δηλαδή τα κάθετα κρουστικά κύματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Το κάθετο κρουστικό κύμα είναι πάρα πολύ λεπτό ( $\approx 10^{-5}$  cm), και κύριο χαρακτηριστικό του είναι η μετατροπή της ροής από υπερηχητική (πριν το κύμα) σε υποηχητική (μετά το κύμα).

Με βάση, λοιπόν, το σχήμα 4.2, οι εξισώσεις ροής μας δίνουν τις σχέσεις :

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2 \quad [4.23]$$

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2 \quad [4.24]$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad [4.25]$$

και φυσικά (υποθέτοντας ότι έχουμε ένα τέλειο, ιδανικό αέριο) :

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = R \quad [4.26]$$

$$c_{p1} = c_{p2} = c_p \quad [4.27]$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων όταν επιλυθεί μας δίνει τις παρακάτω σχέσεις :

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad [4.28]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right] \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right]}{\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)} M_1^2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{T_1}{T_2}\right) \quad [4.29]$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\left[\frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad [4.30]$$

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left\{ \frac{2}{(\gamma+1) M_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \left\{ \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\} \quad [4.31]$$

Από το σχήμα 4.1 οι παραπάνω λόγοι μπορούν να ευρεθούν από τα γινόμενα, όπως :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{A \cdot P} \right)_1 \cdot \left( \frac{A \cdot P}{\dot{m}\sqrt{T_0}} \right)_2 \quad [4.32]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{T_2}{T_0} \right) \left( \frac{T_0}{T_1} \right) \quad [4.33]$$

κλπ.

### 4.3 ΤΑ ΠΛΑΓΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Τα πλάγια κρουστικά κύματα (oblique shock waves) είναι φαινόμενα δισδιάστατης ροής. Εμφανίζονται όταν η (υπερηχητική) ροή αναγκάζεται κάπου να αλλάξει κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.

Εδώ, το τοίχωμα αλλάζει ξαφνικά κατεύθυνση κατά μια γωνία  $\varepsilon$ . Το ρεύμα αναγκάζεται να έχει ταχύτητα παράλληλη προς το τοίχωμα και σε υπερηχητικές ταχύτητες αυτό επιτυγχάνεται μέσω του κρουστικού κύματος, το οποίο σχηματίζει μια γωνία  $\sigma_1$  ως προς την αρχική κατεύθυνση και  $\sigma_2$  ως προς τη νέα. Φυσικά  $\sigma_1 - \sigma_2 = \varepsilon$ .

Οι εξισώσεις ροής γράφονται:

1. για την ροή κάθετα στο κρουστικό κύμα όπου ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις (συμβολισμοί ανάλογοι με το σχήμα 4.

$$\rho_1 \cdot C_{x1} = \rho_2 \cdot C_{x2}$$

$$[4.34] p_1 + \rho_1 \cdot C_{x1}^2 = p_2 + \rho_2 \cdot C_{x2}^2$$

$$[4.35]$$

$$h_1 + \frac{C_{x1}^2}{2} = h_2 + \frac{C_{x2}^2}{2} \quad [4.36]$$

και

2. για την ροή παράλληλα στο κρουστικό κύμα όπου η ορμή διατηρείται :

$$\rho_1 \cdot C_{x1} \cdot C_{y1} = \rho_2 \cdot C_{x2} \cdot C_{y2} \approx C_{y1} \approx C_{y2} \quad [4.37]$$

Οι συσχετίσεις  $\sigma_1 = f(M_1, \varepsilon)$  φαίνονται στο σχήμα 4.4.

Επίσης έχουμε (εξίσωση Rankine-Hugoniot) :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 1 \right]}{\left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]} \quad [4.38]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \sigma_1}{\tan \sigma_2} = \frac{\tan \sigma_1}{\tan(\sigma_1 - \varepsilon)} \quad [4.39]$$

και

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_1^2 \cdot \sin^2 \sigma_1 \cdot \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad [4.40]$$

Ο υπολογισμός, λοιπόν, της  $\sigma_1$  και των λόγων  $(\rho_2/\rho_1)$ ,  $(p_2/p_1)$  μπορεί να γίνει με την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων αυτών.

#### **4.4 ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΥΓΚΛΙΝΟΝ ΑΚΡΟΦΥΣΙΟ**

Θεωρούμε τη ροή σε ακροφύσιο του οποίου η διατομή  $A$  μειώνεται συνεχώς από την είσοδο έως και την έξοδο (Cohen et al (1972), Horlock (1973), Παπανίκας (1990)). Η ροή ξεκινά από λιμνάζουσα κατάσταση (ολική και στατική πίεση ίσες) και εκβάλλει σε κάποια δεξαμενή της οποίας η στατική πίεση παραμένει σταθερή (μέσω κάποιας βαλβίδας) όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5.

Η μεταβολή του λόγου  $(p/p_{01})$  μέσα στο ακροφύσιο εξαρτάται από την πίεση στη δεξαμενή ( $p_b$ ).

Σε κάθε σημείο του ακροφυσίου ισχύει η σχέση :

$$\frac{p_{01}}{p} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad [4.41]$$

(όταν δεν έχουμε απώλειες σε ολική πίεση, δηλ. σε ισηντροπική εκτόνωση). Όταν ο τοπικός

αριθμός Mach  $M$  γίνει ίσος με τη μονάδα ( $M=1$ ), έχουμε  $\frac{p_{01}}{p_c} = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.893$  για  $\gamma=1.4$

(δηλαδή για αέρα σε ατμοσφαιρική πίεση).

Η παροχή μάζας τότε δίνεται από τη σχέση:



$$m = 0.397 \cdot P_{01} \frac{A^*}{\sqrt{T_{01}}} \quad (\gamma=1.4) \quad [4.42]$$

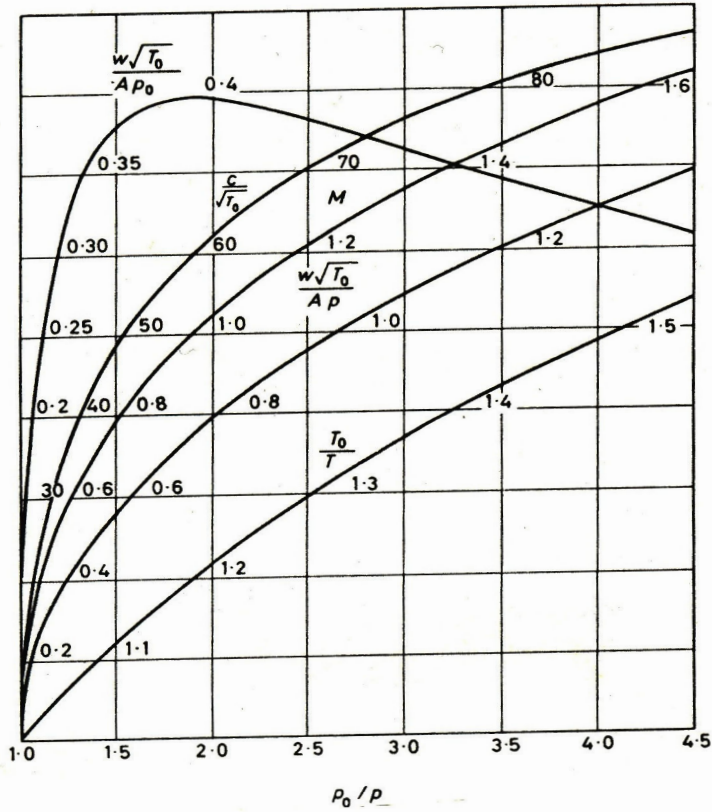
όπου:  $A^*$ , η διατομή στην οποία  $M = 1$ .

Επειδή η ελάχιστη διατομή εμφανίζεται στην έξοδο όταν μειώνεται η  $P_b$ , ο αριθμός  $M$  θα γίνει ίσος με τη μονάδα εκεί.

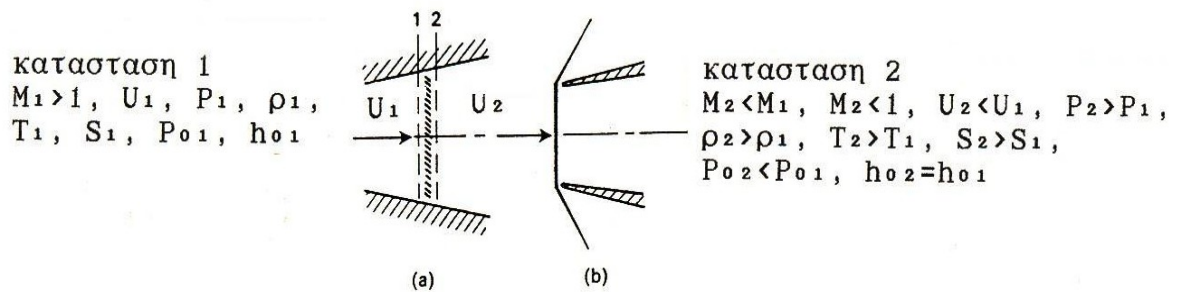
$$\text{Όταν λοιπόν έχουμε} \quad \frac{P_b}{P_{01}} = \frac{P_b^*}{P_{01}} = \frac{1}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad \left(= \frac{1}{1.893} \text{ για } \gamma=1.4\right), \text{ προκαλείται}$$

στραγγαλισμός της ροής στο ακροφύσιο (δηλ. για ορισμένη τιμή των  $P_{01}$  και του  $T_{01}$  έχουμε μέγιστη μαζική παροχή).

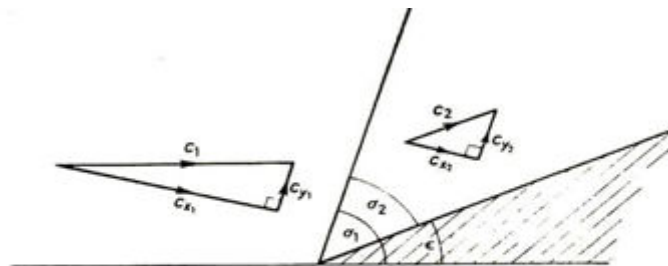
Όταν  $\frac{P_b}{P_{01}} < \frac{P_b^*}{P_{01}} = \frac{1}{P^*}$ , ( $P^*$  = κρίσιμος λόγος πιέσεων), οι συνθήκες ροής μέσα στο ακροφύσιο δε μεταβάλλονται αλλά εμφανίζεται εκτόνωση τύπου Prandtl-Meyer στην έξοδο του ακροφυσίου (δηλαδή μια απότομη μείωση στη στατική πίεση).



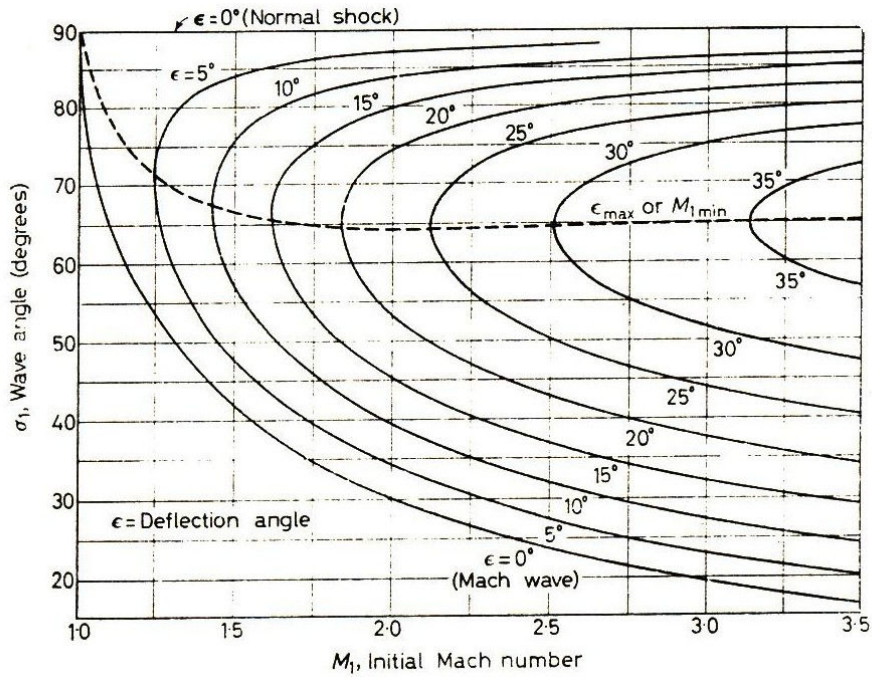
Σχήμα 4.1 Οι σχέσεις της μονοδιάστατης ισοτροπικής συμπίεστης ροής



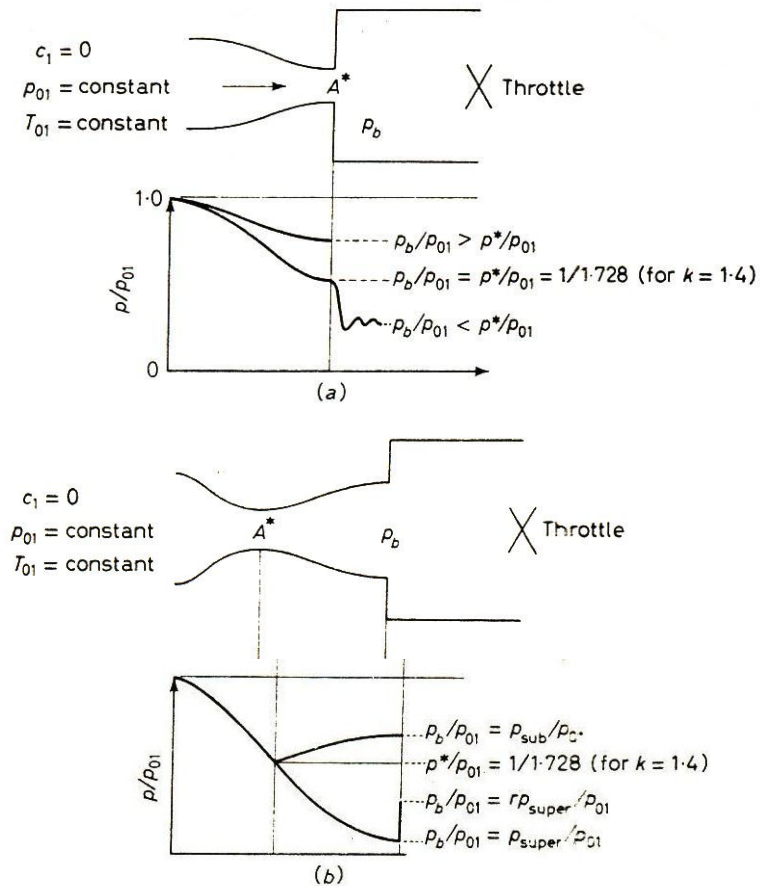
Σχήμα 4.2 Το κάθετο κρουστικό κύμα



Σχήμα 4.3 Το πλάγιο κρουστικό κύμα



Σχήμα 4.4 Ο συσχετισμός  $\sigma_1=f(M_1, \epsilon)$



Σχήμα 4.5 Ροή σε συγκλινόν και συγκλινόν - αποκλινόν ακροφύσιο