

2.1 Αριθμητική επίλυση εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό διαπραγματεύεται μεθόδους εύρεσης των ριζών εξισώσεων γραμμικών ή μη-γραμμικών για τις οποίες δεν υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις. Παραδείγματα εξισώσεων αυτών είναι $x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ και $x^2 + 5x \cos x = 0$. Αρκετές από τις τεχνικές που θα παρουσιαστούν είναι πλέον κατάλληλες για την εύρεση ριζών πολυωνύμων αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθούν και για την εύρεση ριζών μη-γραμμικών εξισώσεων (transcendental equations) όπως $x^2 + e^{-x} \cos x = 2$. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές απαιτείται μόνο η εύρεση των πραγματικών ριζών ενώ συχνά και η εύρεση των μιγαδικών ριζών είναι αναγκαία. Το γενικό πρόβλημα της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων διαπραγματεύεται την εύρεση όλων των ριζών μίας εξίσωσης οποιαδήποτε μορφής χωρίς να υπάρχει πληροφορία σχετικά με την θέση τους ή την μορφή τους (πραγματικές ή μιγαδικές). Το πρόβλημα της αριθμητικής εύρεσης των ριζών μίας εξίσωσης είναι πιο απλό όταν αναζητούμε μία ρίζα για την οποία γνωρίζουμε εκ των πρότερων ότι βρίσκεται σε κάποιο προκαθορισμένο διάστημα.

Έστω ότι η εξίσωση της οποίας επιθυμούμε να βρούμε την λύση αριθμητικά (να υπολογίσουμε τις ρίζες με αριθμητικές μεθόδους) είναι

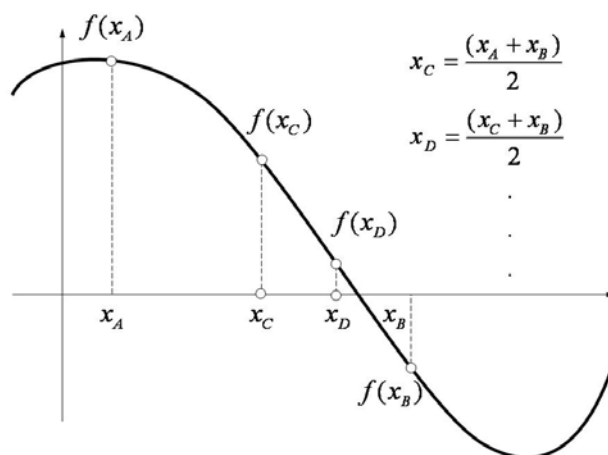
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1)$$

Στην γενική περίπτωση $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ είναι διανύσματα της ίδιας διάστασης k και οι συναρτήσεις f_k μπορεί να είναι πολυώνυμα ή μη γραμμικές συναρτήσεις (δηλαδή σύστημα γραμμικών ή μη εξισώσεων βαθμού δεύτερου ή μεγαλύτερου). Όταν $k = n$ έχουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους π.χ. για $n=2$ έχουμε το σύστημα $xy + 2x - y = 2$, $x^2y + 2x^2 - y = 2$. Όταν $k=1$ έχουμε μόνο μία εξίσωση π.χ. $e^{-x} \sin x = 1$ της οποίας οι ρίζες μπορεί να βρεθούν με την μέθοδο της διχοτόμησης που είναι απλή στην κατανόηση και την εφαρμογή της αλλά σχετικά αργή στην σύγκλιση της. Η μέθοδος της διχοτόμησης (bisection method) περιγράφεται παρακάτω.

2.2 Μέθοδος της διχοτόμησης

Η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να εφαρμοσθεί μόνον όταν η μεταβλητή x είναι πραγματική και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και έχει πραγματικές ρίζες. Η εφαρμογή της μεθόδου είναι απλή. Αρχικά επιλέγονται δύο σημεία δοκιμής x_A και x_B τέτοια ώστε οι τιμές $f(x_A)$ και $f(x_B)$ δηλαδή $f(x_A)f(x_B) < 0$, τότε η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ πρέπει να έχει μία πραγματική ρίζα στο διάστημα (x_A, x_B) . Η διαδικασία συνεχίζεται εκλέγοντας ένα νέο σημείο δοκιμής, x_C , που είναι το μέσο του διαστήματος (x_A, x_B) , με συντεταγμένη $x_C = (x_A + x_B)/2$ και υπολογίζεται η τιμή $f(x_C)$. Εάν $f(x_C) = 0 \pm \varepsilon$, όπου ε είναι προκαθορισμένο αποδεκτό σφάλμα, η μέθοδος συνέκλινε στην ρίζα. Εάν $f(x_C) \neq 0$ τότε εξετάζεται εάν $f(x_A)f(x_C) < 0$ ή $f(x_B)f(x_C) < 0$, επιλέγεται το διάστημα για το οποίο οι τιμές αλλάζουν πρόσημο και

επαναλαμβάνεται η διαδικασία βρίσκοντας ένα νέο σημείο x_D που είναι το μέσο του τμήματος που επιλέχθηκε. Η διαδικασία εύρεσης ρίζας με την μέθοδο της διχοτόμησης απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1. Βήματα της μεθόδου διχοτόμησης για την εύρεση ριζών εξισώσεων.

Το μήκος του διαστήματος το οποίο περιέχει την ρίζα μειώνεται κατά 50% σε κάθε βήμα εφαρμογής της μεθόδου. Η μέθοδος διχοτόμησης συγκλίνει γραμμικά και η σύγκλιση της μεθόδου είναι εξασφαλισμένη εάν τηρούνται οι προϋποθέσεις συνέχειας και πραγματικής συνάρτησης. Το απόλυτο σφάλμα της μεθόδου διχοτόμησης μετά από n βήματα είναι $|x_A - x_B| / 2^{n+1}$ και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα είναι $|x_A - x_B| / 2^n$ δηλαδή ο αριθμός των διχοτομήσεων (επαναλήψεων) που απαιτούνται για την εύρεση της ρίζας με προκαθορισμένο σφάλμα ε είναι $n > \log_2 |x_A - x_B| / \varepsilon$. Δηλαδή ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για να μειωθεί η αβεβαιότητα εύρεσης της ρίζας από την διχοτόμηση του πρώτου διαστήματος $\Delta_1 = x_{B_1} - x_{A_1}$ στην διχοτόμηση του $n^{\text{ου}}$ διαστήματος $\Delta_n = x_{B_n} - x_{A_n}$ είναι $n = \log(\Delta_1 / \Delta_n) / \log 2$. Η μέθοδος της διχοτόμησης για την εύρεση των ριζών έχει επαναληπτικό χαρακτήρα αλλά αργή σύγκλιση παρακάτω θα διαπραγματευτούμε επαναληπτικές μεθόδους με ταχεία σύγκλιση.

2.3 Επαναληπτικές μέθοδοι

Πολλές από τις μεθόδους εύρεσης των ριζών της Εξ. (2.1) είναι επαναληπτικές και έχουν την μορφή

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \quad (2.2)$$

όπου \mathbf{g} είναι μία κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση και \mathbf{x}_0 είναι κάποια αρχική πρόβλεψη για την λύση της εξίσωσης.

Η σύγκλιση των επαναλήψεων της Εξ. (2.2) είναι εξασφαλισμένη όταν η απεικόνιση $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ έχει την ιδιότητα $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ για κάποιο μέτρο του συναρτησιακού χώρου $\|\cdot\|$ και μία σταθερά $M < 1$ για κάθε \mathbf{x} και \mathbf{y} στο πεδίο

ορισμού. Τότε η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει διότι (όπως μπορεί να αποδειχθεί) η απεικόνιση έχει ένα σταθερό σημείο \mathbf{p} στο πεδίο ορισμού της που ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (2.3)$$

Οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι κατάλληλες για την εύρεση πραγματικών και μιγαδικών ριζών, όταν αναζητούνται μιγαδικές ρίζες οι μέθοδοι επίλυσης πρέπει να προγραμματισθούν με δηλώσεις μιγαδικών μεταβλητών. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι επαναληπτικές μέθοδοι απαιτούν μια αρχική πρόβλεψη ή εκτίμηση της τιμής της ρίζας ή των ριζών. Το πρόβλημα εύρεσης μίας καλής αρχικής εκτίμησης, ιδιαίτερα για συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων παραμένει ανοικτό. Στην απλή περίπτωση μίας εξίσωσης $f(x) = 0$, π.χ. $x^2 + 5x \cos x = 0$, η χρήση της γραφικής παράστασης από την οποία μπορούμε να εκτιμήσουμε την θέση της ρίζας με ικανοποιητική ακρίβεια είναι επαρκής. Οι μέθοδοι εύρεσης ριζών με μεγάλη τάξη ακρίβειας απαιτούν συνήθως καλές αρχικές εκτιμήσεις και πολλές φορές καθίσταται αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε αρχικά μία απλή μέθοδο και κατόπιν, όταν προσεγγίσουμε την πραγματική λύση (ρίζα) να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο υψηλής τάξης ακρίβειας, η οποία έχει και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος, μόνο για λίγες επαναλήψεις.

2.3.1 Επαναληπτική διαδικασία

Το γενικό πρόβλημα των επαναληπτικών μεθόδων συνίσταται στην εύρεση των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (2.4)$$

στο διάστημα $a \leq x \leq b$.

Κάθε εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$x - g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad x = g(x) \quad (2.5)$$

Μέθοδοι εύρεσης της ρίζας με την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = g(x_n)$ θα παρουσιασθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)$ τέτοια ώστε

$$0 < |\varphi(x)| < \infty, \quad a \leq x \leq b \quad (2.6)$$

τότε η εξίσωση

$$g(x) - x = -\varphi(x)f(x) \quad (2.7)$$

έχει τις ίδιες ρίζες με την εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Θα δούμε παρακάτω ότι οι περισσότερες επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούν ειδικές μορφές της συνάρτησης $\varphi(x)$.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της συνάρτησης $g(x)$ είναι

$$g(x) = x - F(f(x)) \quad (2.8)$$

όπου η συνάρτηση $F(y)$ ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$F(0) = 0 \quad \text{και} \quad F(y) \neq 0, \quad y \neq 0 \quad (2.9)$$

2.3.2 Επαναληπτική μέθοδος χορδής

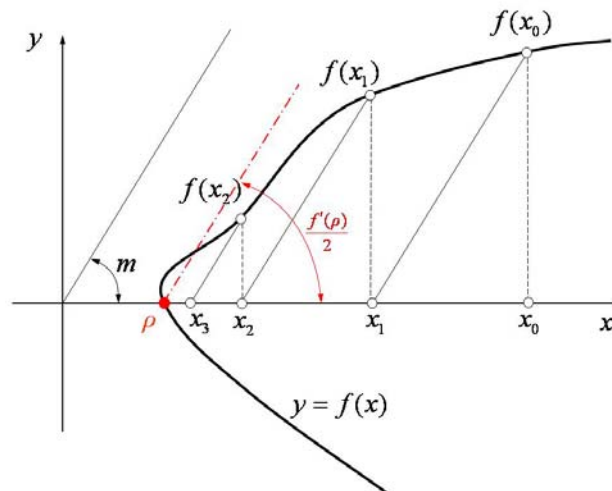
Η επαναληπτική μέθοδος χορδής χρησιμοποιεί την απλούστερη μορφή της συνάρτησης $\varphi(x) = m \neq 0$ και όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε

$$g'(x) = 1 - m f'(x) \quad (2.10)$$

Μπορεί δε να αποδειχθεί ότι η επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ συγκλίνει για κάποιο διάστημα γειτονικό της ρίζας, ρ , ($f(\rho) = 0$) όταν η τιμή της σταθεράς m βρίσκεται στο διάστημα $0 < m f'(\rho) < 2$. Τότε η επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση της ρίζας για την επιλογή $\varphi = m$, $0 < m f'(\rho) < 2$ είναι

$$x_{n+1} = x_n - m f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

και έχει τη απλή γεωμετρική ερμηνεία του παρακάτω σχήματος όπου φαίνεται ότι η τιμή x_{n+1} είναι η τομή του οριζώντιου άξονα με την ευθεία που έχει κλίση $1/m$ και άγεται από το σημείο $(x_n, f(x_n))$.



Σχήμα 2. Γεωμετρική ερμηνεία της επαναληπτικής μεθόδου χορδής.

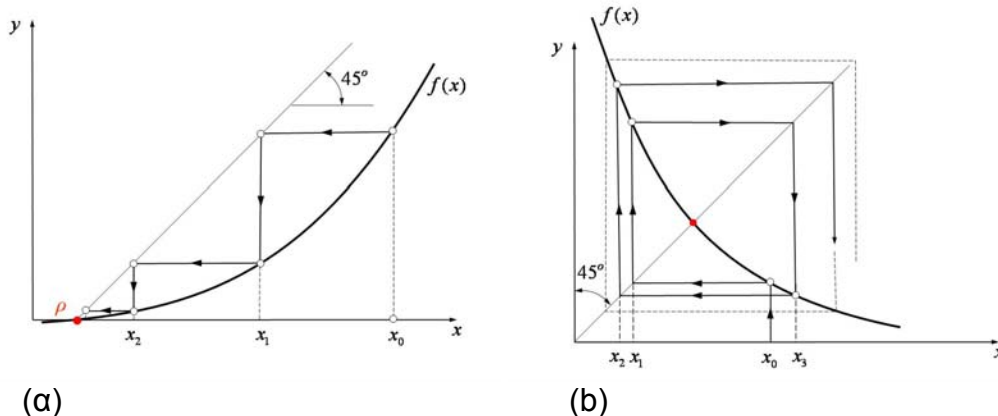
2.3.3 Μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων

Η μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων είναι μία επαναληπτική μέθοδος πιο γενική των προηγούμενων διότι δεν έχει τον περιορισμό σχετικά με την μορφή της συνάρτησης $f(x)$ να είναι πολυώνυμο. Η εξίσωση, $f(x) = 0$, της οποίας αναζητούμε την λύση, ρ , γράφεται και πάλι στην μορφή $x = g(x)$. Τότε όταν $f(\rho) = 0$, $\rho = g(\rho)$. Αρχίζοντας από μία αρχική προσέγγιση, x_1 , της ρίζας υπολογίζουμε και πάλι με την

τεχνική των διαδοχικών επαναλήψεων τις προσεγγίσεις x_2, x_3, \dots από την επαναληπτική σχέση

$$x_{j+1} = g(x_j) \quad (2.12)$$

Η πορεία της επαναληπτικής διαδικασίας απεικονίζεται στο Σχ. 3 για δύο περιπτώσεις. Στο Σχ. 3.a έχουμε σύγκλιση ενώ στο Σχ. 3.b παρουσιάζεται απόκλιση της μεθόδου.



Σχήμα 3. Γεωμετρική αναπαράσταση της μεθόδου διαδοχικών αντικαταστάσεων.

Σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν για κάποια μικρή τιμή της σταθεράς ε , τέτοια ώστε $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει η ανισότητα

$$|g(x) - g(\rho)| \leq \varepsilon |x - \rho|, \quad \forall |x - \rho| \leq |x_1 - \rho| \quad (2.13)$$

Διότι όταν η παραπάνω ανισότητα ισχύει τότε

$$\begin{aligned} |x_2 - \rho| &= |g(x_1) - \rho| = |g(x_1) - g(\rho)| \leq \varepsilon |x_1 - \rho| \\ |x_3 - \rho| &= |g(x_2) - \rho| = |g(x_2) - g(\rho)| \leq \varepsilon |x_2 - \rho| \leq \rho^2 |x_1 - \rho| \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |x_j - \rho| &= |g(x_j) - \rho| = |g(x_j) - g(\rho)| \leq \varepsilon |x_j - \rho| \leq \rho^{j-1} |x_1 - \rho| \end{aligned} \quad (2.14)$$

Δηλαδή

$$|x_j - \rho| < |\rho|^{j-1} |x_1 - \rho| \quad \text{και} \quad \rho = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \quad (2.15)$$

Η συνθήκη της ανισότητας Εξ. (2.13) πληρούται όταν η συνάρτηση $g(x)$ έχει παράγωγο $g'(x)$ η οποία είναι τέτοια ώστε να πληρεί την παρακάτω ανισότητα

$$|g'(x)| \leq \rho < 1, \quad \forall |x - \rho| < |x_1 - \rho| \quad (2.16)$$

Η επαναληπτική διαδικασία του σχήματος 4.b αποκλίνει διότι $|f'(x)| > 1$. Όταν η τιμή x_j είναι κοντά στην ρίζα ρ τότε ισχύει η προσεγγιστική σχέση

$$x_{j+1} - \rho \approx g'(\rho)(x_j - \rho) \quad (2.17)$$

Και η παράγωγος $g'(\rho)$ ονομάζεται παράγοντας ασυμπτωτικής σύγκλισης.

2.3.4 Μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton αντιστοιχεί σε μεταβαλλόμενη κατά την διαδικασία επανάληψης εκλογή της κλίσης m_n η οποία επιλέγεται έτσι ώστε

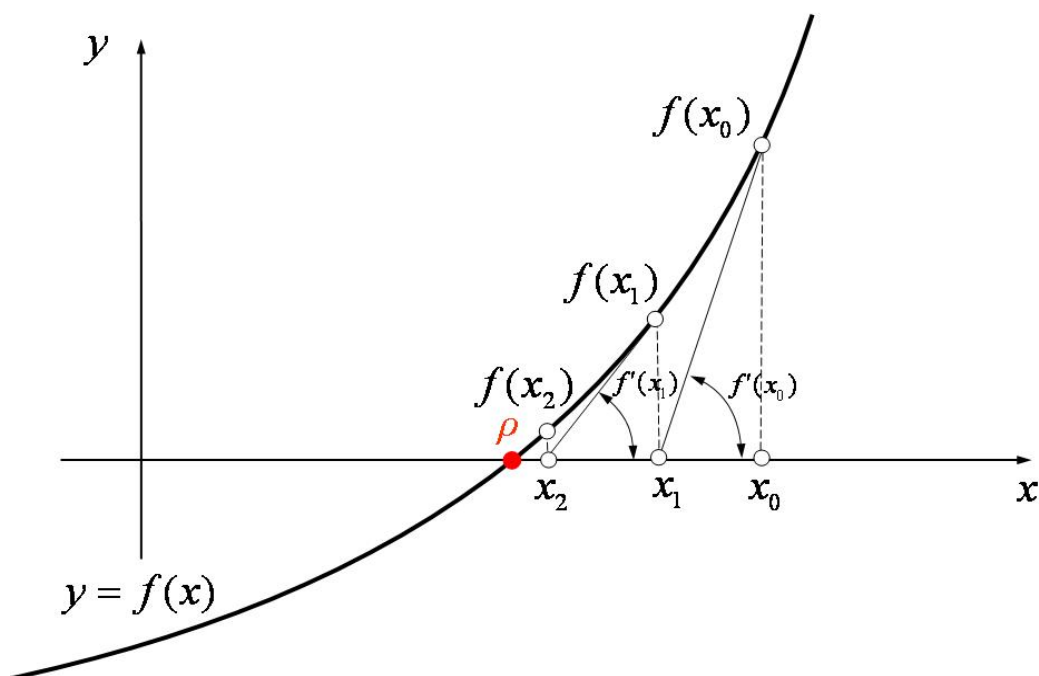
$$g'(x) = 1 - m_n f'(x) = 0 \quad \text{ή} \quad m_n = \frac{1}{f'(x)} \quad (2.18)$$

η παραπάνω επιλογή της κλίσης συνεπάγεται ότι $\varphi(x) = 1/f'(x)$ ή $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ και η επαναληπτική διαδικασία της μεθόδου Newton είναι

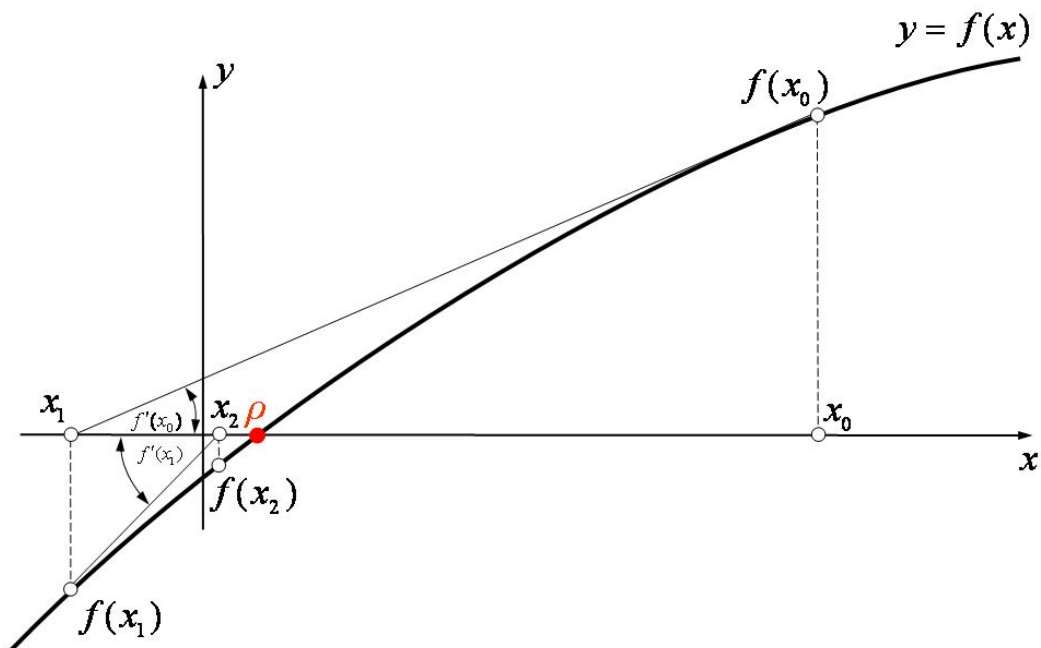
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{μέθοδος Newton} \quad (2.19)$$

Η μέθοδος Newton είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου διαδοχικών αντικαταστάσεων. Η συγκεκριμένη εκλογή της συνάρτησης $g(x)$ καθιστά την μέθοδο Newton δεύτερης τάξης ακρίβειας, δεδομένου ότι $f'(\rho)$ και ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης, $f''(x)$, στην ρίζα $f(\rho) = 0$ υπάρχει $f''(\rho) \neq \infty$ διότι $g'(\rho) = f(\rho)f''(\rho) / [f'(\rho)]^2 = 0$.

Η γεωμετρική αναπαράσταση της επαναληπτικής διαδικασίας της μεθόδου Newton φαίνεται στο παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 4.a Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Newton για κοίλη συνάρτηση.



Σχήμα 4.b Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Newton για κυρτή συνάρτηση.

Είναι προφανές ότι η μέθοδος Newton αντικαθιστά την χορδή με την εφαπτομένη στην καμπύλη της συνάρτησης σε κάθε βήμα της επανάληψης.

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad 2.20$$

ή

$$f(x) = ((r + a_1)r + a_2) r \dots r + a_n \quad 2.21$$

τότε

$$f(x) = (x-r) \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^{n-j-1} + b_n, \quad b_{j+1} = b_j r + a_{j+1} \quad 2.22$$

Η τιμή της παραγώγου στο σημείο r δίνεται από

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^{n-j-1} \quad 2.23$$

και όταν $r = \rho$ είναι μία ρίζα του πολυωνύμου τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \rho}{(x_k - \rho)^2} = \frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)} \quad 2.24$$

που σημαίνει ότι η σύγκλιση της μεθόδου Newton είναι και πάλι τετραγωνική.

Απόδειξη τετραγωνικής σύγκλισης της μεθόδου Newton

Θεωρούμε το δεύτερης τάξης ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης γύρω από την ρίζα.

$$f(x) = f(\rho) + (x - \rho)f'(\rho) + \frac{1}{2!}(x - \rho)^2 f''(\rho) + \frac{1}{3!}(x - \rho)^3 f'''(\xi), \quad x < \xi < \rho \quad 2.25$$

Τότε η μέθοδος Newton είναι

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \rho &= (x_k - \rho) - \frac{f(x_k) - f(\rho)}{f'(x_k)} \\ &= (x_k - \rho) - \frac{1}{f'(x_k)} \left[(x_k - \rho)f'(\rho) + \frac{(x_k - \rho)^2}{2} f''(\rho) + \frac{(x_k - \rho)^3}{6} f'''(\xi_k) \right] \\ &= \frac{(x_k - \rho)^2}{f'(x_k)} \left[\frac{f'(x_k) - f'(\rho)}{x_k - \rho} - \frac{f''(\rho)}{2} - \frac{1}{6}(x_k - \rho)f'''(\xi_k) \right] \end{aligned} \quad 2.26$$

αλλά στο όριο της επανάληψης βρίσκουμε την ρίζα $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \rho$, δηλαδή

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \rho}{x_k - \rho} = \frac{1}{f'(\rho)} \left[f''(\rho) - \frac{f''(\rho)}{2} \right] = \frac{f''(\rho)}{2f'(\rho)} \quad 2.27$$

2.3.5 Η μέθοδος Newton για μιγαδικές συναρτήσεις

Η μέθοδος Newton έχει ευρύτατη εφαρμογή και χρησιμοποιείται για την εύρεση ριζών συναρτήσεων (γραμμικών και μη-γραμμικών) καθώς και πολυωνύμων. Η μέθοδος Newton μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην γενική περίπτωση που η συνάρτηση $f(z)$ είναι μιγαδική $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, τότε οι μιγαδικές ρίζες βρίσκονται από την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία.

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \quad 2.28$$

που ισοδυναμεί με την επαναληπτική διαδικασία για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ξεχωριστά

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\left[v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right]}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]} \Bigg|_{(x_k, y_k)} \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{\left[-v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right]}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]} \Bigg|_{(x_k, y_k)} \end{aligned} \quad 2.29$$

Αρχίζοντας την επανάληψη με το διάνυσμα \mathbf{x}^0 της αρχικής προσέγγισης της λύσης (το οποίο δεν είναι γνωστό αλλά για το οποίο πρέπει να έχουμε μία καλή αρχική τιμή “initial guess”)

$$\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T \quad 2.33$$

Η επαναληπτική διαδικασία που ορίζεται από την μέθοδο Newton – Raphson συγκλίνει όταν οι συνιστώσες του Ιακωβιανού μητρώου $\Phi(\mathbf{x}_k)$ είναι συνεχείς στην γειτονία της ρίζας $\bar{\rho} = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]^T$, $f(\bar{\rho}) = 0$ και όταν η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου στην γειτονία της ρίζας είναι διαφορετική του μηδενός $\det \Phi(\bar{\rho}) \neq 0$. Δηλαδή όταν το διάνυσμα \mathbf{x}^0 είναι κοντά στην ρίζα και οι παραπάνω συνθήκες πληρούνται τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \bar{\rho}$. Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης είναι ως ακολούθως:

Απόδειξη

Εξ υποθέσεως $f(\bar{\rho}) = 0$ και συμβολίζοντας με $\bar{\delta}_k$ την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων, $\bar{\delta}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, τότε $\bar{\delta}_k$ είναι λύση του συστήματος $\Phi(\mathbf{x}_k) \bar{\delta}_k = -f(\mathbf{x}_k)$, δηλαδή

$$\bar{\delta}_k = [\Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} (f(\bar{\rho}_k) - f(\mathbf{x}_k)) \quad 2.34$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}_k) - f_i(\bar{\rho}) &= \sum_{j=1}^n f_{ij}(\bar{\rho} + \xi_{ik}(\mathbf{x}_k - \bar{\rho})) (x_{jk} - \rho_j), & 0 \leq \xi_{ik} < 1 \\ &= [\Psi] (\mathbf{x}_k - \bar{\rho}) \end{aligned} \quad 2.35$$

όπου η i^{th} γραμμή του μητρώου $[\Psi]$ είναι

$$f_{i1}(\bar{\rho} + \xi_{ik}(\mathbf{x}_k - \bar{\rho})), f_{i2}(\bar{\rho} + \xi_{ik}(\mathbf{x}_k - \bar{\rho})), \dots, f_{in}(\bar{\rho} + \xi_{ik}(\mathbf{x}_k - \bar{\rho})) \quad 2.36$$

τότε

$$\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\rho} = \mathbf{x}_k - \bar{\rho} + \bar{\delta}_k = [\Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} (\Phi(\mathbf{x}_k) - \Psi) (\mathbf{x}_k - \bar{\rho}) \quad 2.37$$

Όπου τα στοιχεία του μητρώου $(\Phi(\mathbf{x}_k) - \Psi)$ είναι της μορφής

$$f_{ij}(\mathbf{x}_k) - f_{ij}(\bar{\rho} + \xi_{ik}(\mathbf{x}_k - \bar{\rho})) \quad 2.38$$

τα στοιχεία του μητρώου μπορεί όμως να είναι αυθαίρετα μικρά όταν η αρχική μας πρόβλεψη, \mathbf{x}_0 , για την επαναληπτική διαδικασία Newton – Raphson, η οποία

βρίσκεται στην περιοχή $|x_i - \rho_i| \leq h, \forall 1 < i < n$. Τότε δεδομένου ότι $\det[\Phi(\mathbf{x})] \neq 0$ ισχύει $0 < \mu < 1, |x_{ik} - \rho_i| \leq h\mu^k, \forall 1 < i < n$ που σημαίνει ότι η ακολουθία $\{\mathbf{x}_k\}$ συγκλίνει στην λύση $\bar{\rho}$.

Παράδειγμα 1

Εύρεση της λύσης του συστήματος

$$f_1(x, y) = \frac{\sin(x_1 x_2)}{2} - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{4\pi} = 0$$

$$f_2(x, y) = \left(1 - \frac{1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) - 2ex_1 + \frac{ex_2}{\pi} = 0$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων που εμφανίζονται στο Ιακωβιανό μητρώο είναι

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{x_2 \cos(x_1 x_2)}{2} & -\frac{1}{4\pi} + \frac{x_1 \cos(x_1 x_2)}{2} \\ -2e + \left(2 - \frac{1}{2\pi}\right)e^{2x_1} & \frac{e}{\pi} \end{bmatrix}$$

αλλά $\Phi(\mathbf{x}_k) \bar{\delta}_k = -f(\mathbf{x}_k)$, δηλαδή

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 = -f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 = -f_2(x_1, x_2)$$

οπότε

$$\delta \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad D = \det[\Phi(\mathbf{x}_k)] = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Και η επαναληπτική διαδικασία είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{x}_k - [\Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

Εκλέγουμε την αρχική τιμή $\mathbf{x}_0 = [0.4, 0.3]^T$ και η λύση βρίσκεται με την επαναληπτική διαδικασία που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

k	x_1	x_2	f_1	f_2	$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$	D	Δx_1	Δx_2
0	0.400	0.300	0.0272	-0.0320	0.0435	-0.007	-1.34	0.865	0.0281	-0.8310	-1.249
1	-0.431	1.751	-0.2660	1.7400	0.1380	-0.236	-4.66	0.865	-0.9820	0.1860	-1.018
2	-0.254	0.733	-0.0251	0.0300	-0.139	-0.200	-4.31	0.865	-0.9840	-0.0160	-0.114
3	-0.261	0.619	0.0009	0.0003	-0.195	-0.208	-4.35	0.865	-1.0700	0.0007	0.003
4	-0.260	0.622	0.0000	0.0000	-0.193	-0.208	-4.34	0.865	-1.0700	0.0000	0.000
5	-0.260	0.622	0.0000	0.0000	—	—	—	—	—	—	—

Παράδειγμα 2

Εύρεση ριζών της μιγαδικής συνάρτησης $f(z) = z^4 - 2z^3 + (5z^2 - z - 3)/4 = 0$ που γράφεται και ως $f(z) = (z - 3/2)(z + 1/2)[z - (1 + i\sqrt{3})/2][z - (1 - i\sqrt{3})/2]$ δηλαδή έχει ρίζες $z_1 = 3/2$, $z_2 = -1/2$, και $z_{3,4} = (1 \pm i\sqrt{3})/2$

Για να βρούμε τις ρίζες αριθμητικά ξεχωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Το πραγματικό, $u(x, y)$, και το φανταστικό, $v(x, y)$, μέρος είναι

$$u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 2x^3 + 6xy^2 - (5x^2 - 5y^2 - x - 3)/4$$

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y + 2y^3 - (10xy - y)/4$$

και οι παράγωγοι αυτών που απαιτούνται για την επαναληπτική διαδικασία

$$x_{k+1} = x_k + \left(\frac{v u_x - u u_x}{(u_x)^2 + (u_y)^2} \right)_{x_k, y_k} \quad y_{k+1} = y_k + \left(\frac{-v u_x - u u_x}{(u_x)^2 + (u_y)^2} \right)_{x_k, y_k}$$

είναι

$$u_x(x, y) = 4x^3 - 12xy^2 - 6x^2 + 6y^2 - (10x - 1)/4$$

$$u_y(x, y) = 4y^3 - 12x^2y + 12xy - 10y/4$$

Η επαναληπτική διαδικασία φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

k	$(x_1)_k$	$(x_2)_k$	u	v	u_x	u_y	$(x_1)_{k+1}$	$(x_2)_{k+1}$
1	1.000000	1.000000	-1.000000	-1.750000	-5.750000	1.500000	0.762832	0.757522
2	0.762832	0.757522	-0.527593	-0.501543	-1.868670	1.48959	0.459373	0.731024
3	0.459373	0.731024	-0.336523	0.078138	0.280573	1.91366	0.524586	0.897316
4	0.524586	0.897316	0.096532	-0.082031	-0.249786	3.33214	0.506285	0.866673
5	0.502265	0.866673	0.001940	-0.006880	-0.021549	3.03719	0.500005	0.866018
6	0.500005	0.866018	-0.000022	-0.000014	-0.000044	3.031.2	0.500000	0.866025

Οι ρίζες της μιγαδικής συνάρτησης $f(z) = 0$ μπορεί να βρεθούν και με τη απ' ευθείας εφαρμογή της μεθόδου Newton – Rphsoan αναζητώντας την λύση του μη γραμμικού συστήματος $u(x, y) = v(x, y) = 0$

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Λόγω των συνθηκών Cauchy–Riemann έχουμε $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ και $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ οπότε η ορίζουσα του μητρώου είναι $\det \Phi = (\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2$

$$\delta \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{bmatrix} v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{bmatrix} v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial x} \\ -u \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

και η επαναληπτική διαδικασία είναι

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k$$

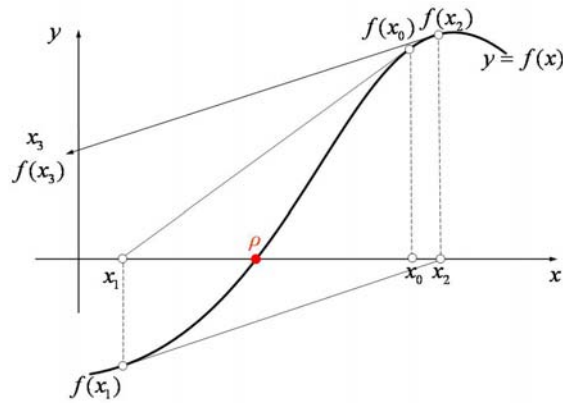
Η οποία είναι η ίδια με την διαδικασία που ακολουθείται με την εφαρμογή της μεθόδου Newton υπό μορφή συνιστωσών.

2.3.7 Η μέθοδος Regula – Falsi

Η μέθοδος Newton για την εύρεση ριζών πραγματικής συνάρτησης $f(x) = 0$ είναι

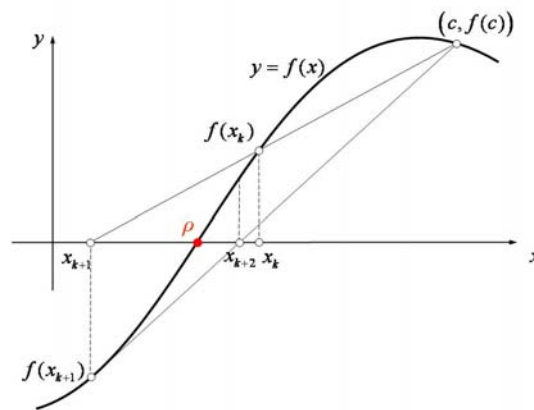
$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad 2.39$$

Και έχει την γεωμετρική ερμηνεία που απεικονίζεται στο Σχ. 3. Είναι προφανές ότι η επανάληψη συγκλίνει στην ρίζα μόνον όταν η συνάρτηση είναι κοίλη προς τα άνω, όπως στο Σχ. 3, ή όταν είναι κοίλη προς τα κάτω στην περιοχή μεταξύ της ρίζας, $(\rho, 0)$, και του σημείου επανάληψης $(x_k, f(x_k))$. Συναρτήσεις οι οποίες έχουν σημείο καμψής (δηλ. συναρτήσεις οι οποίες από κοίλες για κάποιο διάστημα γίνονται κυρτές) μπορεί να παρουσιάσουν απόκλιση. Η απόκλιση από την λύση κατά την διάρκεια της επανάληψης απεικονίζεται στο Σχ. 4 για μία συνάρτηση με σημεία καμψής.



Σχήμα 4. Γεωμετρική ερμηνεία της απόκλισης επανάληψης για μια συνάρτηση που δεν είναι μόνο κοίλη ή μόνο κυρτή.

Σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να επιτευχθεί με την παρακάτω τροποποίηση που συνιστά την μέθοδο εύρεσης ριζών η οποία είναι γνωστή και ως μέθοδος λανθασμένης θέσης (false position). Η γραφική ερμηνεία της μεθόδου λανθασμένης θέσης απεικονίζεται στο Σχ. 5.



Σχήμα 5. Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου false position.

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο $C \equiv (c, f(c))$, την χορδή η οποία ορίζεται από το σταθερό σημείο και το σημείο $X_k \equiv (x_k, f(x_k))$, και το σημείο $X_{k+1} \equiv (x_{k+1}, 0)$ στο οποίο η χορδή (CX_{k+1}) τέμνει τον x άξονα. Η παραπάνω γεωμετρική κατασκευή έχει την αλγεβρική αναπαράσταση:

$$x_{k+1} = \frac{cf(x_k) - x_k f(c)}{f(x_k) - f(c)} \quad 2.40$$

Το δε σημείο x_{k+1} δίδει μία καλύτερη προσέγγιση της ρίζας και η επανάληψη για το επόμενο σημείο x_{k+2} είναι

$$x_{k+2} = \frac{cf(x_{k+1}) - x_k f(c)}{f(x_{k+1}) - f(c)} \quad 2.41$$

και φαίνεται ότι προσεγγίζει την ρίζα αντί να αποκλίνει όπως στην κλασσική μέθοδο Newton.

Η επανάληψη σταθερού σημείου των Εξ. (2.40)-(2.41) έχει την παρακάτω ερμηνεία η οποία βασίζεται στην μέθοδο διαδοχικών αντικαταστάσεων των προηγούμενων κεφαλαίων. Έστω ότι το δεξί μέλος της Εξ. (2.40) είναι $F(x)$

$$F(x) = \frac{c f(x) - x f(c)}{f(x) - f(c)} \quad 2.42$$

όπου $f(c) \neq 0$ επειδή το σταθερό σημείο, c , εξ υποθέσεως δεν είναι ρίζα. Όταν το σημείο, x , κατά την διάρκεια της επανάληψης της Εξ. (2.40) είναι η ρίζα τότε, $x = \rho$, $f(\rho) = 0$, συνεπώς $F(\rho) = \rho$.

Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)$ της Εξ. (2.42) είναι

$$F'(x) = f(c) \frac{(x-c)f'(x) + f(c) - f(x)}{[f(x) - f(c)]^2} \quad 2.43$$

και όταν $x = \rho$ (δηλ., x , είναι η ρίζα της συνάρτησης $f(x)$) η παράγωγος της $F(x)$ (δες Εξ. (2.43)) έχει την τιμή

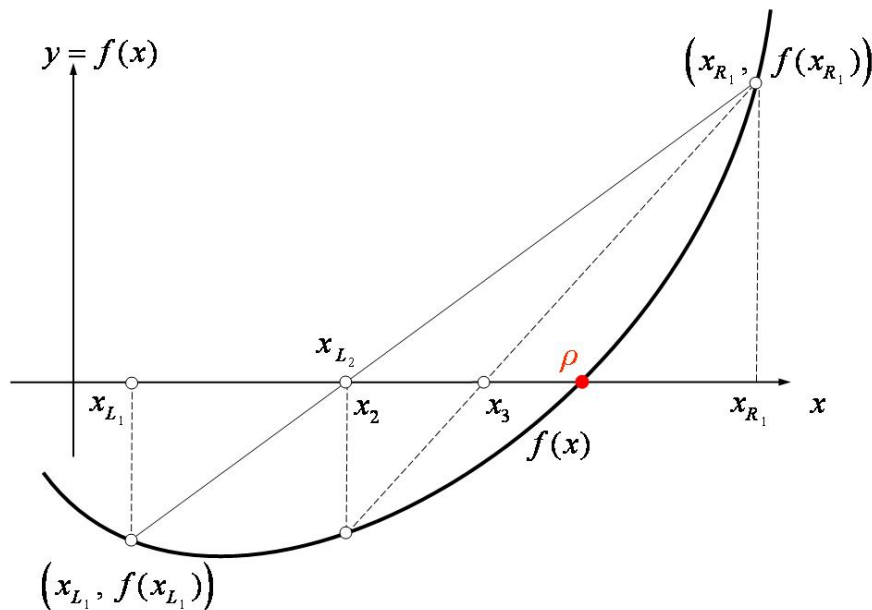
$$F'(\rho) = 1 + (\rho - c) \frac{f'(\rho)}{f(c)} \quad 2.44$$

Δηλαδή η σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου της Εξ. (2.40) μπορεί να είναι πολύ καλή όταν το σταθερό σημείο, $C \equiv (c, f(c))$, έχει επιλεγθεί κατάλληλα. Επιπλέον η επαναληπτική διαδικασία σταθερού σημείου της Εξ. (2.40) έχει μικρότερο υπολογιστικό κόστος από την κλασσική μέθοδο Newton επειδή δεν απαιτεί τον υπολογισμό παραγώγου της συνάρτησης.

Μία άλλη τεχνική (Regula-Falsi method) για την αριθμητική εύρεση ριζών συναρτήσεων απεικονίζεται στο Σχ. 6. Η μέθοδος Regula-Falsi συνδυάζει τα χαρακτηριστικά των μεθόδων διχοτόμησης και της επαναληπτικής μεθόδου σταθερού σημείου η οποία παρουσιάστηκε προηγουμένως.

Έστω ότι για την εκλογή δύο αρχικών τιμών, x_{L_1} , και x_{R_1} , οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x_{L_1})$ και $f(x_{R_1})$ έχουν διαφορετικό πρόσημο. Έστω ακόμη ότι η τομή της χορδής $(x_{L_1}, f(x_{L_1}))$, $(x_{R_1}, f(x_{R_1}))$ με τον άξονα x είναι το σημείο, x_2 , η συντεταγμένη του οποίου δίδεται από την σχέση

$$x_2 = \frac{x_{L_1} f(x_{R_1}) - x_{R_1} f(x_{L_1})}{f(x_{R_1}) - f(x_{L_1})} \quad 2.45$$



Σχήμα 6. Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Regula Falsi.

Όταν $f(x_2) = 0$ (δηλαδή $x_2 = \rho$) η διαδικασία τερματίζεται. Όταν όμως $f(x_2) \neq 0$ και $f(x_2)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την τιμή της συνάρτησης $f(x_{R_1})$ εκλέγουμε το σημεία $x_{L_2} = x_{L_1}$ και το σημείο $x_{R_2} \equiv x_2$. Αντίστοιχα όταν $f(x_2)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την τιμή της συνάρτησης $f(x_{L_1})$ εκλέγουμε το σημεία $x_{L_2} \equiv x_2$ και το σημείο $x_{R_2} \equiv x_{R_1}$. Η διαδικασία εκλογής νέου σημείου επαναλαμβάνεται με την χρήση της Εξ. (2.45) και την δημιουργία σειράς σημείων.

$$x_{k+1} = \frac{x_{L_k} f(x_{R_k}) - x_{R_k} f(x_{L_k})}{f(x_{R_k}) - f(x_{L_k})} \quad (2.45)$$

τα οποία διαδοχικά προσεγγίζουν την ρίζα της συνάρτησης.

2.4 Αριθμητικές μέθοδοι εύρεσης ριζών πολυωνύμων

Οι μέθοδος Newton πρέπει να επαναληφθεί πολλές φορές για την εύρεση ριζών πολυωνύμων και η χρήση άλλων ταχύτερων μεθόδων είναι πιο ενδεδειγμένη. Θεωρούμε ότι συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού της μορφής

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ &= \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}, \quad a_0 = 1 \\ &= (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n) = \\ &= \prod_{j=1}^n (x - \rho_j) \end{aligned} \quad (2.46)$$

με συντελεστές a_j και ρίζες ρ_j που υποτίθεται ότι $|\rho_1| \geq |\rho_2| \geq \dots \geq |\rho_n|$

2.4.1 Η μέθοδος Bernoulli

Η μέθοδος Bernoulli χρησιμοποιείται για την εύρεση των ριζών πολυωνύμων της μορφής $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}$ και εφαρμόζεται με τον ορισμό της σειράς πραγματικών αριθμών u_k , για $0 \leq k \leq n-1$, και των βοηθητικών σειρών v_k και t_k για $k \geq n$

$$\begin{aligned} u_k &= -\sum_{j=0}^n a_j u_{k-j} \\ v_k &= u_k^2 - u_{k+1} u_{k-1} \\ t_k &= u_k u_{k-1} - u_{k+1} u_{k-2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

όταν υπάρχουν πολλαπλές ρίζες τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$u_k = c_1 \rho_1^k + c_2 \rho_2^k + \dots + c_n \rho_n^k$$

και όταν

$$|\rho_1| > |\rho_2| \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \rho_1 \quad (2.48)$$

ενώ όταν

$$|\rho_1| = |\rho_2| > |\rho_3| \longrightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k}{v_{k-1}} = \rho_1 \rho_2 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{v_k} = \rho_1 + \rho_2 \end{cases} \quad (2.49)$$

Αρχίζοντας με την εκλογή την $u_k = 0$ για $k < n-1$ και $u_{n-1} \neq 0$ υπολογίζουμε τις σειρές της Εξ. (2.16.1) ή της Εξ. (2.16.2) και βρίσκουμε διαδοχικά τις ρίζες του πολυωνύμου επαναλαμβάνοντας την διαδικασία μέχρι να βρεθούν όλες οι ρίζες.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^4 - 2x^3 + (5x^2 - x - 3)/4$. Η σειρά u_k για αυτό το πολυώνυμο είναι:

$$u_k = 2u_{k-1} - 1.25u_{k-2} + 0.25u_{k-3} + 0.75u_{k-4}$$

Με αρχική επιλογή $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, $k < n-1$ και $u_3 = 1 \neq 0$ καταλήγουμε σε μία επαναληπτική διαδικασία η οποία όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα συγκλίνει σε 15 κύκλους στην πρώτη ρίζα του πολυωνύμου.

Σύγκλιση της μεθόδου Bernoulli

k	u_k	$u_k / u_{k-1} \approx \rho_1$
4	2.0000	2.0000
5	2.7500	1.3750
6	3.2500	1.1818
7	4.3125	1.3269
8	6.7500	1.5652
9	10.9844	1.6273
10	17.0469	1.5519
11	25.2852	1.4833
12	37.0703	1.4661
13	55.0342	1.4846
14	82.8369	1.5052
15	125.1130	1.5104
16	188.2400	1.5046
17	282.0750	1.4985
18	422.2550	1.4970
19	632.8090	1.4986
20	949.4970	1.5004

Η πρώτη ρίζα του πολωνύμου είναι $\rho=1.5$ και παρατηρούμε ότι η μέθοδος Bernoulli προσεγγίζει την τιμή της ρίζας σε λίγες σχετικά επαναλήψεις δηλαδή η διαδικασία συγκλίνει γρήγορα.

Η διαδικασία εύρεση ριζών με την μέθοδο Bernoulli πρέπει να επαναληφθεί για κάθε μία ρίζα ξεχωριστά μέχρι να βρεθούν όλες οι ρίζες. Όταν υπάρχει διπλή ρίζα τότε απαιτείται η χρήση της σειράς που ορίζεται από την Εξ. (2.16.2). Η μέθοδος Bernoulli είναι εύκολο να προγραμματισθεί αλλά απαιτεί διαίρεση του αρχικού πολωνύμου με το μονώνυμο $(x-\rho_1)$ ή του διωνύμου $x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1\rho_2$ σε περίπτωση διπλής ρίζας και δεν συνίσταται για την εύρεση ριζών πολωνύμων μεγάλου βαθμού.

2.4.2 Διαδοχική παραγοντοποίηση πολωνύμου

Η μέθοδος Bernoulli είναι χρήσιμη για την εύρεση των ριζών πολωνύμου διαδοχικά (μετά από την εκτέλεση της διαίρεσης με το μονώνυμο) και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν υπάρχουν διπλές ρίζες. Όταν δεν υπάρχουν πολλαπλές ρίζες συνίστατο η μέθοδος Newton για την οποία είναι και πάλι προτιμότερο να εκτελέσουμε την διαίρεση του αρχικού πολωνύμου $p^n(x)$ με το μονώνυμο $(x-\rho_1)$ και να επαναλάβουμε την διαδικασία εύρεσης ρίζας για το πολυώνυμο $p^{n-1}(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση και να επαναλάβουμε την μέθοδο Newton για το πολυώνυμο $p^{n-1}(x)$ κ.ο.κ.

Θεωρούμε την διαίρεση πολωνύμου $p^n(x)$ βαθμού n με πολυώνυμο $p^m(x)$ βαθμού $m < n$.

$$p^n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}, \quad a_0 = 1$$

$$p^m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^{m-j}, \quad b_0 = 1$$
(2.50)

Ορίζουμε σειρά αριθμών, r_j , για $0 \leq k \leq n$ τέτοιους ώστε

$$\sum_{j=0}^m b_j r_{j-k} = a_k, \quad r_j = 0 \quad j < 0$$
(2.51)

το πολυώνυμο $h^{n-m}(x)$ βαθμού $n-m$ και την σειρά συντελεστών q_j

$$h^{n-m}(x) = \sum_{j=0}^{n-m} r_j x^{n-m-j}$$

$$q_j = \sum_{l=0}^{m-j-1} b_l r_{n-j-l} \quad 0 \leq j \leq m-1$$
(2.52)

τότε

$$p^n(x) = p^m(x)h^{n-m}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} q_j x^j$$
(2.53)

εάν το πολυώνυμο $p^n(x)$ βαθμού n έχει ένα παράγοντα $\sum_{j=0}^m c_j x^{m-j}$, $c_0 = 1$ τότε

$$p^n(x) = \sum_{j=0}^m c_j x^{m-j} \sum_{l=0}^{m-n} \beta_l x^{n-m-l}$$
(2.54)

όπου $\beta_0 = 1$ και

$$(\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_m) = \lim_{j \rightarrow \infty} (r_1^{(j)}, r_2^{(j)}, \dots, r_{n-m}^{(j)})$$
(2.55)

ενώ οι αριθμοί $r_k^{(j)}$ σχετίζονται με τους αριθμούς $b_l^{(j)}$ με την σχέση

$$\sum_{l=0}^m b_l^{(j)} r_{k-1}^{(j)} = a_k, \quad b_s^{(j)} = 0, \quad s < 0$$
(2.56)

Οι αριθμοί $b_l^{(j+1)}$ υπολογίζονται από τους αριθμούς $b_l^{(j)}$, ($1 \leq l \leq m$) λύνοντας πρώτα το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{l=0}^m b_l^{(j)} \psi_{k-l}^{(j)} = -r_k^{(j)}, \quad \psi_s^{(j)} = 0, \quad s < 0$$
(2.57)

και κατόπιν το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{l=0}^m b_l^{(j+1)} \psi_{k-l}^{(j)} = -2r_k^{(j)} - \psi_k^{(j)}, \quad n-m+1 \leq k \leq n$$
(2.58)

της Εξ. (2.27) πληρούται όταν η συνάρτηση $g(x)$ έχει παράγωγο $g'(x)$ η οποία είναι τέτοια ώστε να πληρεί την παρακάτω ανισότητα

$$|g'(x)| \leq \rho < 1, \quad \forall |x - \rho| < |x_1 - \rho| \quad (2.59)$$

Η επαναληπτική διαδικασία του σχήματος 4.b αποκλίνει διότι $|f'(x)| > 1$. Όταν η τιμή x_j είναι κοντά στην ρίζα ρ τότε ισχύει η προσεγγιστική σχέση

$$x_{j+1} - \rho \approx g'(\rho)(x_j - \rho) \quad (2.60)$$

Και η παράγωγος $g'(\rho)$ ονομάζεται παράγοντας ασυμπτωτικής σύγκλισης.

2.4.3 Η μέθοδος Ward

Η μέθοδος του Ward χρησιμοποιείται για την εύρεση ριζών συναρτήσεων και πολυωνύμων μιγαδικών μεταβλητών. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(z)$ της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad 2.61$$

το οποίο έχει ρίζες $r = \beta + i\gamma$ όταν $u(\beta, \gamma) = v(\beta, \gamma) = 0$. Η μέθοδος του Ward βρίσκει τις ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου $f(z)$ ελαχιστοποιώντας το μέτρο του μιγαδικού πολυωνύμου

$$w(z) = |u(x, y)| + |v(x, y)| \quad 2.62$$

Σε κάθε περιοχή του σημείου $z = (x, y)$ του μιγαδικού επιπέδου για το οποίο το μιγαδικό πολυώνυμο, $w(x, y) \neq 0$, υπάρχει ένα σημείο $z' = (x', y')$ τέτοιο ώστε $w(x', y') < w(x, y)$. Η πρόταση αυτή μπορεί να αποδειχθεί όταν υποθέσουμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι της μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$. Όταν δε η συνάρτηση είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο τότε η τάξη των παραγώγων οι οποίες υπάρχουν καθορίζει και τον βαθμό του πολυωνύμου. Συνεπώς η μέθοδος Ward ισχύει και για μιγαδικά πολυώνυμα.

Η υλοποίηση της μεθόδου Ward υλοποιείται με την παρακάτω επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε βήμα της επανάληψης η τιμή $w(x, y)$ συγκρίνεται με τις γειτονικές τιμές $w(x+h, y)$, $w(x-h, y)$, $w(x, y+h)$, $w(x, y-h)$ και εντοπίζεται η μικρότερη τιμή. Οι τιμή των συντεταγμένων για τις οποίες το μέτρο του μιγαδικού πολυωνύμου w ελαχιστοποιείται αντικαθιστά την αρχική τιμή $z = (x, y)$ για το επόμενο βήμα επανάληψης. Στην περίπτωση κατά την οποία δεν είναι δυνατόν να βρούμε νέα ελάχιστη τιμή $w(z) = |u(x, y)| + |v(x, y)|$ τότε η τιμή του βήματος, h , αντικαθίσταται με την τιμή $h/2$ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου.

Η επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση των ριζών μιγαδικής συνάρτησης ή πολυωνύμου η οποία περιγράφηκε παραπάνω δεν είναι κατ'ανάγκη συγκλίνουσα. Παραδείγματος χάριν για το πολυώνυμο

$$\sum_{j=0}^n c_j z^{4j} + K, \quad c_j, K > 0 \quad 2.63$$

Δεν είναι δυνατόν να βρούμε ρίζες όταν αρχίσουμε από την αρχική τιμή $z = 0$.

Πρόταση: Όταν $w(x, y) \neq 0$, υπάρχει ένα σημείο $z' = (x', y')$ τέτοιο ώστε $w(x', y') < w(x, y)$.

Απόδειξη Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} f(z') &= f(z) + \frac{(z-z')}{m!} f'(z) + \frac{(z-z')^2}{2!} f''(z) + \dots + R(z') \\ &= f(z) + \sum_{m=1} \left[\frac{(z-z')^m}{m!} f^{(m)}(z) \right] + R(z') \end{aligned} \quad 2.64$$

όπου $f^{(m)}(z)/m!$ είναι ο μη-μηδενικός συντελεστής του αναπτύγματος σε δυνάμεις $(z-z')$ και το υπόλοιπο $R(z')$ μηδενίζεται για το σημείο ανάπτυξης z' όταν $R(z') = (z'-z) [f^{(m+1)}(z) + g(z')]/m!$.

Έστω ότι $f^{(m)}(z)/m! = Ae^{ib}$ και $z'-z = re^{i\tau}$. Επιλέγουμε μία μικρή τιμή του μέτρου r έστω r_1 τέτοια ώστε $R(z') = k < A/3$ για $r < r_1$ τότε

$$f(z') = u + iv + r^m e^{im\tau} [Ae^{ib} + ke^{ic}] \quad 2.65$$

Και έστω ότι $\phi = b + m\tau$ και $\psi = c + m\tau$ τότε

$$w(x', y') = |u + r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| + |v + r^m A \sin \phi + r^m k \sin \psi| \quad 2.66$$

I. Εάν $u \neq 0$ και $v \neq 0$ εκλέγουμε $r_2 < r_1$ τέτοιο ώστε $r_2^m (A+k) < |v|$

I.1 Όταν $u > 0$ εκλέγουμε $\phi = \pi$ και $r < r_2$ τότε

$$\begin{aligned} |u + r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| &= |u - r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| \leq u - r^m A + r^m k \\ &< u - r^m A + r^m A/3 \\ &< u - 2/3 Ar^m \end{aligned}$$

παρόμοια $|v + r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| < v + Ar^m/3$. Δηλαδή όταν $u > 0$ τότε πάντοτε ικανοποιείται η σχέση $w(x', y') < |u(x, y)| + |v(x, y)| - Ar^m/3 < w(x, y)$

I.2 Όταν $u < 0$ εκλέγουμε $\phi = 0$ και $r < r_2$ τότε

$$\begin{aligned} |u + r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| &= |u - r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| \leq u - r^m (A + k \cos \psi) \\ &< |u| - r^m A + r^m A/3 \\ &< |u| - 2/3 Ar^m \end{aligned}$$

και

$$|\nu + r^m A \cos \phi + r^m k \cos \psi| < \nu + Ar^m / 3 \quad \text{δηλαδή και πάλι } w(x', y') < w(x, y)$$

II. Εάν $u = 0$ και $\nu \neq 0$ (διότι (x, y) δεν είναι ρίζα) τότε και πάλι εκλέγουμε $r_3 < r_1$

$$\text{τέτοιο ώστε } r_3^m (A+k) < |\nu|$$

II.1 Όταν $\nu > 0$ εκλέγουμε $\phi = -\pi/2$

II.2 Όταν $\nu < 0$ εκλέγουμε $\phi = +\pi/2$

και για $r < r_3$ βρίσκουμε και πάλι ότι $w(x', y') < w(x, y)$