Εργασία 4, 22 Δεκεμβρίου, 2010

Θέμα εργασίας : **<u>Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων</u>**

<u>Ημερομηνία Παράδοσης</u> **17 Ιανουαρίου, 2011**

<u>1) Χρήση μεθόδων</u>

Επιλύστε αριθμητικά την παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

I.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^4 + x}$, με οριακή συνθήκη $y(x=0.1) = -2.3092$, στο διάστημα $0.1 \le x \le 1$

II. $\ddot{x} + 0.1\dot{x} + \sin(x) = 0$, με αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 1$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$, στο χρόνο $0 \le t \le 50$

1. Χρησιμοποιήστε ένα απλό ρητό (explicit) σχήμα χαμηλής τάξης και ένα ρητό αριθμητικό σχήμα με μεγαλύτερη τάξη ακρίβειας για την αριθμητική επίλυση και συγκρίνετε τα αποτελέσματα. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρήστε αρκετά μικρό βήμα έτσι ώστε να μην έχετε προβλήματα απόκλισης λόγω αριθμητικής αστάθειας
2. Εξετάστε την ακρίβεια συγκρίνοντας με την αναλυτική λύση της πρώτης εξίσωσης $y = \log x - \log(1+x^3)/3$ και κατασκευάστε ένα διάγραμμα σύγκλισης του σφάλματος ($y_{exact} - y_{numerical}$) για Δx, $\Delta x/2$, $\Delta x/4$, $\Delta x/8$
3. Χρησιμοποιήστε μία μέθοδο Runge-Kutta και συγκρίνετε με τα προηγούμενα αποτελέσματα

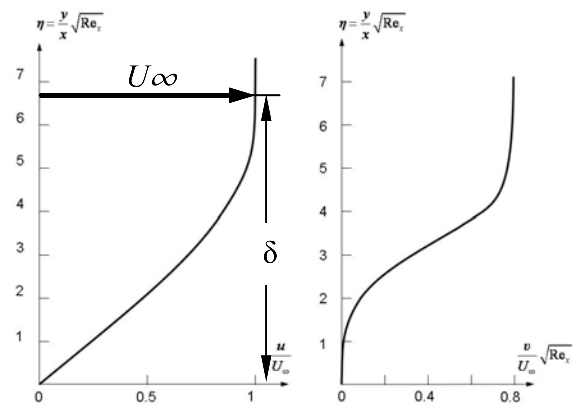
<u>2) Πρακτική εφαρμογή</u>

Η συνήθης διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης, $2f''' + f\,f'' = 0$, ονομάζεται εξίσωση Blasius και περιγράφει την κατανομή ταχύτητας σε ένα οριακό στρώμα ασυμπίεστου ρευστού πάνω από μία επίπεδη επιφάνεια με μηδενική κλίση πίεσης.

2.1 Υπολογίστε αριθμητικά την λύση της εξίσωσης Blasius με οριακές συνθήκες

$$2\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad f(\eta=0) = 0, \quad f'(\eta=0) = 0, \quad f''(\eta=0) = 0.33206, \ \eta \le 10$$

2.2.1 Σχεδιάστε την κατανομή των ταχυτήτων (στο μετασχηματισμένο χώρο *u,(η)*, *υ(η)* και στον φυσικό χώρο *u(y)*, *υ(y)*), ($u/U_\infty \simeq \zeta(2 - 2\zeta^2 + \zeta^3)$ $\quad \zeta = \eta/\delta \le 1$) για $\mathrm{Re}_x = 100$, στη θέση $x = 2$, και για $\mathrm{Re}_x = 1000$, στη θέση $x = 1$.



Όπου $u = U_\infty f'(\eta)$ και $\upsilon(\eta) = U_\infty(\eta f' - f)/2\sqrt{\mathrm{Re}_x}$, $\mathrm{Re}_x = U_\infty x/\nu$, $U_\infty = 1.0$