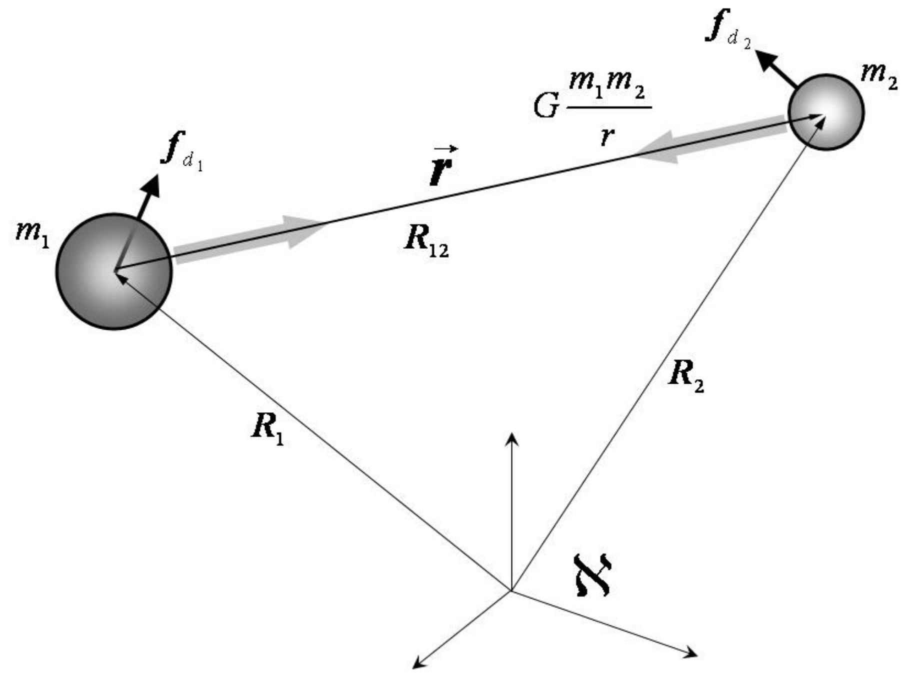
Αναλυτική Μηχανική Διαστήματος

Η κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο είναι ένα θέμα που απασχόλησε την ανθρώπινη σκέψη από αρχαιοτάτων χρόνων. Οι αρχικές θεωρίες κίνησης ουρανίων σωμάτων ήταν περιγραφικές, είχαν σοβαρά μειονεκτήματα, και ουσιαστικά δεν προέβλεπαν την κίνηση των πλανητών. Η πρώτη γεωμετρική, και ουσιαστικά σωστή λύση που περιγράφει την κίνηση των πλανητών παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Kepler το 1609. Η θεωρία του Kepler αποτέλεσε σημαντική βελτίωση της θεωρίας του Copernicus που υπέθετε ότι οι πλανήτες εκτελούν κυκλική τροχιά γύρω από τον ήλιο. Στην συνέχεια, ο Newton (1643-1727) εφάρμοσε τους νόμους κίνησης και τον διαφορικό λογισμό που ο ίδιος ανέπτυξε για να μελετήσει την κίνηση των ουρανίων σωμάτων. Κατά την διάρκεια των ερευνών του ανακάλυψε την ύπαρξη της δύναμης της βαρύτητας και δετύπωσε την θεωρία της απανταχού βαρύτητας (universal gravitation theory, 1687 in Principia) που παραμένει αναλλοίωτη μέχρι το 1917 οπότε και τροποποιήθηκε από τον Einstein. Η θεωρία βαρύτητας που διατύπωσε ο Newton αποτελεί, ακόμη και σήμερα, το βασικό εργαλείο με το οποίο γίνεται ο υπολογισμός της κίνησης πλανητών και δορυφόρων. Η θεωρία της βαρύτητας του Newton, τελειοποιήθηκε και γενικεύτηκε με την γενική θεωρία της σχετικότητας του A. Einstein. Η θεωρία του Einstein απαιτείται όμως να εφαρμοσθεί μόνο στις περιπτώσεις όπου μελετούμε την κίνηση που οφείλεται σε πολύ ισχυρά πεδία βαρύτητας, δηλαδή μόνον όταν η απόσταση από ουράνια σώματα με πολύ μεγάλη μάζα είναι σχετικά μικρή. Η θεωρία του Newton, έχει εφαρμογή όχι μόνο στην κίνηση των πλανητών αλλά και των δορυφόρων παρατήρησης και τηλεπικοινωνίας που είναι σήμερα αντικείμενο με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικές λύσεις του προβλήματος δυο σωμάτων (two-body problem) βασιζόμενοι στην θεωρία του Newton και με την επιπλέον χρήση μαθηματικών εργαλείων που δεν ήταν τόσο αναπτυγμένα κατά την εποχή του Newton. Μερικά από τα αναλυτικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στην μελέτη της κίνησης δύο και τριών σωμάτων αποτελούν τα βασικά εργαλεία της αναλυτικής μηχανικής, που αναπτύχθηκε στον 18^{o} αιώνα από τον Lagrange και άλλους, και έχουν εφαρμογή όχι μόνο στην κίνηση ουρανίων σωμάτων αλλά και στην μελέτη προβλημάτων δυναμικής.

1. Εξισώσεις κίνησης δυο σωμάτων

Στην μηχανική των ουρανίων σωμάτων τα σώματα (πλανήτες ή δορυφόροι) θεωρούνται ως υλικά σημεία και η κίνηση στερεού σώματος (rigid body motion), όπως παραδείγματος χάριν η περιστροφή γύρω από τον άξονα τους, αμελείται. Ο λόγος αυτής της απλουστευτικής παραδοχής είναι ότι οι πλανήτες έχουν περίπου σφαιρικό σχήμα και οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι συνήθως πολύ μεγάλες σε σύγκριση με την χαρακτηριστική τους διάσταση.

Θεωρούμε δυο ουράνια σώματα (πλανήτη/ πλανήτη, πλανήτη/ δορυφόρο ή δορυφόρο/ δορυφόρο) μάζας m_1 και m_2 που κινούνται στο διάστημα. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται επ' αυτών είναι η αμοιβαία ελκτική δύναμη βαρύτητας και οι δυνάμεις διαταραχής f_{d1} και f_{d2} όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1.



Σχήμα 1.1 Διάγραμμα δυνάμεων για την μελέτη κίνησης δύο σωμάτων.

Η δύναμη βαρύτητας δίνεται από τον νόμο της βαρύτητας του Newton ως

$$F_{12} = -F_{21} = \frac{G\,m_1 m_2}{|\vec{r}|^2\,|\vec{r}|}\vec{\mathbf{r}} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{G} = 6.6132\mathrm{x}10^{-11}\ \ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\mathrm{kg}$$

και τα διανύσματα θέσης R_1 και R_2 μετρούνται σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα $\aleph$.

Η δύναμη διαταραχής f_{d1} μπορεί να προέλθει από διάφορες αιτίες. Παραδείγματος χάριν, για τροχιά δορυφόρου ή διαστημοπλοίου μέσα στην ατμόσφαιρα η εξασκούμενη οπισθέλκουσα, όπως επίσης και η έλξη του ήλιου, επηρεάζουν την κίνηση. Στο σύστημα γη–σελήνη, π.χ., η κίνηση επηρεάζεται από την έλξη του ηλίου και των άλλων πλανητών. Η ελκτική αυτή δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σαν δύναμη διαταραχής όσον αφορά την μελέτη κίνησης του συστήματος γη–σελήνη.

Το δυάνυσμα θέσης $\vec{R}_{12}$ της μάζας m_1 σχετικά με την μάζα m_2 είναι

$$\vec{\mathbf{R}}_{12} = \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_2 - \vec{\mathbf{R}}_1 = r\ \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{r}} \tag{1.2}$$

όπου $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ και $\hat{i} = \vec{r}/r$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Newton για το σύστημα του Σχ. 1.1 έχουμε

$$m_1 \ddot{\vec{R}} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \vec{f}_{d_1} \tag{1.3}$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \vec{f}_{d_2} \tag{1.4}$$

Ορίζοντας ως συντελεστή βαρύτητας $\mu = G(m_1 + m_2)$ και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $m_1 >> m_2$ έχουμε $\mu \simeq G m_1$. Αφαιρώντας τις Εξ. (1.3).και (1.4) βρίσκουμε ότι η εξίσωση κίνησης της μάζας m_2 (δορυφόρου) ως προς την μάζα m_1 (πλανήτη) είναι

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\mathbf{r}}} &= -\frac{\mu}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{d}} \\ \vec{\mathbf{a}}_d &= \frac{\vec{f}_{d1}}{m_1} - \frac{\vec{f}_{d2}}{m_2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

όπου $\vec{a}_d$ είναι η επιτάχυνση διαταραχής που συνήθως έχει πολύ μικρό μέγεθος και μπορεί να αμεληθεί. Θεωρώντας, παραδείγματος χάριν το σύστημα γης–σελήνης υπό την επίδραση της βαρύτητας του ηλίου μάζας m_3 η επιτάχυνση διαταραχής $\vec{a}_d$ είναι

$$\vec{a}_d = \frac{1}{m_2}\frac{G\,m_2m_3}{|r_{23}|^3}\vec{\mathbf{r}}_{23} - \frac{1}{m_1}\frac{Gm_1m_3}{|r_{13}|^3}\vec{\mathbf{r}}_{13} \simeq 0$$

διότι $r_{23} \simeq r_{13}$ και $m_3 >> m_1 >> m_2$ οπότε η εξίσωση κίνησης Εξ. (1.5) απλοποιείται ως

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \tag{1.6}$$

Ορίζοντας την συνάρτηση σχετικού δυναμικού ενέργειας βαρύτητας (relative gravitational potential energy function) $V(r)$ ως

$$V(r) = \mu / r \tag{1.7}$$

Η εξίσωση κίνησης Εξ. (1.6) γράφεται ως

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla_r V(r) \tag{1.8}$$

Ή σε μορφή Cartesian συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu}{r^3} x \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r^3} y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3} z \end{aligned} \tag{1.9}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα, μη γραμμικών, συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που είναι πλεγμένες. Οι εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μόνο όταν η τροχιά είναι κυκλική και η απόσταση r είναι σταθερή

1.2 Λύσεις της εξίσωσης κίνησης

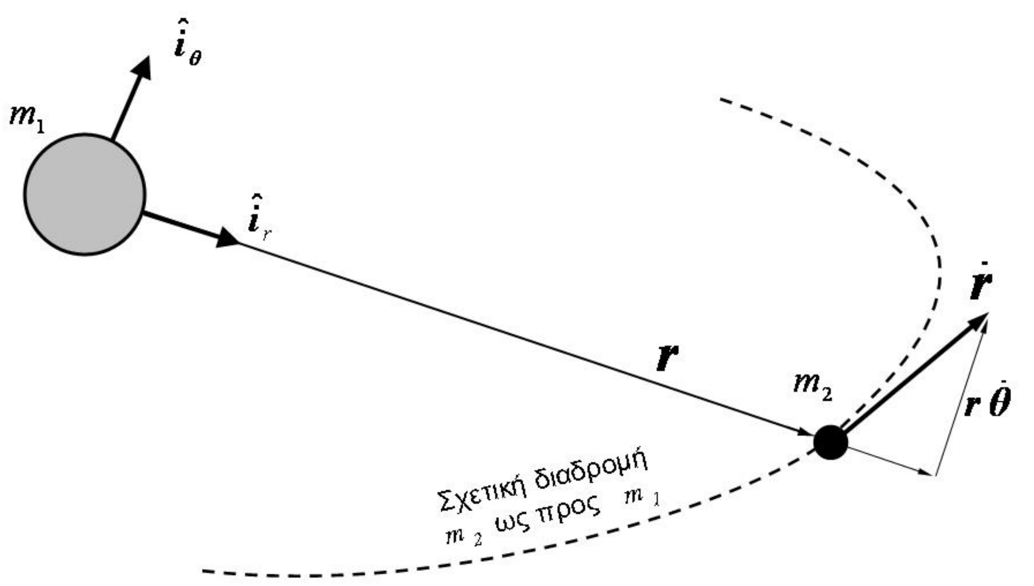
Η εξίσωση κίνησης δυο σωμάτων, Εξ. (1.6), είναι μη γραμμική και η αναλυτική της λύση δεν είναι απλή. Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιηθούν κατάλληλοι μετασχηματισμοί που καθιστούν τις εξισώσεις κίνησης ένα τέλειο διαφορικό και καθιστούν δυνατή την εύρεση της λύσης με αναλυτικές μεθόδους.

1.2.1 Διατήρηση της γωνιακής ορμής

Αρχικά εισάγουμε την γωνιακή ορμή ανά μονάδα μάζας

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = h\,\vec{i}_h \tag{1.10}$$

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων R_1 που είναι περιστρεφόμενο και προσαρτημένο στο σώμα μάζας m_1. Τα μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης του συστήματος R_1 είναι $\left\{\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_h\right\}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 1.2).



Σχήμα 1.2 Διάγραμμα δυνάμεων για την μελέτη της σχετικής κίνησης δύο σωμάτων.

Η χρονική παράγωγος του διανύσματος της γωνιακής ορμής είναι

$$\dot{\mathbf{\vec{h}}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mu}{r^3} \vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{d}} \right) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{d}} \tag{1.11}$$

Δηλαδή όταν $\vec{\alpha}_d = 0$ το διάνυσμα της γωνιακής ορμής είναι αδρανειακά σταθερό διότι $\dot{\vec{h}} = 0$, και όλες οι πιθανές τροχιές βρίσκονται πάνω σε ένα αδρανειακά σταθερό επίπεδο που είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνση $\vec{\mathbf{i}}_h$. Δηλαδή, η αδιατάρακτη σχετική κίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο. Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες για την περιγραφή των συνιστωσών της επίπεδης τροχιάς κατά την ακτινική κατεύθυνση και την εφαπτόμενη στην τροχιά. Δηλαδή, το διάνυσμα της ταχύτητας εκφράζεται ως

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\, \vec{i}_r + r\, \dot{\theta}\, \vec{i}_\vartheta \tag{1.12}$$

Στην παραπάνω σχέση $\dot{\theta}$ είναι ο ρυθμός περιστροφής του διανύσματος θέσης, $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = r\,\vec{i}_r$. Το διάνυσμα γωνιακής ορμής, $\vec{h}$, τότε είναι

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = (r\,\vec{\mathbf{i}}_r) \times \left(\dot{r}\,\vec{\mathbf{i}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{i}}_\vartheta \right) = r^2\dot{\theta}\vec{\mathbf{i}}_h \tag{1.13}$$

Δηλαδή το μέτρο της γωνιακής ορμής είναι :

$$h = r^2\dot{\theta} \qquad 2^{\text{ος}} \text{ νόμος του Kepler} \tag{1.14}$$

Επειδή όμως η γωνιακή ορμή είναι σταθερή, η παραπάνω σχέση αποτελεί έκφραση του δεύτερου νόμου του Kepler που επιβάλει ότι το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ σαρώνει ίσες επιφάνειες στην πάροδο ίσων χρόνων κίνηση. Όπως φαίνεται από την παραπάνω ανάλυση ο δεύτερος νόμος του Kepler είναι απλά η διατήρηση της γωνιακής ορμής για αδιατάρακτη κίνηση.

1.2.2 Εκκεντρότητα κίνησης

Το διάνυσμα της γωνιακής ορμής, $\vec{h}$, είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{r}$ και $\dot{\vec{r}}$, ενώ και το διάνυσμα, $\vec{h} \times \dot{\vec{r}}$, βρίσκεται στο επίπεδο τροχιάς και για $\vec{\alpha}_d = 0$, έχουμε, $\dot{\vec{h}} = 0$, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \right) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} \tag{1.15}$$

Η παραπάνω σχέση με την εξίσωση κίνησης και τον ορισμό της γωνιακής ορμής γίνεται

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \right) = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \tag{1.16}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right)\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}$, από τον διανυσματικό λογισμό, τον ορισμό του διανύσματος θέσης $\vec{r}$, και την Εξ. (1.12) στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \right) = \frac{\mu}{r^2}\left(r\,\dot{\vec{r}} - \dot{r}\,\vec{r} \right) = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \tag{1.17}$$

Δηλαδή

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{\mathbf{c}} = \text{const.} \tag{1.18}$$

Το εσωτερικό γινόμενου σταθερού διανύσματος $\vec{c}$ με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, λαμβάνοντας υπ’ όψη την ταυτότητα $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\ \text{x}\ \vec{C}\right) = \vec{C}\cdot\left(\vec{A}\ \text{X}\ \vec{B}\right)$, είναι

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{r}} \cdot \left[\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} - \mu(\vec{\mathbf{r}}/r)\right] = h^2 - \mu\ r \tag{1.19}$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}\cdot\vec{c} = r|\vec{c}|\cos\left(\widehat{\vec{r},\vec{c}}\right)$, δηλαδή το μήκος της ακτίνας τροχιάς, είναι

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{|\vec{c}|}{\mu}\cos\left(\widehat{\vec{r},\vec{c}}\right)} \qquad 1^{\text{ος}} \text{ νόμος του Kepler} \tag{1.20}$$

Η παραπάνω σχέση όμως περιγράφει τις κωνικές τομές που είναι η έκφραση του πρώτου νόμου του Kepler που επιβάλει ότι: “*Η τροχιά της σχετικής κίνησης μεταξύ δυο σωμάτων είναι ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική*”.

Το μέγεθος της γωνιακής ορμής μπορεί να εκφρασθεί ως πολλαπλάσιο του συντελεστή βαρύτητας

$$h^2 = \mu\cdot p \tag{1.21}$$

Επί πλέον, επειδή το διάνυσμα θέσης ελλειπτικής παραβολικής ή υπερβολικής τροχιάς είναι

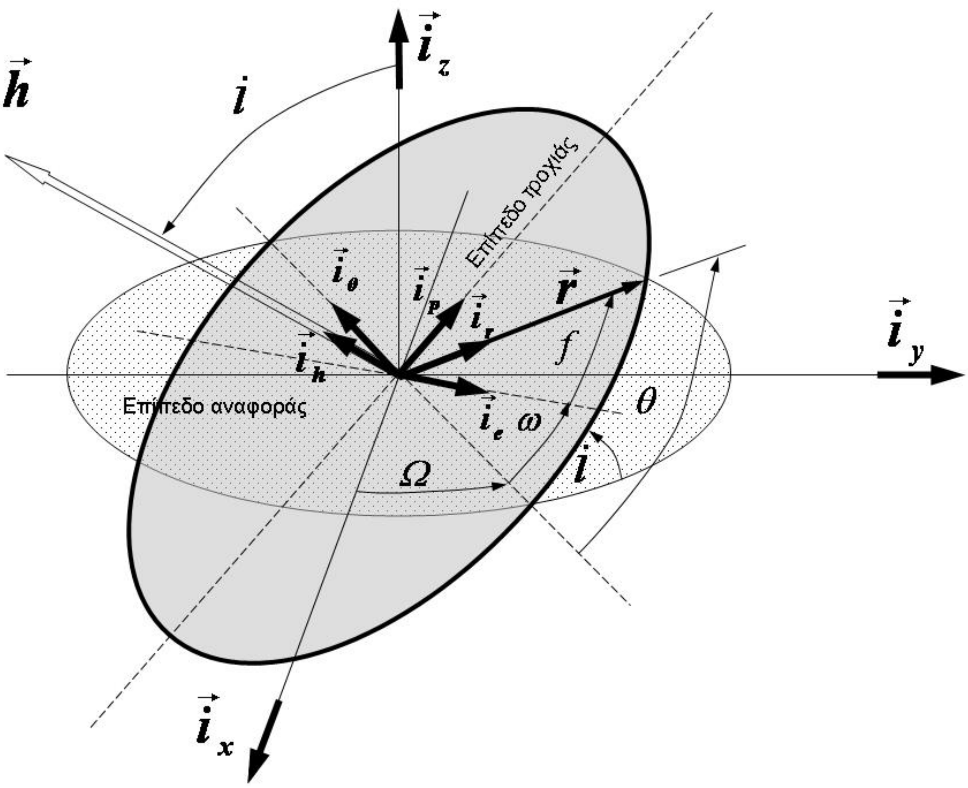
$$r = \frac{P}{1 + e\ \cos f}$$

όπου e είναι η εκκεντρότητα .

Το σταθερό διάνυσμα $\vec{c}$ που ονομάζεται εκκεντρότητα και είναι

$$\vec{c} = \mu\ e\ \vec{i}_e \tag{1.22}$$

Οι παραπάνω ορισμοί κατά τα μοναδιαία διανύσματα απεικονίζονται στο Σχ. 1.3.



Σχήμα 1.3 Ορισμοί διανυσμάτων στα επίπεδα αναφοράς και τροχιάς.

Ο προσανατολισμός του επιπέδου τροχιάς με μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης $\left(\vec{i}_e, \vec{i}_p, \vec{i}_h\right)$σχετικά με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς με μοναδιαία διανύσματα αναφοράς $\left(\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z\right)$εκφράζεται μ τις γωνίες Euler Ω (που σχηματίζει η προβολή του άξονα με διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{i}_e$ με τον άξονα $\vec{i}_x$), την δίεδρη γωνία κλίσης των δυο επιπέδων i και την γωνία ω που σχηματίζει ο άξονας με διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{i}_e$ με την ευθεία τομής των δυο επιπέδων.

1.3 Διατήρηση της ενέργειας

Το σύστημα των δυο σωμάτων σε σχετική κίνηση είναι συντηρητικό (conservative) διότι η μόνη δύναμη που ενεργεί είναι η βαρύτητα. Συνεπώς το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας ισχύει και για την σχετική κίνηση όπως θα δείξουμε παρακάτω, δεδομένου ότι $\vec{\alpha}_d = 0$.

Η ολική κινητική ενέργεια της μάζας m_1 είναι

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 \tag{1.23}$$

και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι

$$\dot{T} = \frac{1}{2} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_1 \tag{1.24}$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση σχετικού δυναμικού ενέργειας βαρύτητας που ορίσθηκε στην Εξ. (1.18) έχουμε

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.25}$$

αλλά $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\ \vec{i}_r + r\ \dot{\theta}\ \vec{i}_\theta$ και $\vec{r} = r\ \vec{i}_r$ οπότε

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{\vec{r}}\left(r\ \vec{i}_r\right)\cdot\left(\dot{r}\ \vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{r}\ \dot{\vec{r}} \tag{1.26}$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = -\ \frac{dV}{dt} \tag{1.27}$$

Δηλαδή η ολική ενέργεια διατηρείται κατά την κίνηση

$$\frac{1}{2}\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + V = const \tag{1.28}$$

Αλλά $V(r) = \mu / r$ και με τον ορισμό της σταθεράς ολοκλήρωσης $const = \alpha / 2$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r} + \frac{\alpha}{2} \tag{1.29}$$

Η ποσότητα $1/2\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ είναι η σχετική κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του σώματος μάζας m_2 ως προς το σώμα μάζας m_1. Η ποσότητα μ / r αναπαριστά μια συνάρτηση δυναμικού ανά μονάδα μάζας. Για την ειδική περίπτωση όπου $m_2 << m_1$ (δηλαδή m_2 είναι κάποιος δορυφόρος) η παραπάνω ποσότητα σχετίζεται με την κλασική συνάρτηση δυναμικού $V(r)$ με την σχέση :

$$-\frac{\mu}{r} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r} \approx -\frac{Gm_1}{r} = \frac{V(r)}{m_2} \tag{1.30}$$

Στην παραπάνω προσέγγιση το σώμα μάζας m_1 είναι αδρανειακά σταθερό και η κίνηση του σώματος με μικρή μάζα m_2 προξενεί απειροελάχιστη επιτάχυνση στα σώμα μάζας m_1.

1.3. Κλασσικές Λύσεις

Η διατήρηση της ενέργειας και γωνιακής ορμής και οι στοιχειώδεις λύσεις των εξισώσεων κίνησης που αναπτύξαμε προηγουμένως χρησιμοποιούνται σ' αυτό το κεφάλαιο για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σώματος πάνω στην τροχιά που εκτελεί για κάθε χρονική στιγμή.

1.3.1 Οι εξισώσεις του Kepler

Θεωρούμε ότι η επιτάχυνση διαταραχής $\vec{\mathbf{a}}_d$ είναι μηδενική οπότε $\dot{\theta} = \dot{f}$ (όπου η γωνία $\dot{f}$ ορίζεται στο Σχ. 1.3). Τότε σύμφωνα με την Εξ. (1.4) έχουμε

$$h = r^2\,\dot{\theta} = r^2\,\dot{f} \tag{1.31}$$

ή

$$h\;dt = r^2\,df \tag{1.32}$$

αλλά $r = p/(1+e\cos f)$ και η γωνιακή ταχύτητα σύμφωνα με την Εξ. (1.21) είναι $h^2 = \mu\,p$ οπότε

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,dt = \frac{df}{\left(1+e\cos f\right)^2} \tag{1.32}$$

Δηλαδή

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^2}}\left(t_1 - t_o\right) = \int_{t_o}^{t_1} \frac{dt}{\left(1+e\cos f\right)^2} \tag{1.33}$$

Το ολοκλήρωμα της Εξ. (1.33) είναι όμως δύσκολο να υπολογισθεί αναλυτικά. Η αναλυτική ολοκλήρωση της Εξ. (1.33) καθίσταται δυνατή όταν εκφράσουμε την μεταβλητή f μέσω της εκκεντρότητας E.

Θεωρούμε και πάλι το διάνυσμα γωνιακής ορμής.

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}$$

που είναι προσαρτημένο στο αδρανειακό σύστημα. Όταν το διάνυσμα $\vec{\alpha}_d = 0$

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και το διάνυσμα ταχύτητας $\dot{\vec{r}}$ εκφράζονται με τις συντεταγμένες τους στο αδρανειακό σύστημα

$$\vec{\mathbf{r}} = x\ \vec{\mathbf{i}}_e + y\ \vec{\mathbf{i}}_p$$
$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \dot{x}\ \vec{\mathbf{i}}_e + \dot{y}\ \vec{\mathbf{i}}_p \tag{1.34}$$

δηλαδή

$$\vec{h} = (x\ \dot{y} - y\ \dot{x})\,\vec{i}_h = h\ \vec{i}_h \tag{1.35}$$

όπου οι τιμές $x(E)$ και $y(E)$ μπορεί να βρεθούν από την αναλυτική γεωμετρία κωνικών τομών.

$$h = a^2\sqrt{1-e^2}\ \left(\cos^2 E + \sin^2 E - e\cos E\right)\frac{dE}{dt} \tag{1.36}$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (1.36) στην διαφορική εξίσωση, Εξ. (1.32) έχουμε :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ dt = (1 - e\cos E)dE \tag{1.37}$$

ή

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ \frac{1}{1 - e\ \cos E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \tag{1.38}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η εξίσωση του Kepler

$$\sqrt{\frac{\mu}{\alpha^3}}\ \left(t_1 - t_o\right) = \left(E - e\ \sin E\right)\Big|_{E_o}^{E_1} \tag{1.39}$$

Η εξίσωση του Kepler λύνεται αριθμητικά με την μέθοδο του Newton ως προς την τελική εκκεντρικότητα E_1 δεδομένου του αρχικού και τελικού χρόνου t_o και t_1 και της αρχικής εκκεντρότητας E_1. Όταν θεωρήσουμε $t_o = 0$ και $E_1 = 2\pi$ βρίσκουμε την περίοδο από την εξίσωση του Kepler.

2. Εξισώσεις – Κίνησης Τριών Σωμάτων

2.1 Εισαγωγή

Το γενικό πρόβλημα κίνησης τριών σωμάτων, αντίθετα με το πρόβλημα δυο σωμάτων, δεν έχει αναλυτική λύση λόγω της μεγαλύτερης πολυπλοκότητας. Κλασικό παράδειγμα κίνησης τριών σωμάτων είναι το σύστημα γη- σελήνη-ήλιος. Όπως είναι γνωστό η σελήνη εκτελεί περίπου ελλειπτική τροχιά γύρω από την γη οι δε παρεκκλίσεις από την τέλεια ελλειπτική τροχιά οφείλονται στο πεδίο βαρύτητας του ηλίου. Η λύση του προβλήματος κίνησης τριών σωμάτων επετεύχθη από τον Lagrange το 1772. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια το ειδικό πρόβλημα που δυο σφαιρικά σώματα εκτελούν κυκλική ή ελλειπτική τροχιά ενώ ένα τρίτο σώμα πολύ μικρότερης μάζας, παραδείγματος χάριν κάποιος δορυφόρος ή διαστημικό όχημα, κινείται μεταξύ αυτών.

2.2. Το πρόβλημα κίνησης τριών σωμάτων κατά Lagrange

Ο Lagrange (1772) απέδειξε ότι είναι δυνατόν να βρεθεί μια ευσταθής (ανεξάρτητη του χρόνου) λύση στο πρόβλημα κίνησης τριών σωμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε πρώτα το γενικό πρόβλημα που η λύση μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο. Κατόπιν, θα διαπραγματευθούμε το ειδικό πρόβλημα που δεν υπάρχει εξάρτηση από τον χρόνο. Υποτίθεται αρχικά ότι η μάζα κάθε σώματος είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε να επηρεάζει την κίνηση των άλλων σωμάτων.

Έστω ότι τα διανύσματα θέσης τριών σωμάτων (δες Σχ. 2.1) μάζας m_1, m_2, m_3 είναι $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, αντίστοιχα.

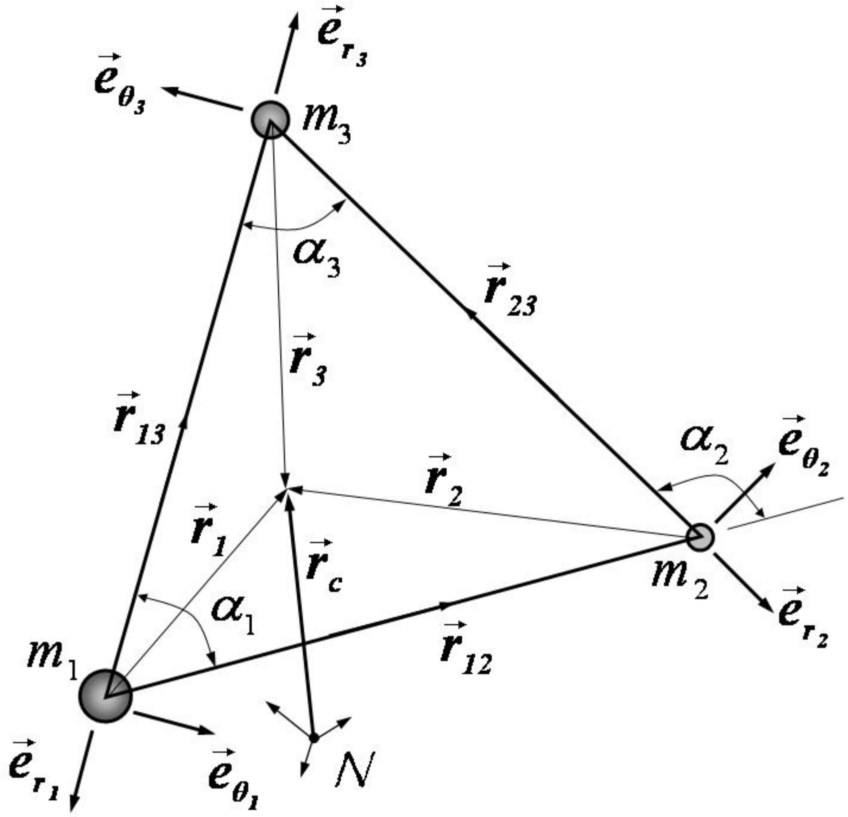
Υπό την απουσία εξωτερικών δυνάμεων έχουμε :

$$M\,\ddot{\vec{r}}_c = F_{extrernal} = 0 \tag{2.1}$$

όπου M είναι η συνολική μάζα που ορίζεται ως :

$$M = m_1 + m_2 + m_3 \tag{2.2}$$

και $\vec{r}_c$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου της μάζας του συστήματος από την αρχή του αδρανειακού συστήματος N. Από την Εξ. (2.1) συμπεραίνουμε ότι $\ddot{\vec{r}}_c = 0$ δηλαδή το κέντρο μάζας του συστήματος εκτελεί ευθύγραμμη τροχιά με σταθερή ταχύτητα. Συνεπώς, το κέντρο μάζας μπορεί να θεωρηθεί αρχή του αδρανειακού συστήματος. Οπότε οι εξισώσεις κίνησης είναι :



Σχήμα .2.1 Ορισμοί προβλήματος κίνησης τριών σωμάτων

$$m_1\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_i = G\sum_{j=1}^{3}\frac{m_1 m_j}{r_{ij}^3}\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{ij}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} \qquad i = 1,2,3\ ,\ i \neq j \tag{2.3}$$

όπου $\vec{F}_i$ είναι η συνολική δύναμη επί της μάζας m_i, G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και $\vec{r}_{ij}$ είναι το διάνυσμα θέσης που ορίζεται ως :

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \tag{2.4}$$

και η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι :

$$r_{ij} = r_{ji} = \sqrt{\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_{ji}} \tag{2.5}$$

Τα διανύσματα θέσης ορίζονται όμως σε σχέση με το κέντρο μάζας συνεπώς

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0 \tag{2.6}$$

Η παραπάνω σχέση με τον ορισμό της συνολικής μάζας από την Εξ. (2.2) γράφεται ως :

$$\begin{aligned} M\,\vec{r}_1 &= -\left(m_2\vec{r}_{12} + m_3\vec{r}_{13}\right) \\ M\,\vec{r}_2 &= \left(m_1\vec{r}_{12} - m_3\vec{r}_{23}\right) \\ M\,\vec{r}_3 &= \left(m_1\vec{r}_{13} + m_2\vec{r}_{23}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δυο μέλη των παραπάνω σχέσεων βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} M^2\,r_1^2 &= m_2^2\,r_{12}^2 + m_3^2\,r_{13}^2 + 2m_2\,m_3\,\vec{r}_{12}\cdot\cdot\vec{r}_{13} \\ M^2\,r_2^2 &= m_1^2\,r_{12}^2 + m_3^2\,r_{23}^2 - 2m_1\,m_3\,\vec{r}_{12}\cdot\vec{r}_{23} \\ M^2\,r_3^2 &= m_1^2\,r_{13}^2 + m_2^2\,r_{23}^2 + 2m_1\,m_2\,\vec{r}_{13}\cdot\vec{r}_{23} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ο Lagrange αναζήτησε λύσεις του παραπάνω προβλήματος που δεν αλλάζουν τον αρχικό σχηματισμό των τριών σωμάτων, δηλαδή λύσεις για τις οποίες οι σχετικές αποστάσεις $\vec{r}_{12}, \vec{r}_{23}$ και $\vec{r}_{13}$ παραμένουν αναλλοίωτες, ή μεταβάλλονται με τον ίδιο συντελεστή αναλογίας. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι

$$\frac{r_{12}}{r_{12_o}} = \frac{r_{13}}{r_{13_o}} = \frac{r_{23}}{r_{23_o}} = f(t) \tag{2.9}$$

Όπου $f(t)$ είναι κάποια συνάρτηση του χρόνου. Επειδή όμως υποθέσαμε ότι ο σχηματισμός παραμένει αναλλοίωτος, οι γωνίες α_i είναι σταθερές, δηλαδή

$$M^2\,r_1^2 = f^2(t)\left[m_2^2\,r_{12_o}^2 + m_3^2\,r_{13_o}^2 + 2m_2m_3r_{12_o}r_{13_o}\cos a_1\right] \tag{2.10}$$

Θεωρώντας επί πλέον ότι $f(0)=1$ βρίσκουμε

$$r_{10} = \frac{\left[m_2^2\,r_{12_o}^2 + m_3^2\,r_{13_o}^2 + 2m_2m_3r_{12_o}r_{13_o}\cos a_1\right]^{1/2}}{M} \tag{2.11}$$

Από τις Εξ. (2.10) και (2.11) έχουμε :

$$r_1(t) = r_{1_0} f(t) \tag{2.12}$$

Δηλαδή η ακτινική απόσταση του κέντρου μάζας μεταβάλλεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως οι σχετικές αποστάσεις. Παρόμοια βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} r_2(t) &= r_{2_o} f(t) \\ r_3(t) &= r_{3_o} f(t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ο όλος σχηματισμός παραμένει αναλλοίωτος δηλαδή οι γωνιακές ταχύτητες είναι ίσες

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \vec{\omega} = \omega \, \vec{e}_3 \tag{2.15}$$

Το διάνυσμα γωνιακής ορμής του συστήματος τριών σωμάτων γύρω από το κέντρο μάζας είναι επίσης σταθερό

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \ x \ m_i \, \dot{\vec{r}}_i = \text{const} \tag{2.16}$$

Επειδή όμως $\vec{H} = \text{const.}$, ορίζουμε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $\vec{H}$. Αν ακόμη θεωρήσουμε ότι όλα τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας βρίσκονται αρχικά πάνω σ' αυτό το επίπεδο θα πρέπει να παραμένουν σ' αυτό καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης, επειδή όλες οι δυνάμεις βρίσκονται πάνω σ' αυτό το επίπεδο. Δηλαδή, το πρόβλημα περιορίσθηκε σ' ένα επίπεδο πρόβλημα αντί για ένα πρόβλημα στον χώρο. Τα διανύσματα θέσης ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούν να εκφρασθούν ως

$$\vec{r}_i = r_i \, \vec{\mathbf{e}}_{r_i} \tag{2.17}$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{r}_i \, \vec{\mathbf{e}}_{r_i} + r_i \, \omega \, \vec{\mathbf{e}}_{\theta_i} \tag{2.18}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = \left(\ddot{r}_i - r_i \omega^2\right) \vec{\mathbf{e}}_{r_i} + \left(2 \, \dot{r}_i \, \omega + r_i \, \dot{\omega}\right) \vec{\mathbf{e}}_{\theta_i} \tag{2.19}$$

οπότε η γωνιακή ορμή είναι :

$$\vec{\mathbf{H}} = \sum_{i-1}^{3} \left(m_i \ r_{i_o}^2\right) f^2 \omega \ \vec{\mathbf{e}}_3 \tag{2.20}$$

αλλά το διάνυσμα $\vec{H}$ είναι σταθερό, δηλαδή το γινόμενο $f^2(t)\,\omega(t)$ είναι επίσης σταθερό και επειδή η γωνιακή ορμή του κάθε σώματος είναι

$$\vec{\mathbf{H}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \times m_i \ \dot{\vec{\mathbf{r}}}_\mathbf{i} = m_i \ r_{i_o}^2 \ f^2 \ \omega \ \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \tag{2.21}$$

η γωνιακή ορμή κάθε μάζας είναι επίσης σταθερή, δηλαδή

$$\dot{\vec{H}}_i = r_i \times m_i \ \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \vec{F} = 0 \tag{2.22}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι τα διανύσματα της επιτάχυνσης $\ddot{\vec{r}}_i$ και της δύναμης $\vec{F}_i$ είναι παράλληλα στο ακτινικό διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης.

Η συνθήκη που πρέπει να πληρούνται ώστε ο σχηματισμός να παραμένει σταθερός είναι ότι η δύναμη $\vec{F}_i$ πάνω σε κάθε μάζα πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας δηλαδή

$$\vec{F}_i = F_i \ \vec{e}_{r_i} \tag{2.23}$$

Η εξίσωση κίνησης Εξ. (2.3) με τις Εξ. (2.19) και (2.23) γράφεται ως :

$$F_i = m_i \left(\ddot{r}_i - r_i \ \omega^2\right) \tag{2.24}$$

που με την βοήθεια των Εξ. (2.12 – 2.14) είναι :

$$\frac{F_I}{m_i} = \ddot{f} \ r_{i_o} - r_i \ \omega^2 = r_i \left(\frac{\ddot{f}}{f} - \omega^2\right) \tag{2.25}$$

ή

$$\frac{F_i}{m_i r_i} = \frac{\ddot{f}}{f} - \omega^2 = A(t) \tag{2.26}$$

ή

$$F_i(t) = A(t) r_i(t) m_i \tag{2.27}$$

αλλά η Εξ. (2.22) ισχύει όταν $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = 0$ και από την Εξ. (2.3) για $i = 1$ έχουμε

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} \times \left(m_2 \frac{\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{3}}}{r_{13}^3} \right) = 0 \tag{2.28}$$

Η παραπάνω σχέση με την χρήση του ορισμού του κέντρου μάζας

$$m_3\ \vec{r}_3 = -m_1\ \vec{r}_1 - m_2\ \vec{r}_2 \tag{2.29}$$

γράφεται ως

$$m_2\ \vec{r}_1\ x\ \vec{r}_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^2} \right) = 0 \tag{2.30}$$

και ανάλογα

$$m_1\ \vec{r}_2\ x\ \vec{r}_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{12}^3} \right) = 0 \tag{2.31}$$

$$m_3\ \vec{r}_3\ x\ \vec{r}_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) = 0 \tag{2.32}$$

Ακολουθώντας την παραπάνω ανάλυση ο Lagrange απέδειξε ότι υπάρχουν δυο διατάξεις που ικανοποιούν τις Εξ. (2.30) – (2.32). Η πρώτη είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και η δεύτερη η ευθεία.

Για το ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει :

$$r_{12} = r_{23} = r_{13} = \rho \tag{2.33}$$

ενώ για την ευθεία

$$\vec{r}_1\ x\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2\ x\ \vec{r}_3 = \vec{r}_3\ x\ \vec{r}_1 = 0 \tag{2.34}$$

2.2.1 Λύση ισόπλευρου τριγώνου

Υποτίθεται ότι τα τρία σώματα (π.χ. γη–σελήνη–δορυφόρος) των οποίων μελετούμε την κίνηση σχηματίζουν διάταξη ισόπλευρου τρίγωνου που περιστρέφεται με κάποια γωνιακή ταχύτητα την οποία θα υπολογίσουμε. Υποτίθεται ακόμα ότι και το μέγεθος του ισόπλευρου τριγώνου είναι μεταβλητό.

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1}{\rho^3}\left(m_2 \vec{r}_{12} + m_3 \vec{r}_{13}\right)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_2}{\rho^3}\left(-m_1 \vec{r}_{13} + m_3 \vec{r}_{23}\right) \tag{2.35}$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -\frac{Gm_3}{\rho^3}\left(m_1 \vec{r}_{13} + m_2 \vec{r}_{23}\right)$$

Οι παραπάνω σχέσεις με την χρήση του ορισμού του κέντρου μάζας γράφονται στην παρακάτω μορφή.

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{GM}{\rho^3} \mathbf{r_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.36}$$

Η ειδική μορφή των Εξ. (2.35) για $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^o$ και για $\alpha_3 = 120^o$ (δες Εξ. 2.8) είναι :

$$\ddot{\vec{r}}_i + \frac{GM}{r_i^3}\vec{r}_i = \ddot{\vec{r}}_i + \frac{\mu_i}{r_i^3}\vec{r}_i = 0 \tag{2.27}$$

όπου $\mu_i = GM_i$ και με ισοδύναμες μάζες M_i που ορίζονται ως

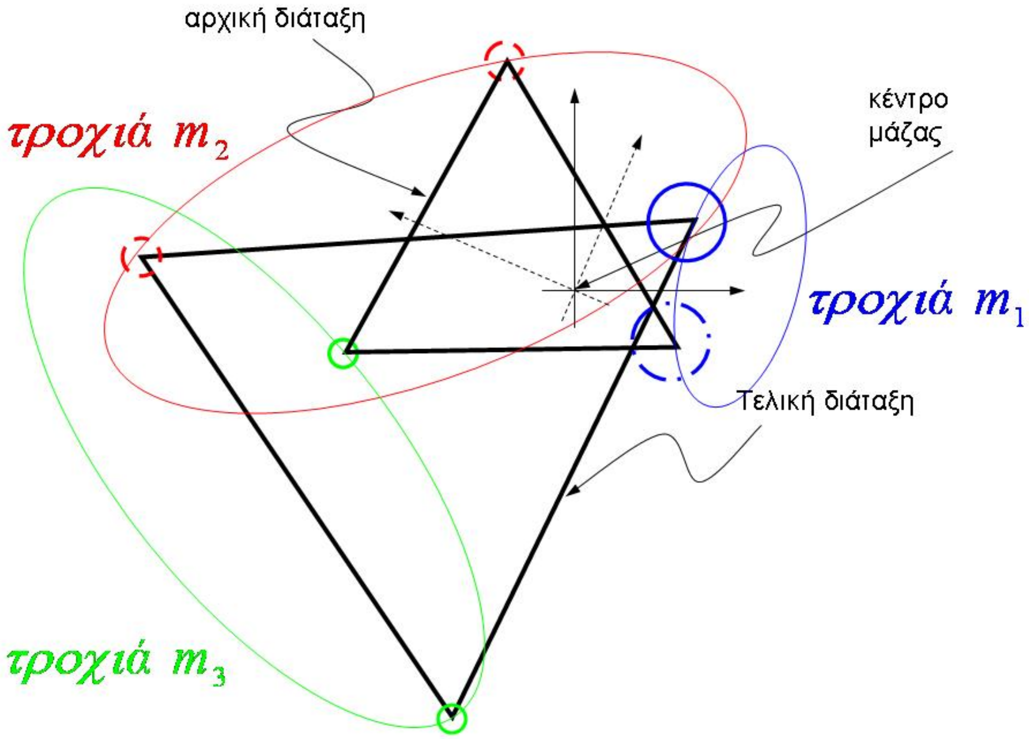
$$M_1 = \frac{1}{M_2}\left(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3\right)^{3/2} \tag{2.38}$$

$$M_2 = \frac{1}{M^2}\left(m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3\right)^{3/2} \tag{2.39}$$

$$M_3 = \frac{1}{M^2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2\right)^{3/2} \tag{2.40}$$

Παρατηρούμε όμως ότι οι εξισώσεις κίνησης τριών σωμάτων σε διάταξη ισόπλευρου τριγώνου Εξ. (2.37), έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις κίνησης δυο σωμάτων (Εξ. (1.6), $\ddot{\vec{r}} = -\mu\, \vec{r} / r^3$)). Δηλαδή η τροχιά κάθε σώματος m_i είναι εκείνη που προσδιορίζεται από την κίνηση δυο σωμάτων το ένα των οποίων έλκεται από μια ισοδύναμη μάζα M_i

που είναι τοποθετημένοι στο κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου. Το σχήμα των τροχιών (ελλειπτική παραβολική κ. λ. π.) εξαρτάται μόνο από την ενέργεια του συστήματος. Ελλειπτικές τροχιές σωμάτων σε διάταξη ισόπλευρου τριγώνου παρουσιάζονται στο Σχ. 2.2.



Σχήμα 2.2 Τροχιές σωμάτων σε διάταξη ισόπλευρου τριγώνου.

2.2.2 Λύση συγγραμμικής διάταξης

Η δεύτερη απλή λύση του συστήματος τριών σωμάτων είναι η διάταξη όπου τα τρία σώματα ορίζουν μια ευθεία. Τα διανύσματα θέσης δίνονται τότε από

$$\vec{r}_i = x_i\ \vec{e}_r \qquad i = 1,2,3 \tag{2.41}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης (2.3) και τις Εξ. (2.23) και (2.27) βρίσκουμε ότι οι δυνάμεις είναι :

$$F_1 = A\,x_1 m_1 = m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + m_1 m_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} \tag{2.42}$$

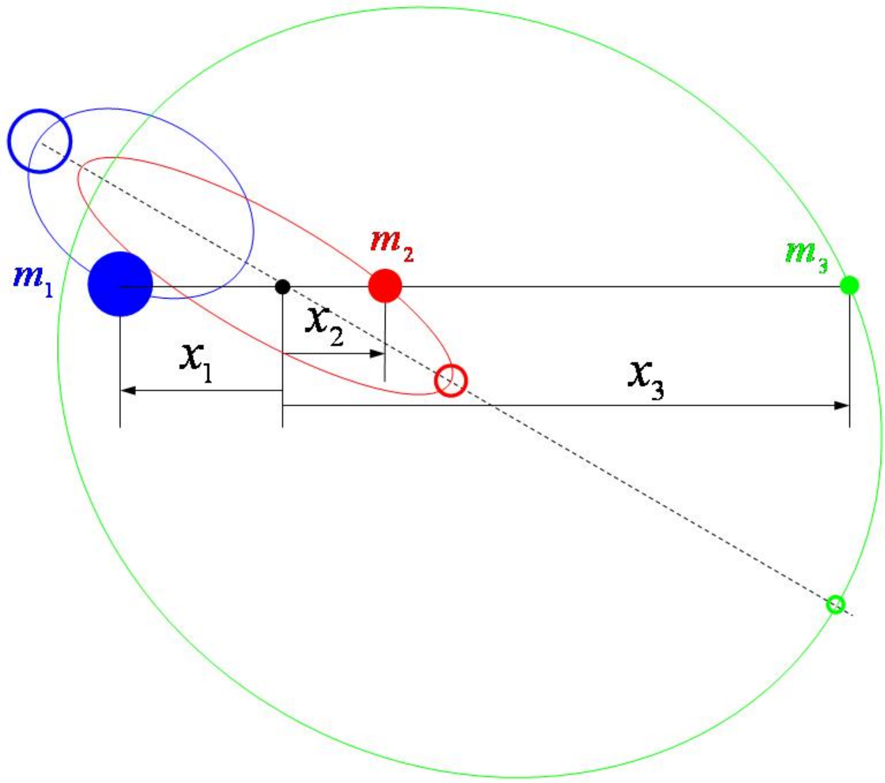
$$F_2 = A\ x_2\ m_2 = m_2 m_3 \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} - m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} \tag{2.43}$$

$$F_3 = A\, x_3 m_3 = -m_1 m_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} - m_2 m_3 \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} \tag{2.44}$$

όπου A είναι μια σταθερά και επειδή $r_1(t) = r_{1_0} f(t)$ έχουμε :

$$F_i = \frac{\cos t}{f^2} \tag{2.45}$$

Δηλαδή οι τροχιές είναι ελλειπτικές, παραβολικές, ή υπερβολικές.



Σχήμα 2.3 Ελλειπτικές τροχιές τριών σωμάτων σε ευθεία διάταξη.

Η λύση των Εξ. (2.42) – (2.44) παρουσιάζεται για την διάταξη 123 του Σχ. 2.3. Η σχετική απόσταση των σωμάτων εκφράζεται ως συνάρτηση της παραμέτρου ξ που ορίζεται ως.

$$\xi = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_{32}}{x_{12}} \tag{2.46}$$

οπότε

$$\frac{x_{13}}{x_{12}} = 1 + \xi \qquad (2.47)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι όταν μια από τις αποστάσεις x_{12}, x_{13}, ή x_{23} είναι γνωστή τότε η παράμετρος ξ καθορίζει την κατάσταση του συστήματος. Αφαιρώντας την Εξ. (2.49) – (2.43) και (2.43) – (2.44) βρίσκουμε :

$$Ax_{12} = -\frac{m_1 + m_2}{x_{12}^2} + m_3\left(\frac{1}{x_{23}^2} - \frac{1}{x_{13}^2}\right) \qquad (2.48)$$

$$A\ x_{23} = -\frac{m_2 + m_3}{x_{23}^2} + m_1\left(\frac{1}{x_{12}^2} - \frac{1}{x_{13}^2}\right) \qquad (2.49)$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζονται ως συνάρτηση της παραμέτρου ξ ως ακολούθως :

$$A\ x_{12}^3 = -\left(m_1 + m_2\right) + m_3\left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\left(1+\xi\right)^2}\right) \qquad (2.50)$$

$$A\ x_{12}^3 = -\left(m_1 + m_2\right)\frac{1}{\xi^3} + m_1\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi\left(1+\xi\right)^2}\right) \qquad (2.51)$$

και η λύση τους είναι οι ρίζες του παρακάτω πολυωνύμου πέμπτου βαθμού

$$\begin{gathered}\left(m_1 + m_2\right)\xi^5 + \left(3m_1 + 2m_2\right)\xi^4 + \left(3m_1 + m_2\right)\xi^3 - \\ -\left(m_2 + 3m_3\right)\xi^2 - \left(2m_2 + 3m_3\right)\xi - \left(m_2 + m_3\right) = 0\end{gathered} \qquad (2.52)$$

Μόνο μια από τις ρίζες του πολυωνύμου είναι θετική ενώ οι άλλες ρίζες απορρίπτονται ως μη φυσικά δυνατές.

2.3 Κυκλικές τροχιές

Η ειδική περίπτωση κυκλικής τροχιάς συνεπάγεται ότι το μέγεθος των πλευρών του ισόπλευρου τριγώνου παραμένει σταθερό και ότι όλες οι κυκλικές τροχιές πρέπει να έχουν την ίδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Οι τρεις τροχιές βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και το κέντρο του συστήματος είναι το κέντρο μάζας. Το διάνυσμα θέσης κάθε τροχιάς είναι σταθερό και ίσο με την ακτίνα r_i της κυκλικής τροχιάς ενώ η ελκτική δύναμη βαρύτητας είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$F_i = -m_i \; r_i \; \omega^2 \tag{2.53}$$

Οι εξισώσεις κίνησης για κυκλική τροχιά είναι ένα αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει από την αντικατάσταση της Εξ. (2.53) και τους ορισμούς κέντρου μάζας, Εξ. (2.26) στην Εξ. (2.3).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\omega^2}{G} - \dfrac{m_2}{r_{12}^2} - \dfrac{m_3}{r_{13}^2} & \dfrac{m_2}{r_{12}^2} & \dfrac{m_3}{r_{13}^2} \\ \dfrac{m_1}{r_{12}^2} & \dfrac{\omega^2}{G} - \dfrac{m_1}{r_{12}^2} - \dfrac{m_3}{r_{23}^2} & \dfrac{m_3}{r_{23}^2} \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση όταν η διακρίνουσα είναι μηδενική $[B]=0$. Στην διάταξη ισόπλευρου τριγώνου $r_{12} = r_{13} = r_{23} = \rho$ και η συνθήκη $[B]=0$ είναι :

$$m_3 \left(\frac{\omega^2}{G} - \frac{M}{\rho^3} \right) = 0 \tag{2.55}$$

Δηλαδή η αναγκαία συνθήκη για κυκλική τροχιά σωμάτων σε διάταξη ισόπλευρου τριγώνου είναι :

$$\rho^3 \; \omega^2 = G \; M \tag{2.56}$$

Η περίοδος των κυκλικών τροχιών είναι :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^3}{GM}} \tag{2.57}$$

Η συνθήκη κυκλικής τροχιάς συγγραμμικών σωμάτων βρίσκεται ως ακολούθως. Τα διανύσματα θέσης γράφονται ως :

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_r$$

$$\vec{r}_2 = \left(x_1 + x_2\right)\vec{e}_r \tag{2.58}$$

$$\vec{r}_3 = \left(x_1 + x_{12} + x_{23}\right)\vec{e}_r$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.58) στην Εξ. (2.54) βρίσκουμε :

$$\frac{\omega^2}{G}x_1 + \frac{m_2}{x_{12}^2} + \frac{m_3}{\left(x_{12} + x_{23}\right)^2} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{G}\left(x_{12} + x_1\right) - \frac{m_1}{x_{12}^2} + \frac{m_3}{x_{23}^2} = 0 \tag{2.59}$$

$$Mx_1 + m_2x_{12} + m_3\left(x_{12} + x_{23}\right) = 0$$

Εισάγοντας την παράμετρο ξ στις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

$$\frac{\omega^2}{G}x_{12}^2x_1 + m_2 + \frac{m_3}{\left(1+\xi\right)^2} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{G}x_{12}^2\left(x_{12} + x_1\right) - m_1 + \frac{m_3}{\xi^2} = 0 \tag{2.60}$$

$$\frac{M}{x_{12}}x_1 + m_2 + \left(1+\xi\right)m_3 = 0$$

αλλά η απόσταση x_{12} είναι σταθερή οπότε η γωνιακή ταχύτητα είναι :

$$\omega^2 = \frac{GM}{x_{12}^2\left(1+\xi\right)^2}\frac{m_2\left(1+x\right)^2 + m_3}{m_2 + \left(1+\xi\right)m_3} \tag{2.61}$$

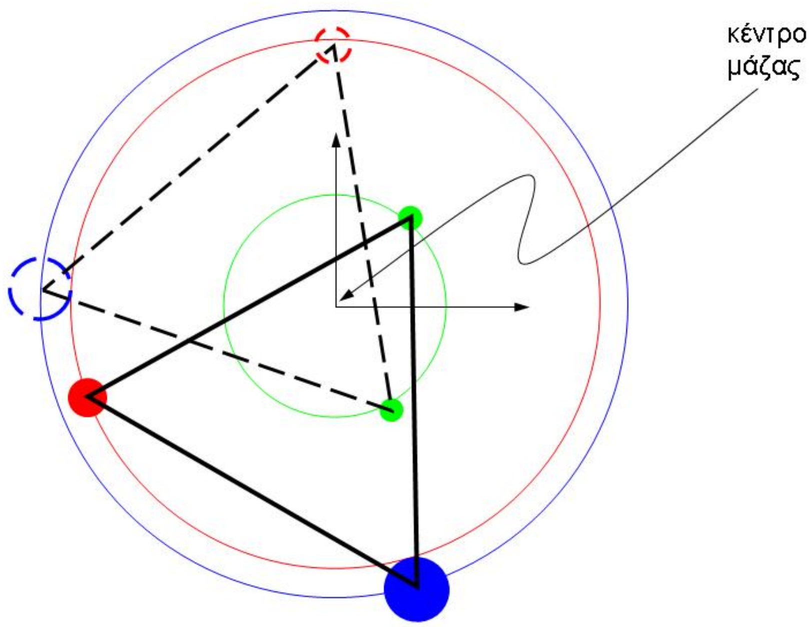
Η γωνιακή ταχύτητα κυκλικής τροχιάς δυο σωμάτων προκύπτει από την παραπάνω σχέση όταν $m_3 = 0$. Η περίοδος της κίνησης είναι :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{x_{12}^2\left(1+\xi\right)^2}{GM}\frac{m_2 + \left(1+\xi\right)m_3}{m_2\left(1+\xi\right)^2 + m_3}} \tag{2.62}$$

Η απόσταση x_1 της μάζας m_1 από το κέντρο μάζας βρίσκεται από την Εξ. (2.60) ως :

$$x_1 = -\frac{x_{12}}{M}\left[m_2 + \left(1+\xi\right)m_3\right] \tag{2.63}$$

Η κυκλική τροχιά φαίνεται στο Σχ. 2.4.

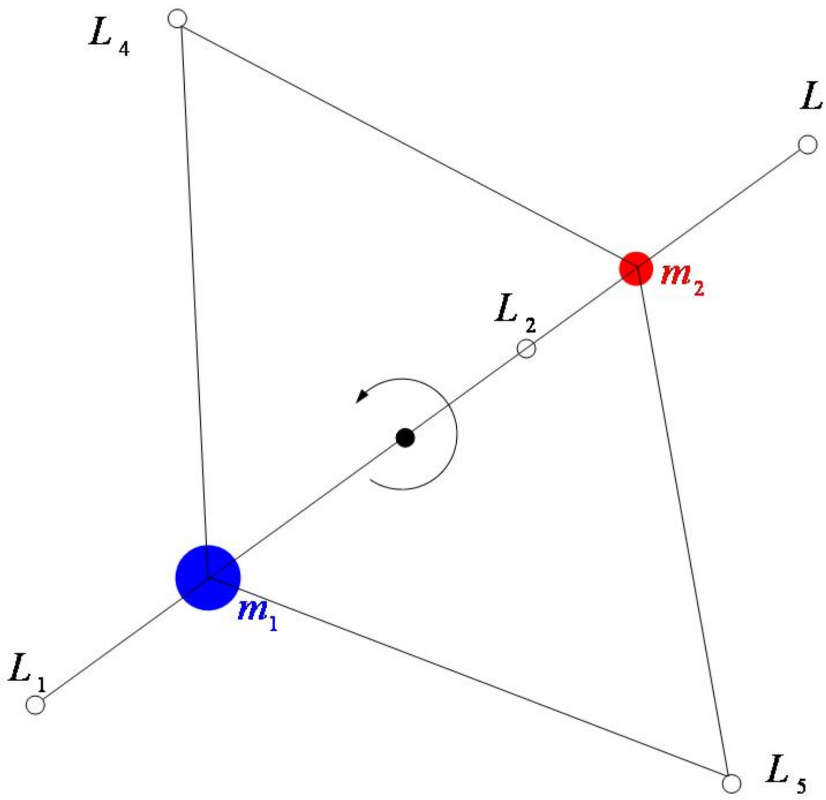


Σχήμα 2.4 Κυκλική τροχιά τριών σωμάτων σε διάταξη ισόπλευρου τριγώνου..

2.4 Λύση του περιορισμένου συστήματος τριών σωμάτων

Το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων αφορά την διάταξη (τριγωνική ή συγγραμμική) για την οποία τα δυο σώματα m_1 και m_2 έχουν πολύ μεγαλύτερη μάζα από το τρίτο σώμα m_3. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση του σώματος με μικρή μάζα m_3 που από δω και στο εξής συμβολίζεται με m, δεν επηρεάζει την κίνηση των σωμάτων με μάζα m_1 και m_2 που υποτίθεται ότι εκτελούν κυκλική τροχιά γύρω από το κέντρο μάζας. Οι παραπάνω προϋποθέσεις αποτελούν καλή προσέγγιση για την μελέτη της τροχιάς διαστημόπλοιων και δορυφόρων ή την κίνηση αστεροειδών που κινούνται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας της γης και του ήλιου.

Ο Lagrange απέδειξε, ότι για κυκλικές τροχιές σωμάτων γύρω από το κέντρο μάζας, υπάρχουν πέντε σημεία τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα όταν παρατηρούνται από το σύστημα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα τα πέντε αυτά σημεία απεικονίζονται στο Σχ. 2.5.



Σχήμα 2.5 Αναλλοίωτα σημεία Lagrange.

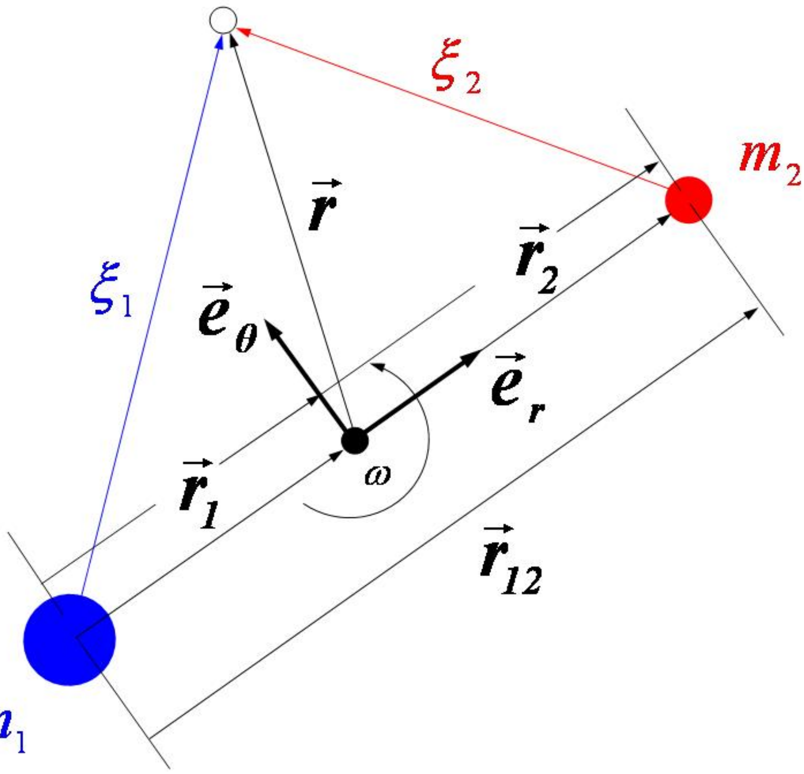
Οι εξισώσεις κίνησης της μικρής μάζας m σε σχέση με τις κυκλικές τροχιές των σωμάτων m_1 και m_2 αναπτύσσονται για ένα περιστρεφόμενο σύστημα αφοράς $F:\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_3\right)$ με αρχή το κέντρο μάζας όπως φαίνεται στο Σχ. 2.6.

Θεωρώντας ότι $m_3 << m_1, m_2$ και τις Εξ. (2.56) ή (2.61) βρίσκουμε στη σταθερή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος m_1, m_2 είναι :

$$\omega^2 = \frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r_{12}^2} \tag{2.64}$$

Δηλαδή $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ και το διάνυσμα θέσης είναι :

$$\vec{r} = r_x\ \vec{e}_x + r_y\ \vec{e}_\theta + r_z\ \vec{e}_3$$



Σχήμα 2.6 Ορισμοί του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων.

Οι μάζες m_1 και m_2 εκτελούν κίνηση στο επίπεδο αναφοράς ενώ η μάζα m μπορεί να κινείται στο επίπεδο τροχιάς ή κάθετα σ' αυτό. Το διάνυσμα επιτάχυνσης είναι

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r}_x - 2\dot{r}_y\,\omega - r_x\,\omega^2\right)\vec{e}_r + \left(\ddot{r}_y + 2\dot{r}_x\omega - r_y\,\omega^2\right)\vec{e}_\theta + \ddot{r}_2\,\vec{e}_3 \tag{2.66}$$

Η δύναμη της βαρύτητας στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς F είναι

$$\vec{F} = -G\begin{Bmatrix} \dfrac{m_1}{\xi_1^2}\left(r_x - r_1\right) + \dfrac{m_2}{\xi_2^2}\left(r_x - r_2\right) \\ \left(\dfrac{m_1}{\xi_1^3} + \dfrac{m_2}{\xi_2^2}\right) r_y \\ \left(\dfrac{m_1}{\xi_1^3} + \dfrac{m_2}{\xi_2^3}\right) r_z \end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

όπου οι σχετικές αποστάσεις ξ_1 και ξ_2 δίνονται από την σχέση

$$\xi_i = \sqrt{\left(r_x - r_2\right)^2 + r_y^2 + r_2^2} \tag{2.68}$$

Με τους παραπάνω ορισμούς οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι

$$\ddot{r}_x - 2\omega\dot{r}_y - \omega^2 r_x + G\left(\frac{m_1}{\xi_1^3}\left(r_x - r_1\right) + \frac{m_2}{\xi_2^3}\left(r_x - r_2\right)\right) = 0$$

$$\ddot{r}_y + 2\omega\dot{r}_x - \omega^2 r_y + G\left(\frac{m_1}{\xi_1^3} + \frac{m_2}{\xi_2^3}\right) r_y = 0 \qquad (2.69)$$

$$\ddot{r}_2 \qquad\qquad + G\left(\frac{m_1}{\xi_1^3} + \frac{m_2}{\xi_2^3}\right) r_2 = 0$$

Ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση δυναμικού

$$u\left(r_x, r_y, r_z\right) = \frac{\omega^2}{2}\left(r_x^2 + r_y^2\right) + \frac{Gm_1}{\xi_1} + \frac{Gm_2}{\xi_2} \qquad (2.70)$$

και συμβολίζουμε τις χρονικές παραγώγους $\frac{d}{dt}(\circ)_{Fd} = (\circ)'$ ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα F. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης στο σύστημα F είναι :

$$\vec{r}' = \left(\dot{r}_x,\ \dot{r}_y,\ \dot{r}_z\right)^T \qquad (2.71)$$

$$\vec{r}'' = \left(\ddot{r}_x,\ \ddot{r}_y,\ \ddot{r}_z\right)^T \qquad (2.72)$$

Οι εξισώσεις κίνησης με το δυναμικό και τους παραπάνω ορισμούς ταχύτητας και επιτάχυνσης έχουν την μορφή

$$\vec{r}'' + 2\vec{\omega}\ x\ \vec{r}' = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r_x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r_y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r_z} \end{Bmatrix} = \nabla_r u \qquad (2.73)$$

Το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{r}'$ είναι ένα τέλειο διαφορικό.

$$\left(\vec{r}'' + 2\vec{\omega}x\vec{r}'\right)\cdot\vec{r}' = \vec{r}''\cdot\vec{r}' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}'\right) = \frac{du}{dt} \tag{2.74}$$

Μετά από ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε :

$$\upsilon^2 = \vec{r}'\cdot\vec{r}' = 2u - C \tag{2.75}$$

και με αντικατάσταση της συνάρτησης δυναμικού έχουμε :

$$\upsilon^2 = \omega^2\left(r_x^2 + r_y^2\right) + 2\left(\frac{Gm_1}{\xi_1} + \frac{Gm_2}{\xi_2}\right) - C \tag{2.76}$$

όπου η σταθερά C προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και εκφράζει κάποιο σχετικό μέτρο ενεργειακής στάθμης.

Το παραπάνω αναλυτικό αποτέλεσμα χρησιμοποιείται στην μελέτη δυνατών τροχιών της μάζας m ως επαλήθευση του αλγόριθμου υπολογισμού. Ουσιαστικά το αναλυτικό αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας $T + V = \text{const.}$ εκπεφρασμένης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Οι εξισώσεις κίνησης Εξ. (2.29) γράφονται σε αδιάστατη μορφή ως προς τον χρόνο με την εισαγωγή της νέας χρονικής μεταβλητής.

$$\tau = \omega\, t \tag{2.77}$$

Οπότε οι χρονικές παράγωγοι είναι

$$x' = \frac{dx}{d\tau} \tag{2.78}$$

και συνδέεται με την παράγωγο $\dot{x}$ μέσω της σχέσης

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = x'\omega \tag{2.79}$$

Επί πλέον όλες οι αποστάσεις αδιαστοποιούνται ως εξής :

$$\bar{x} = \frac{r_x}{r_{12}},\ \bar{y} = \frac{r_y}{r_{12}},\ \bar{z} = \frac{r_z}{r_{12}},\ x_1 = \frac{r_1}{r_{12}}\ x_2 = \frac{r_2}{r_{12}}$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων οι μάζες βρίσκονται σε μοναδιαία απόσταση η μια από την άλλη, δηλαδή

$$x_2 - x_1 = 1 \tag{2.81}$$

Οι μάζες των σωμάτων αδιαστοποιούνται σε σχέση με τον λόγο μάζας μ

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.82}$$

Με τους παραπάνω ορισμούς το κέντρο μάζας είναι :

$$(1+\mu)\, x_1 + \mu\, x_2 = 0 \tag{2.83}$$

Η παραπάνω σχέση συνδυαζόμενη με την Εξ. (2.29) επιτρέπει να εκφράσουμε τις αδιάστατες συντεταγμένες σε σχέση με τον λόγο μάζας μ

$$x_1 = -\mu \tag{2.84}$$

$$x_2 = 1 - \mu \tag{2.85}$$

Τελικά η αδιάστατη μορφή των εξισώσεων κίνησης, Εξ. (2.69), είναι :

$$\begin{aligned} x'' - 2\overline{y}' &= x - (1-\mu)\frac{x - x_1}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - x_2}{\rho_2^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ y'' + 2x' &= \left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) y = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ z'' &= -\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) z = -\frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.86}$$

όπου η αδιάστατη σχετική απόσταση είναι :

$$\rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2 + z^2} \tag{2.87}$$

ενώ η αδιάστατη συνάρτηση δυναμικού είναι :

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \tag{2.88}$$

Οπότε η αδιάστατη μορφή της σχέσης (2.76) είναι

$$\upsilon^2 = \left(x''^2 + y''^2\right) = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right) - C \qquad (2.89)$$

Τα σταθερά σημεία βρίσκονται από τις Εξ. (2.89) για μηδενική ταχύτητα. Τα σταθερά σημεία είναι τα σημεία Lagrange L_i. Τα σημεία L_1, L_2 και L_3 βρίσκονται από την πρώτη εξίσωση (2.86).

$$-(1-\mu)\frac{x-x_1}{|x-x_1|^3} - \mu\frac{x-x_2}{|x-x_2|^3} = 0$$

Τα τρία σημεία προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις είναι :

$$L_1: \quad x + \frac{1-\mu}{(\mu+x)^2} + \frac{\mu}{(x-1)^2} = 0 \qquad (2.90)$$

$$L_2: \quad x - \frac{1-\mu}{(\mu+x)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0 \qquad (2.91)$$

$$L_3: \quad x - \frac{1-\mu}{(\mu+x)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0 \qquad (2.92)$$

2.4.1 Επιφάνεια μηδενικής σχετικής ταχύτητας

Η πρακτική χρήση των Εξ. (2.76) και (2.89) έγκειται στον προσδιορισμό των περιοχών γύρω από τις μάζες m_1 και m_2 δια μέσου των οποίων διέρχεται η μάζα m για δεδομένες αρχικές συνθήκες. Πρέπει να σημειωθεί ότι για διαστημικές πτήσεις χωρίς πηγή πρόωσης η τροχιά καθορίζεται μόνο από την αρχική θέση και ταχύτητα που ουσιαστικά καθορίζουν την τιμή της σταθεράς C. Ακρότατα σημεία της τροχιάς είναι εκείνα για τα οποία η ταχύτητα μηδενίζεται,

$$\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right) = C \qquad (2.93)$$

Η επιφάνεια που ορίζεται από την παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να προβλέψουμε εάν κάποιο σώμα δύναται να ταξιδέψει από την γη στην σελήνη ή και πέραν αυτής. Όταν η μάζα m βρίσκεται επί της επιφάνειας που ορίζει η Εξ. (2.93) σημαίνει ότι η ταχύτητά της σχετικά με το περιστρεφόμενο σύστημα F και όχι ότι η αδρανειακή ταχύτητα είναι μηδενική.

Από την Εξ. (2.93) βρίσκουμε ότι όταν x, y και C έχουν μεγάλες τιμές τότε ρ_1 και ρ_2 είναι επίσης μεγάλο και η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας είναι προσεγγιστικό.

$$x^2 + y^2 = C \tag{2.94}$$

Όταν όμως η μάζα m βρίσκεται κοντά στο σώμα m_1 ή m_2 (όπου η σταθερά C έχει μεγάλες τιμές) τότε ρ_1 ή ρ_2 είναι μικρά οπότε η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας προσεγγίζεται από

$$\rho_1^2 = \left(x - x_1\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4\left(1-\mu\right)^2}{C^2} \tag{2.95}$$

όταν ρ_1 είναι μικρό, ή από

$$\rho_2^2 = \left(x - x_2\right)^2 + y^2 = \frac{4\mu^2}{C^2} \tag{2.96}$$

όταν ρ_2 είναι μικρό.

2.4.2 Ευστάθεια σημείων Lagrange

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρακολουθήσουμε την κίνηση σώματος που αρχίζει τροχιά (κίνηση από ηρεμία) στην γειτονιά των σημείων Lagrange. Όταν η κίνηση είναι ευσταθής τότε αναμένεται ότι απαιτείται λίγη πρόωση για να διατηρήσει την θέση του κάποιο διαστημόπλοιο σ' αυτής την περιοχή. Η μελέτη της ευστάθειας πραγματοποιείται με γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης γύρω από το σημείο Lagrange L_i. Θεωρούμε τις εξισώσεις κίνησης στην διανυσματική τους μορφή

$$\begin{aligned} &\vec{r}'' + \left[\tilde{\alpha}\right]\vec{r}'' + \left[\tilde{\alpha}\right]^2 \vec{r} = \\ &-\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\left(\vec{r} - \vec{r}_1\right) - \frac{\mu}{\rho_2^3}\left(\vec{r} - \vec{r}_2\right) = f\left(r\right) \end{aligned} \tag{2.97}$$

όπου

$$\vec{r} = \left(x, y, z\right)^T, \quad \vec{r}_1 = \left(-\mu, 0, 0\right)^T, \quad \vec{r}_2 = \left(\left(1-\mu\right), 0, 0\right)^T \quad \text{και} \quad \vec{\Omega} = \left(1, 0, 0\right)^T$$

είναι το αδιάστατο διάνυσμα γωνιακής περιστροφής.

Θεωρούμε μικρή απόκλιση $\delta\vec{r}$ από το σημείο r_o.

$$\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_o \tag{2.98}$$

Η εξίσωση κίνησης διαταραχής γύρω από το σημείο $\vec{r}_o$ είναι

$$\delta\vec{r}'' + \left[\vec{\Omega}\right]\delta\vec{r}_o + \left[\vec{\Omega}\right]\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}}\Big|_{r_o}\delta\vec{r} \tag{2.99}$$

όπου η παράγωγος $\partial\vec{f}/\partial\vec{r}$ υπολογίζεται με την βοήθεια της σχέσης

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial\vec{r}} = \frac{1}{\rho_i}\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)^T \tag{2.100}$$

Η γραμμικοποίηση της παραγώγου $\partial\vec{f}/\partial\vec{r}$ γίνεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}} &= \frac{1-\mu}{\rho_1^5}\left[3\left(\vec{r} - \vec{r}\right)\left(\vec{r} - \vec{r}\right)^T - \rho_1^2 I\right] \\ &\quad + \frac{\mu}{\rho_2^3}\left[3\left(\vec{r} - \vec{r}_2\right)\left(\vec{r} - \vec{r}_2\right)^T - \rho_2^2 I\right] \end{aligned} \tag{2.101}$$

Ορίζοντας διάνυσμα κατάστασης $\vec{X}$

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} \delta\vec{r} \\ \delta\vec{r}' \end{Bmatrix} \tag{2.102}$$

μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης στην μορφή

$$\vec{X}' = \left[M\left(\vec{r}_o\right)\right]\vec{X} \tag{2.103}$$

όπου

$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}}\Big|_{\vec{r}_o} - \vec{\Omega}^2 & -2\vec{\Omega} \end{bmatrix} \tag{2.104}$$

Η ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του μητρώου $[M]$. Για τα σημεία Lagrange $x_o = y_o = 0$ και οι σχετικές αποστάσεις ρ_1, ρ_2 στο $\vec{r}_o$ προσεγγίζονται ως :

$$\rho_1(r_o) = |x_o + \mu|$$
$$\rho_2(r_o) = |x_o - 1 + \mu| \tag{2.105}$$

Το μητρώο $\vec{\partial} f / \partial \vec{r} \;|_{r_o}$ είναι

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}} \;\Big|_{r_o} = \begin{bmatrix} 2E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

όπου E είναι :

$$E(r_o) = \frac{1-\mu}{\rho_1^3(\vec{r})} + \frac{\mu}{\rho_2^3(\vec{r}_o)} \tag{2.107}$$

Οι έξι ιδιοτιμές του μητρώου M δίνονται από

$$\lambda^2_{1,\,2,3,4} = \frac{E - 2 \pm \sqrt{9E^2 - 8E}}{2} \tag{2.108}$$

$$\lambda^2_{5,\,6} = -1 \tag{2.109}$$

Τα συγγραμμικά σημεία Lagrange είναι ασταθή όταν οι ιδιοτιμές είναι θετικές και πραγματικές δηλαδή όταν

$$(2E+1)(E-1) \tag{2.110}$$

Αλλά επειδή $E > 0$ η παραπάνω σχέση είναι

$$E > 1 \tag{2.111}$$

Δηλαδή τιμές $0 < \mu < 0.5$ για τα συγγραμμικά σημεία Lagrange όπου $E > 1$ είναι ασταθή. Για τα σημεία L_4 και L_5 που αντιστοιχούν σε διάταξη ισόπλευρου τρίγωνου έχουμε

$$\rho_1 = \rho_2 \tag{2.112}$$

και το διάνυσμα $\vec{r}_o$ γι' αυτά τα σημεία είναι

$$\vec{r}_o = \begin{Bmatrix} 1/2-\mu \\ \pm\dfrac{3}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.113}$$

Το μητρώο $\partial\vec{f}/\partial\vec{r}$ για τα σημεία Lagrange L_4 και L_5 είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}}\Big|_{\vec{r}_o} &= \frac{1-\mu}{4}\begin{bmatrix} -1 & \pm3\sqrt{3} & 0 \\ \pm3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \\ &+\frac{\mu}{4}\begin{bmatrix} -1 & \pm3\sqrt{3} & 0 \\ \pm3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.114}$$

Τελικά οι ιδιοτιμές του μητρώου Μ για τα σημεία L_4 και L_5 είναι

$$\lambda^2_{1,2,3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2} \tag{2.115}$$

$$\lambda^2_{5,6} = -1 \tag{2.116}$$

Από την Εξ. (2.115) φαίνεται ότι καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές έχουμε όταν

$$1 > 1-27\mu(1-\mu) > 0 \tag{2.117}$$

δηλαδή

$$\mu_{max} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}} \simeq 0.03852$$

Αλλά για το σύστημα γης – σελήνης $\mu \simeq 0.0123$. Δηλαδή οι κινήσεις γύρω από τα σημεία L_4 και L_5 είναι ευσταθείς.
Η Εξ. (2.17) επίσης γράφεται ως

$$\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_1}\geq 25 \tag{2.119}$$

$$a_{min}=\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_{min}=\frac{25+3\sqrt{69}}{2}\simeq 24.95$$

Δηλαδή τα σημεία L_4 και L_5 είναι ευσταθή όταν $m_1 \geq 25m_2$

3. Μοντέλο δυναμικού βαρύτητας

Η κίνηση σωμάτων σε πεδίο βαρύτητας σύμφωνα με τους νόμους του Kepler ουσιαστικά ανάγονται στο πρόβλημα δυο σωμάτων. Η δε κίνηση της κάθε μάζας προσδιορίζεται από ένα δυναμικό βαρύτητας $V_o=-G\,m/r$ που δημιουργείται από το άλλο σώμα μάζας m που υποτίθεται ότι είναι σφαιρικά συμμετρικό και η μάζα του θεωρείται ότι είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο. Η μελέτη της κίνησης που βασίζεται σ' αυτά τα απλά πεδία βαρύτητας μας οδήγησε σε αναλυτικές λύσεις του προβλήματος δυο σωμάτων. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της λύσης παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Kepler το 1609. Ο Kepler, χρησιμοποίησε παρατηρήσεις και περιέγραψε την κίνηση γεωμετρικά. Αργότερα ο Newton ανέπτυξε την αναλυτική λύση για την κίνηση δυο σωμάτων.

Σήμερα οι απαιτήσεις ακρίβειας και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων είναι μεγαλύτερες. Παραδείγματος χάριν οι δορυφόροι που βρίσκονται σε τροχιά κοντά στη γη υφίστανται περίπλοκες δυνάμεις βαρύτητας που διαφέρουν σημαντικά από την δύναμη που προβλέπει η απλή θεωρία που η μάζα της γης είναι συγκεντρωμένη σ' ένα σημείο.

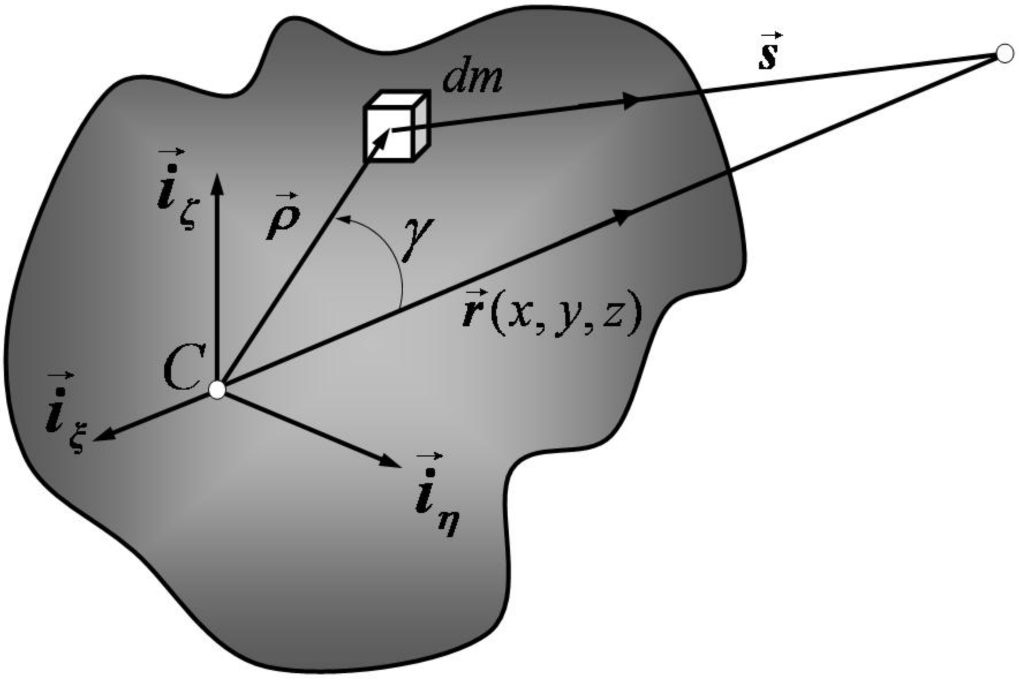
Το σχήμα της γης δεν είναι όμως σφαιρικό και υπάρχει περισσότερη μάζα στον ισημερινό από ότι στους πόλους . Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε μια μεθοδολογία που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το δυναμικό βαρύτητας γύρω από σώματα τυχαίου σχήματος, όπου το δυναμικό εκφράζεται από την σχέση

$$V(\vec{r})=V_o(\vec{r})-R(\vec{r}) \tag{3.1}$$

Στην παραπάνω σχέση $V_o(\vec{r})$ είναι το δυναμικό που οφείλεται σε μια συγκεντρωμένη σημειακή μάζα και $R(\vec{r})$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού που περιλαμβάνει όλες τις αποκλίσεις ακόμα δε και έλξεις από άλλα σώματα.

3.1 Δυναμικό βαρύτητας από σώματα τυχαίου σχήματος

Θεωρούμε σώμα με μη κανονικό σχήμα και κατανομή μάζας που απεικονίζεται στο Σχ. 3.1. και το σύστημα συντεταγμένων $C:\left\{\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\zeta\right\}$ που είναι προσαρτημένο σ' αυτό.



Σχήμα 3.1 Δυναμικό βαρύτητας σώματος τυχαίου σχήματος σε Cartesian συντεταγμένες.

Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων C δεν πρέπει να είναι κατ' ανάγκη στο κέντρο μάζας. Ζητείται να προσδιορισθεί το δυναμικό βαρύτητας σε κάποιο σημείο P από το σώμα. Το σώμα αποτελείται από στοιχειώδης μάζες dm που προκαλούν στοιχειώδης ελκτικές δυνάμεις. Το δυναμικό dV που οφείλεται στην μάζα dm είναι

$$dV = -\frac{Gdm}{s} \tag{3.2}$$

όπου s είναι η απόσταση της μάζας dm από το σημείο P.

Το συνολικό πεδίο βαρύτητας από όλο το σώμα βρίσκεται με ολοκλήρωση της Εξ. (3.2), όπου το διάνυσμα θέσης $\vec{s}$ γράφεται ως

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{\rho} \tag{3.3}$$

όπου $s^2 = \vec{s}\cdot\vec{s} = r^2 + \rho^2 - 2\vec{\rho}\cdot r$ δηλαδή

$$s = r\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\gamma\right]^{1/2} \tag{3.4}$$

οπότε

$$dV\left(\vec{r},\vec{\rho},\gamma,dm\right) = -\frac{Gdm}{r\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cos\gamma\right]^{1/2}} \tag{3.5}$$

Ο όρος του παρανομαστή της παραπάνω σχέσης αντικαθίσταται με το ανάπτυγμα

$$\left(1 - 2\mu + x^2\right)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\left(\mu\right)x^k \tag{3.6}$$

όπου η σειρά συγκλίνει διότι $|x| = |\rho/r| < 1$ και $P_k(\mu)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre που υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} &P_o(\xi) = 1 \\ &P_{n+1}(\xi) = \frac{zn+1}{n+1}\xi P_n(\xi) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(\xi) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Τα πρώτα τέσσερα πολυώνυμα Legendre είναι

$$\begin{aligned} &P_o(\xi) = 1 \\ &P_1(\xi) = \xi \\ &P_2(\xi) = \left(3\xi^2 - 1\right)/2 \\ &P_3(\xi) = \left(5\xi^3 - 3\xi\right)/2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Τα πολυώνυμα Legendre έχουν μηδενικό μέσο όρο στο διάστημα $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} P_k(\xi)\,d\xi = 0 \tag{3.9}$$

και είναι ορθογώνια, δηλαδή

$$\int_{-1}^{1} P_j(\xi)P_k(\xi)\,d\xi = 0 \qquad j \neq k \tag{3.10}$$

Το στοιχειώδες δυναμικό βαρύτητας εκφράζεται ως ανάπτυγμα από την σχέση :

$$dV(\vec{r},\vec{p},\gamma,dm) = -\frac{Gdm}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma) \tag{3.11}$$

και το συνολικό δυναμικό είναι :

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\iiint_B\left(\frac{\rho}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma)\,dm \tag{3.12}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για σώμα οποιοδήποτε σχήματος και κατανομής μάζας. Πρέπει να σημειωθεί ότι $\rho/r<1$ οπότε μόνο οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος έχουν σημαντική συνεισφορά, ενώ για $r\to\infty$ όλο το άθροισμα τείνει στο μηδέν. Συνεπώς για $r\to\infty$ το δυναμικό τείνει στο δυναμικό σημειακής μάζας.

Διατηρώντας μόνο τους τρεις πρώτους όρους στην Εξ. (3.12) έχουμε :

$$V(\vec{r}) \simeq -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{r^2}\iiint_B \rho\cos\gamma\;dm - \frac{G}{2r^3}\iiint_B \rho^2\left(3\cos^2\gamma - 1\right)dm \tag{3.13}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η συνεισφορά σημειακής μάζας και ο δεύτερος όρος απλοποιείται όταν C είναι το κέντρο μάζας. Εκλέγοντας τον άξονα ξ κατά μήκος του r έχουμε $\xi = \rho\cos\gamma$ δηλαδή

$$\frac{C}{r^2}\iiint_B \rho\cos\gamma\;dm = \frac{C}{r^2}\iiint_B \xi\;dm \tag{3.14}$$

Αλλά όταν C είναι το κέντρο μάζας τότε

$$\iiint_B \xi\, dm = 0 \tag{3.15}$$

Οι ροπές αδράνειας του σώματος ορίζονται ως εξής :

$$I_{\xi\xi} = \iiint_B \left(n^2 + \zeta^2\right) dm$$

$$I_{\eta\eta} = \iiint_B \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm \tag{3.16}$$

$$I_{\zeta\zeta} = \iiint_B \left(\xi^2 + \eta^2\right) dm$$

και ικανοποιούν

$$I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta} = 2\iiint_B \rho^2 dm \tag{3.17}$$

Η ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα $\vec{r}$ είναι :

$$I_r = \iiint_B \rho^2 \sin^2\gamma\, dm \tag{3.18}$$

και ο όρος

$$\frac{G}{2} r^3 \iiint_B \left(2\rho^2 dm - 3\rho^2 \sin^2\gamma\, dm\right) \tag{3.19}$$

είναι

$$\frac{G}{2r^3}\left(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta} - 3I_r\right) \tag{3.20}$$

και το συνολικό δυναμική προσεγγίζεται από

$$V(\vec{r}) \approx -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{2r^3}\left(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta} - 3I_r\right) \tag{3.21}$$

όταν το σώμα είναι σφαιρικά συμμετρικά $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_{\zeta\zeta} = I_r$ και ο δεύτερος της Εξ. (3.21) μηδενίζεται. Δηλαδή ο όρος αυτός είναι μέτρο ασυμμετρίας.

Το δυναμικό στην Εξ. (3.21) εξαρτάται από την θέση του σημείου P. Η εξάρτηση απαλείφεται όταν η πολική ροπή αδράνειας μετασχηματισθεί

$$I_r = \iiint \rho^2 \sin^2\gamma \, dm = \iiint_B \rho^2 \left(1-\cos^2\gamma\right) dm \qquad (3.22)$$

αλλά $\vec{r} = \left(x, y, z\right)^T$ και $\vec{\rho} = \left(\xi, \eta, \zeta\right)^T$ τότε

$$\cos\gamma = \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{r}}{r\rho} = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\rho r} \qquad (3.23)$$

και με αντικατάσταση στην Εξ. (3.22) βρίσκουμε

$$I_r = \frac{1}{r^2}\iiint_B \left[x^2\left(\eta^2+\zeta^2\right) + y^2\left(\xi^2+\zeta^2\right) + 2^2\left(\xi^2+n^2\right) - 2xy\xi\eta - 2xz\xi\zeta - 2yz\eta\zeta\right] dm$$

$$(3.24)$$

όπου οι όροι x, y, z είναι σταθερές για την ολοκλήρωση. Ορίζοντας τις ροπές αδράνειας

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= -\iiint_B \xi n \, dm \\ I_{\xi\zeta} &= -\iiint_B \xi\zeta \, dm \\ I_{\eta\zeta} &= -\iiint_B \eta\zeta \, dm \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Η ροπή αδράνειας I_r είναι

$$I_r = \frac{1}{r^2}\left[\, I_{\xi\xi} x^2 + I_{\eta\eta} y^2 + I_{\zeta\zeta} z^2 + 2\left(xyI_{\xi n} + x_2 I_{\xi\zeta} + y^2 I_{\eta\zeta}\right) \,\right] \qquad (3.26)$$

Όταν το σύστημα C είναι ένα σύστημα κυρίων αξόνων έχουμε την παρακάτω απλοποιημένη μορφή δυναμικού

$$V\left(x,y,z\right) = -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{2r^3}\left[I_{\xi\xi}\left(1-3\frac{x^2}{r^2}\right) + I_{\eta\eta}\left(1-3\frac{y^2}{r^2}\right) + I_{\zeta\zeta}\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)\right] \qquad (3.27)$$

Δηλαδή σύμφωνα με την Εξ. (3.1) η παρέκκλιση από το σημειακό δυναμικό είναι

$$R\left(\vec{r}\right)=\frac{G}{2r^3}\left[I_{\xi\xi}\left(1-3\frac{x^2}{r^2}\right)+I_{\eta\eta}\left(1-3\frac{y^2}{r^2}\right)+I_{\zeta\zeta}\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)\right] \tag{3.28}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ακριβής υπολογισμός των ροπών αδράνειας δεν είναι απλός

Η επιτάχυνση που επάγεται σε ένα μικρό σώμα που βρίσκεται στην περιοχή του σώματος Β είναι

$$\vec{\alpha}_\rho\left(x,y,z\right)=-\nabla V\left(x,y,z\right)=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}\,x+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{i}\,y+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{i}\,z\right) \tag{3.29}$$

αλλά

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\vec{i}_r \tag{3.30}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_\rho=&-\frac{Gm}{r^2}\vec{i}_r-\frac{3G}{2r^4}\left[I_{\xi\xi}+I_{\eta\eta}+I_{\zeta\zeta}-5\left(I_{\xi\xi}\frac{x^2}{r^2}+I_{\eta\eta}\frac{y^2}{r^2}+I_{zz}\frac{z^2}{r^2}\right)\right]_{\vec{i}_r}\\&-\frac{3G}{r^5}\left(I_{\xi\xi}\,x\,\vec{i}_\xi+I_{\eta\eta}\,y\,\vec{i}_n+I_{\zeta\zeta}\,z\,\vec{i}_\zeta\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

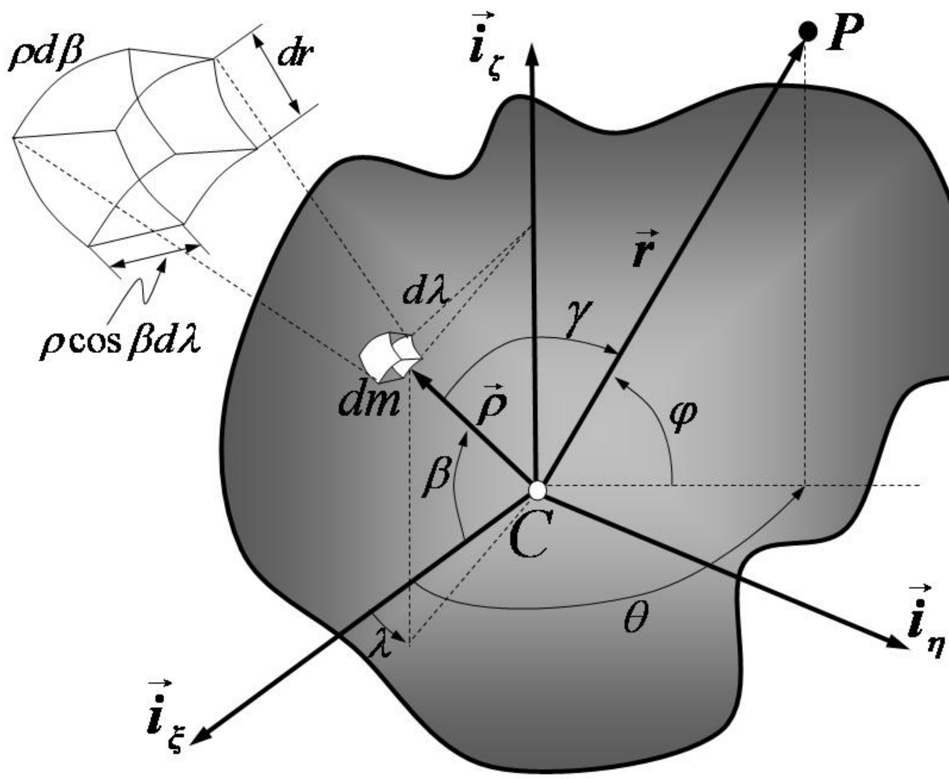
Η παραπάνω σχέση με την Εξ. (3.26) γράφεται ως

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_\rho=&-\frac{Gm}{r^2}\vec{i}_r-\frac{3G}{2r^4}\left(I_{\xi\xi}+I_{\eta\eta}+I_{\zeta\zeta}-5I_r\right)\vec{i}_r\\&-\frac{3G}{r^5}\left(I_{\xi\xi}\,x\,\vec{i}_\xi+I_{\eta\eta}\,y\,\vec{i}_n+I_{\zeta\zeta}\,z\,\vec{i}_z\right)\end{aligned} \tag{3.32}$$

Όπως και προηγουμένως, όταν $I_{\xi\xi}=I_{\eta\eta}=I_{\zeta\zeta}$ οι δυο τελευταίοι όροι αναιρούνται .

3.2 Σφαιρικά αρμονικά δυναμικό βαρύτητας

Η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να γραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες όταν τα διανύσματα $\vec{\rho}$ και $\vec{r}$ εκφρασθούν σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{\rho}=\vec{\rho}\left(r,\theta,\varphi\right)$ όπως δείχνει το Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2 Δυναμικό βαρύτητας σώματος τυχαίου σχήματος με την χρήση σφαιρικών συντεταγμένων.

Η συνάρτηση δυναμικού για σώμα οποιοδήποτε σχήματος είναι :

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\iiint\left(\frac{\rho}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma)\,dm \qquad (3.33)$$

Στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (ρ, λ, β) που είναι προσαρτημένο στο σώμα Β η στοιχειώδης μάζα dm είναι

$$dm = D(\rho, \lambda, \beta)\rho^2 \cos\beta \; d\rho\, d\lambda\, d\beta \qquad (3.34)$$

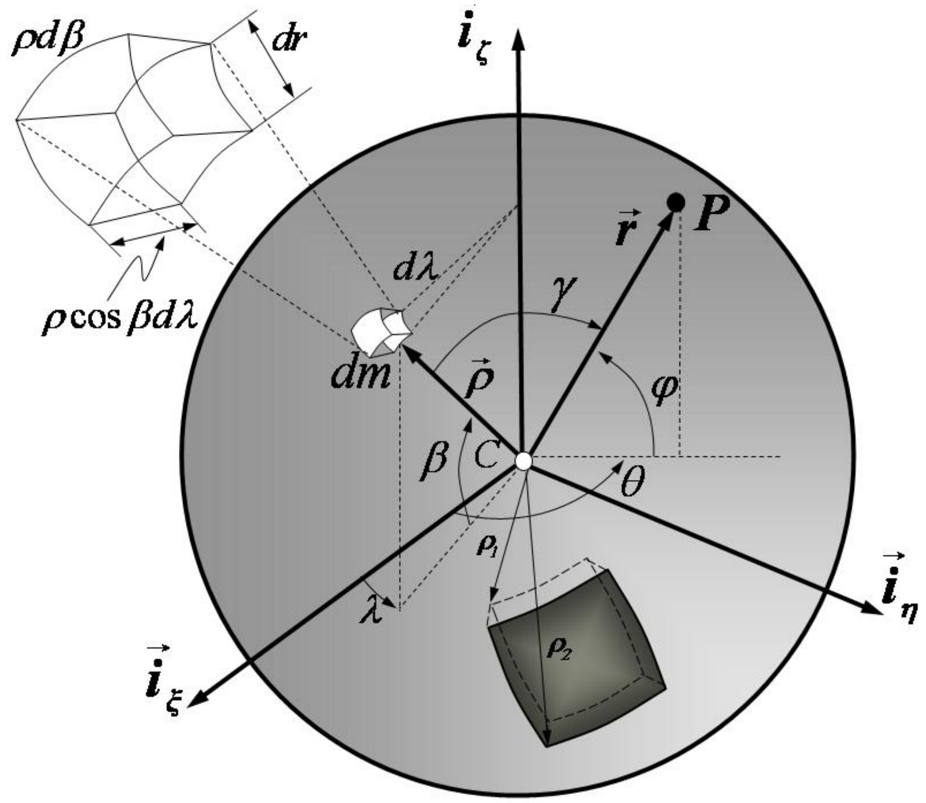
όπου $D(\rho, \lambda, \beta)$ είναι η κατανομή πυκνότητας του Β. Η γωνία γ εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως :

$$\cos\gamma = \sin\varphi\sin\beta + \cos\varphi\cos\beta\,\cos(\theta - \lambda) \qquad (3.35)$$

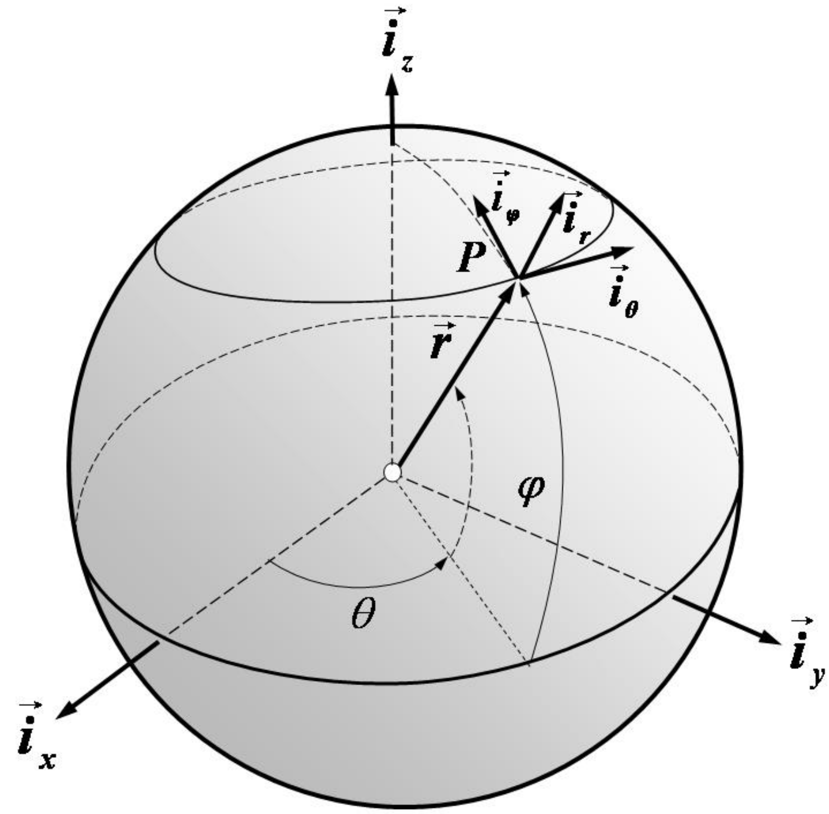
Επίσης από την θεωρία των πολυωνύμων Legendre έχουμε τον ορισμό της συνάρτησης Legendre.

$$P_k^j(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{1}{2j}} \frac{dj}{d\xi^j}\left(P_k(\xi)\right) \qquad (3.36)$$

όπου j είναι η τάξη της συνάρτησης Legendre και k είναι ο βαθμός της. Η συνάρτηση Legendre.



Σχήμα 3.3



Σχήμα 3.4