

1. Η Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων σε Ασυμπίεστη Ροή

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος στην αριθμητική μηχανική των ρευστών και παρουσιάζεται αρχικά στην μορφή που συνήθως εφαρμόζεται για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ασυμπίεστης ροής.

1.1 Εισαγωγή

Οι βασικές έννοιες της μεθόδου πεπερασμένων όγκων παρουσιάζονται με την εφαρμογή της σε μία εξίσωση διατήρησης γενικής μορφής για την βαθμωτή ποσότητα φ . Ο νόμος διατήρησης για την ποσότητα φ , π.χ. την κινητική ενέργεια στο μοντέλο τύρβης k - ϵ , εκφράζεται από μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{\partial(\rho u_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + q_\varphi \quad (1.1)$$

ή σε διανυσματική μορφή

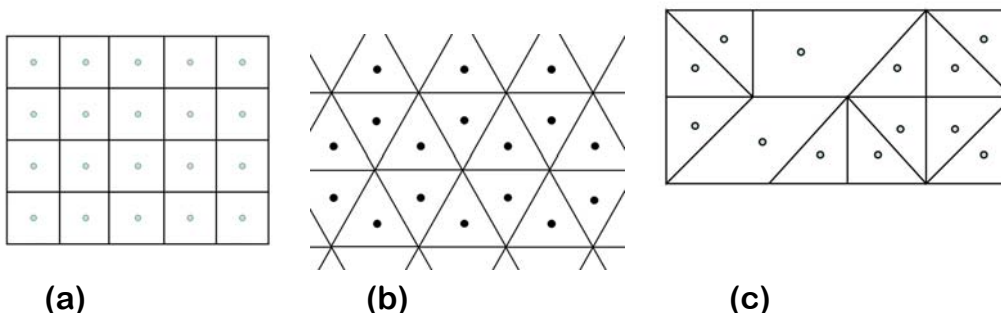
$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \varphi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) + \bar{q}_\varphi \quad (1.2)$$

όπου ρ , u_j , Γ , q_φ είναι γνωστές ποσότητες και u_j είναι μία ταχύτητα μεταφοράς.

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιεί την ολοκληρωματική μορφή της Εξ. (1.1) ή της Εξ. (1.2)

$$\oint_{\partial\Omega} \rho \varphi \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \oint_{\partial\Omega} \Gamma \nabla \varphi \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{\Omega} q_\varphi d\Omega \quad (1.3)$$

Το χωρίο όπου η Εξ. (1.3) θα επιλυθεί αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων υποδιαιρείται σε μικρά χωρία που ονομάζονται πεπερασμένοι όγκοι (ΠΟ) και μπορεί να έχουν οποιοδήποτε σχήμα π.χ. τετράπλευρο, τρίγωνο, ή οποιοδήποτε πολυγωνικό σχήμα (δες Σχ. 1.1).



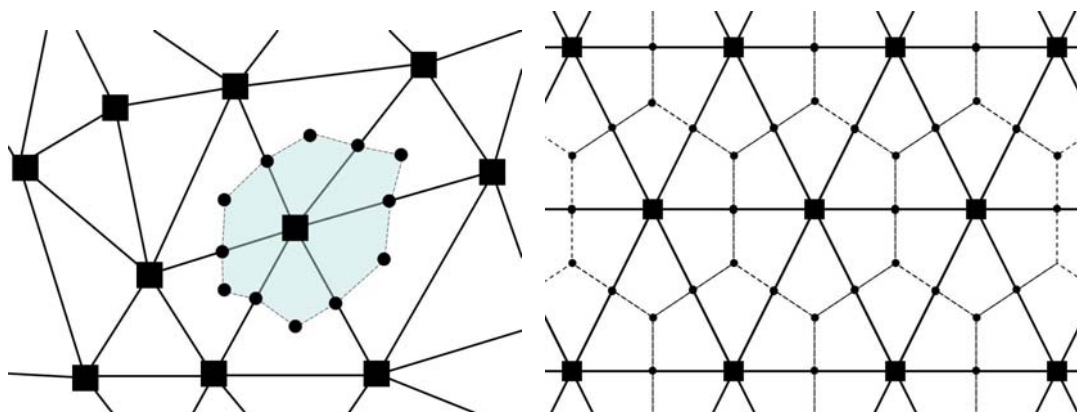
Σχήμα 1.1 Διαμερισμοί χωρίου σε πεπερασμένους όγκους (α) δομημένο πλέγμα με ΠΟ όγκους τετράπλευρου σχήματος (β) αδόμητο πλέγμα με ΠΟ όγκους τριγωνικού σχήματος (γ) αδόμητο πλέγμα με ΠΟ όγκους μικτού τύπου.

Σε αντίθεση με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών ή με τις φασματικές μεθόδους collocation, όπου οι μεταβλητές ορίζονται πάντοτε στους κόμβους του πλέγματος,

στην μέθοδο πεπερασμένων όγκων οι μεταβλητές ορίζονται μέσα στα όρια των στοιχειωδών όγκων που μπορεί να έχουν οποιοδήποτε σχήμα. Τα σημεία ορισμού των μεταβλητών για τους διαμερισμούς ΠΟ δείχνονται στα Σχ. 1.1 και 1.2, όπου στο Σχ. 1.1 οι μεταβλητές ορίζονται στα κέντρα βάρους και οι όγκοι ελέγχου είναι τα πολυγωνα που ορίζουν το πλέγμα ενώ στο Σχ. 1.2 ορίζονται στους κόμβους και οι όγκοι ελέγχου είναι τα πολύγωνα που προκύπτουν από την γεωμετρική κατασκευή του Σχ. 1.2b.

Η μέθοδος ΠΟ παρουσιάζεται αρχικά για Cartesian πλέγματα (δες Σχ. 1.1.α) αλλά η επέκτασή της σε πλέγματα με στοιχεία οποιασδήποτε μορφής είναι επίσης δυνατή και θα παρουσιασθεί στην συνέχεια. Ο κόμβος υπολογισμού για την μέθοδο ΠΟ που εφαρμόζεται για τον διαμερισμό του Σχ. 1.1.α βρίσκεται στο κέντρο των υπολογιστικών στοιχείων ή όγκων ελέγχου (OE) (control volume CV) που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή τετράγωνα. Αντίστοιχα ορίζονται οι υπολογιστικοί κόμβοι για διαμερισμούς με τριγωνικά και με μεικτού τύπου στοιχεία (δες Σχ. 1.1.α και Σχ. 1.1b).

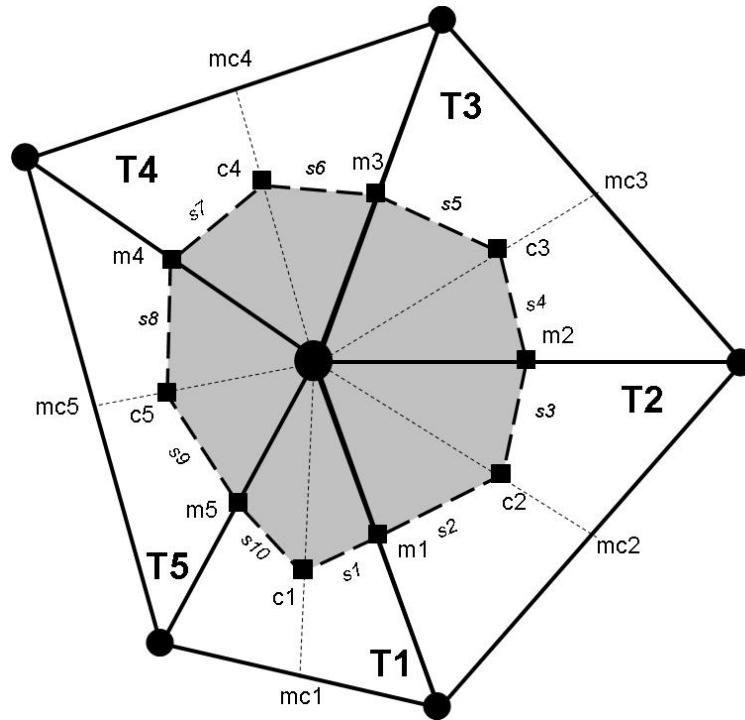
Σε πλέγματα με τριγωνικούς διαμερισμούς (τετράεδρα στις τρεις διαστάσεις) ο αριθμός των κορυφών που ορίζουν τα τρίγωνα (τετράεδρα) είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από τον αριθμό των τριγώνων ή τετραέδρων. Συμφέρει λοιπόν να ορίσουμε τους υπολογιστικούς κόμβους στις κορυφές των τριγώνων και να θεωρήσουμε τους περιπλοκότερου σχήματος όγκους ελέγχου που σημειώνονται στο Σχ. 1.2 με διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 1.2α Πλέγμα πεπερασμένων όγκων με τριγωνικά στοιχεία όπου οι κόμβοι υπολογισμού ορίζονται στις κορυφές των τριγώνων. Ο πεπερασμένος όγκος γύρω από ένα κόμβο φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή και διέρχεται από τα μέσα των πλευρών και από τα κέντρα βάρους των τριγώνων που περιβάλλουν τον κόμβο.

Σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα του τρόπου ορισμού των κόμβων υπολογισμού (δες Σχ. 1.1 και 1.1b) η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων εφαρμόζεται πάντα στην ολοκληρωματική μορφή του νόμου διατήρησης (δες Εξ. 1.3) που ισχύει για κάθε όγκο ελέγχου (OE) ανεξάρτητα του σχήματος του διαδοχικά και για όλο το χωρίο επίλυσης. Άθροιση των νόμων διατήρησης για όλους τους όγκους έλεγχου συνεπάγεται διατήρηση της υπό θεώρηση ποσότητας (μάζας, ορμής ή ενέργειας) για όλο το χωρίο επίλυσης. Δηλαδή, η ιδιότητα της διατήρησης (τοπικής σε κάθε ΠΟ αλλά και συνολικά για όλο το χωρίο υπολογισμού) που εμπεριέχεται στην μέθοδο

πεπερασμένων όγκων αποτελεί το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου. Τα επικαμπύλια (επιφανειακά στις τρεις διαστάσεις) ολοκληρώματα της Εξ. (1.3) υπολογίζονται αριθμητικά. Η αριθμητική ολοκλήρωση γίνεται με τον δεύτερης τάξης ακρίβειας κανόνα του τραπεζίου ή με την εφαρμογή κανόνων ολοκλήρωσης Gauss που έχουν τάξη ακρίβειας ανάλογη με τον αριθμό σημείων ολοκλήρωσης (Gauss quadrature points).



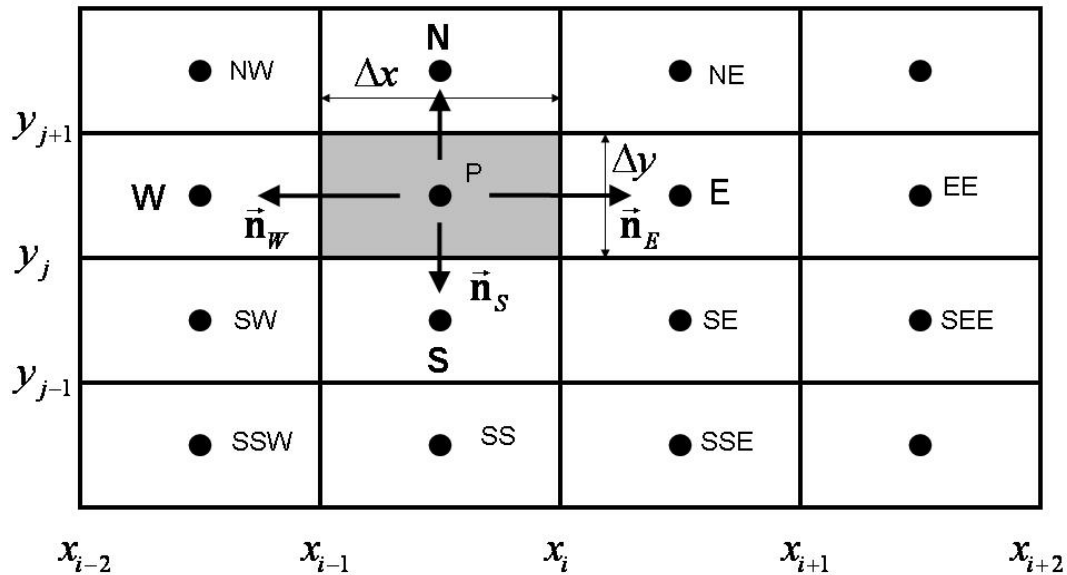
Σχήμα 1.2b Ορισμός όγκου έλεγχου $OE \equiv (c_1, m_1, c_2, m_2, c_3, m_3, c_4, m_4, c_5, m_5, c_1)$ για τα τρίγωνα T1, T2, T3, T4, και T5 που συντρέχουν στον κόμβο υπολογισμού. Οι κορυφές m_i του OE είναι τα μέσα των πλευρών και οι κορυφές c_i είναι τα κέντρα βάρους των τριγώνων. Το ολοκλήρωμα στην Εξ. 1.3 υπολογίζεται κατά μήκος των πλευρών $s_1 \rightarrow s_{10}$ του OE..

Η μορφή των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων είναι διαφορετική από εκείνη που βρίσκουμε από την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου ΠΟ, εξαρτάται όπως θα δούμε παρακάτω από την τάξη ακρίβειας της παρεμβολής. Η οποία γενικά καθορίζεται από τον αριθμό των όγκων που εμπλέκονται για την δημιουργία της παρεμβολής, ή αναδόμησης της λύσης όπως συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία.

1.2 Προσέγγιση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων

Θεωρούμε διαμερισμό χωρίου σε ΠΟ που ορίζονται από ένα Cartesian πλέγμα και κόμβους υπολογισμού που ορίζονται στο κέντρο βάρους των στοιχειωδών όγκων ελέγχου (OE) που είναι παραλληλόγραμμα ή παραλληλεπίπεδα στις δυο και τρεις

διαστάσεις, αντίστοιχα. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί και οι ΟΕ απεικονίζονται στα Σχ. 1.3 και 1.4.



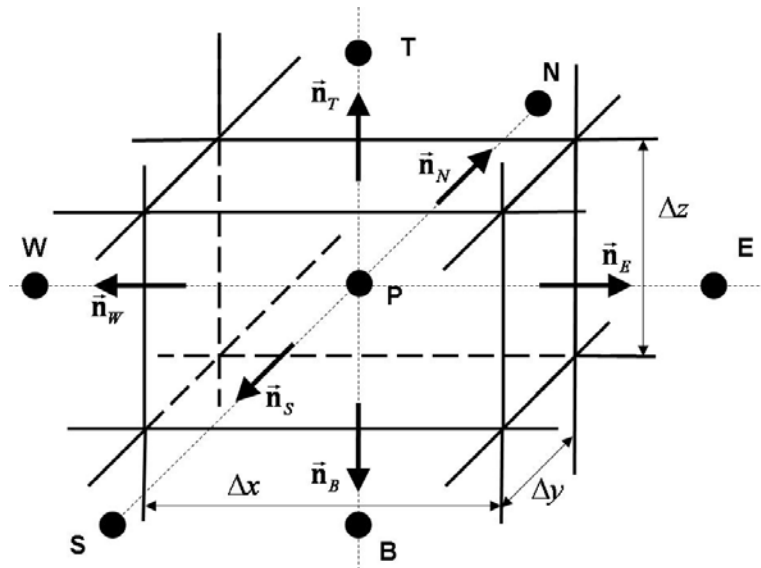
Σχήμα 1.3 Ορισμός όγκου ελέγχου και του κόμβου P για ορθογώνιο 2Δ πλέγμα

Ο όγκος ελέγχου σε δυο διαστάσεις ορίζεται από τις τέσσερις πλευρές και στις τρεις διαστάσεις από τις έξι επίπεδες επιφάνειες που η κάθε μία είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Θεωρούμε το δυσδιάστατο πλέγμα του Σχ. 1.3 και την αντίστοιχη ονοματολογία των γειτονικών κόμβων υπολογισμού που περιβάλλουν τον κόμβο υπολογισμού P γύρω από τον όγκο ελέγχου που επιλύουμε αριθμητικά τον νόμο διατήρησης. Ο αντίστοιχος συμβολισμός στις τρεις διαστάσεις απεικονίζεται στο Σχ. 1.4.

Συμβολίζουμε με f την κάθετη προς την ακμή ροή μεταφοράς $\rho \phi \vec{u} \cdot \vec{n}$ (convective flux) ή ροή διάχυσης, $\Gamma (\nabla \phi) \cdot \vec{n} = \Gamma (\text{grad} \phi) \cdot \vec{n}$, (diffusive flux). Η συνολική ροή από τα όρια του ΟΕ είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των ακμών του ΟΕ

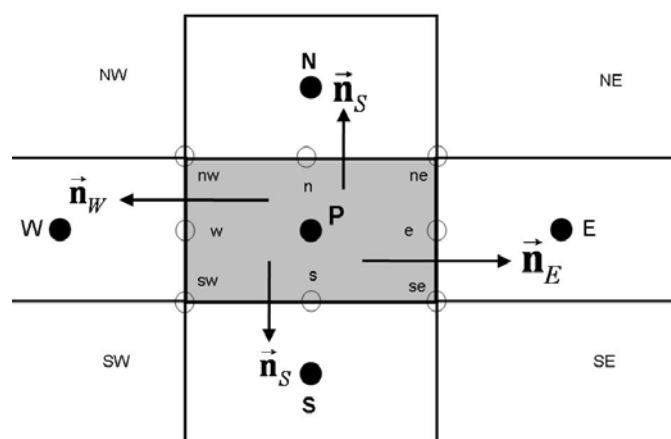
$$\int_S f dS = \sum_{k=1}^4 \int_{S_k} f dS \quad (1.4)$$

όπου f είναι η συνιστώσα της ροής μεταφοράς της ροής διάχυσης στην κατεύθυνση που είναι κάθετη προς την ακμή που ορίζει τον ΟΕ.



Σχήμα 1.4 Ορισμός όγκου ελέγχου για ορθογώνιο πλέγμα στις τρεις διαστάσεις

Υποτίθεται ότι το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας \vec{u} και οι ιδιότητες του ρευστού είναι γνωστές και ότι ο μόνος άγνωστος είναι το μέγεθος του φ σε κάθε κόμβο υπολογισμού. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της Εξ. (1.4) απαιτεί να γνωρίζουμε την κάθετη συνιστώσα της ροής f πάνω στην ακμή S_k (επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις) αλλά η τιμή της μεταβλητής φ και συνεπώς η ροή f είναι γνωστή μόνο στο κέντρο βάρους (κόμβο υπολογισμού) του ΟΕ. Συνεπώς η τιμή του ολοκληρώματος προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τιμές της μεταβλητής στις πάνω στα όρια του όγκου ελέγχου e, se, ne κ.λ.π. που σημειώνονται στο Σχ. 1.5. Διάφοροι μέθοδοι προσέγγισης της μεταβλητής στα όρια του ΟΕ (δηλαδή e, se, ne κ.λ.π) με χρήση τιμών σε γειτονικούς κόμβους (δηλαδή E, P, W, N, S) θα αναφερθούν στο επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 1.5 Σημεία υπολογισμού ολοκληρωμάτων και σημεία προσέγγισης.

Υποθέτοντας ότι οι τιμές της μεταβλητής πάνω στα όρια του όγκου ελέγχου έχουν προσεγγισθεί από τις τιμές που έχει στους κόμβους υπολογισμού, που είναι το

κέντρο βάρους το ΟΕ, τότε δεδομένης της κάθετης συνιστώσας της ροής στο όριο Ε παραδείγματος χάριν του ΟΕ, ο απλούστερος κανόνας ολοκλήρωσης με δεύτερη τάξη ακρίβειας είναι

$$F_E = \int_{S_E} f dS = \overline{f}_E S_E \approx f_e S_E \quad (1.5)$$

δεδομένου ότι η τιμή f_e μπορεί να προσεγγισθεί με ακρίβεια δεύτερης τάξης στο σημείο e, δηλαδή είναι η μέση τιμή πάνω στο όριο του ΟΕ.

Ένας άλλος κανόνας ολοκλήρωσης με ακρίβεια δεύτερης τάξης είναι ο κανόνας του τραπεζίου

$$F_E = \int_{S_E} f dS = \left(\frac{f_{ne} + f_{se}}{2} \right) S_E \quad (1.6)$$

που απαιτεί υπολογισμό της ροής στις γωνίες ne και se του ΟΕ (δες Σχ. 1.5).

Αριθμητική ολοκλήρωση με υψηλότερη τάξη ακρίβειας (τέταρτης τάξης) μπορεί να επιτευχθεί με τον κανόνα του Simpson που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα από τις τιμές σε τρία σημεία από την σχέση

$$F_E = \int_{S_E} f dS = \left(\frac{f_{ne} + 4f_e + f_{se}}{6} \right) S_E \quad (1.7)$$

Όπου οι τιμές f_{ne} , f_e , και f_{se} πρέπει να υπολογισθούν με παρεμβολή που είναι τουλάχιστον της ίδιας τάξης ακρίβειας όπως ο κανόνας του Simpson δηλαδή απαιτείται παρεμβολή με τουλάχιστον κυβικά πολυώνυμα.

1.3 Προσέγγιση δια παρεμβολής

Μεταξύ των πολλών κανόνων παρεμβολής, που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγίσουμε τις τιμές της μεταβλητής σε σημεία πάνω στα όρια του ΟΕ, θα παρουσιάσουμε μερικές από τους πλέον συνηθισμένους.

1.3.1 Κατάντη (Upwind) Παρεμβολή

Η τιμή της μεταβλητής στο σημείο, e, που είναι το μέσο του τμήματος που ενώνει τους κόμβους υπολογισμού P και E, μπορεί να προσεγγισθεί με πρώτης τάξης ακρίβεια ως

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_P & \vec{u} \cdot \vec{n} > 0 \\ \varphi_E & \vec{u} \cdot \vec{n} < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Η προσέγγιση της Εξ. (1.8) υποθέτει σταθερή τιμή της μεταβλητής μέσα στον ΟΕ. Η πρώτη τάξης προσέγγιση εισάγει μεγάλη διάχυση (numerical diffusion) αλλά δεν δημιουργεί αριθμητική αστάθεια και ικανοποιεί την συνθήκη φραγμένης λύσης με αποτέλεσμα να αποφεύγονται οι ανεπιθύμητες αριθμητικές διακυμάνσεις (numerical oscillations).

Εφαρμόζοντας αναπτύγματα Taylor όταν $\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$ βρίσκουμε

$$\varphi_e = \varphi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + O((x_e - x_P)^2) \quad (1.9)$$

και εφ' όσον η πρώτη παράγωγος θεωρείται μηδενική από στην Εξ. (1.9) η προσέγγιση είναι πρώτης τάξης ακρίβειας.

1.3.2 Γραμμική Παρεμβολή

Η γραμμική παρεμβολή της τιμής της μεταβλητής στο σημείο e , φ_e , είναι

$$\varphi_e = \varphi_E \lambda_e + \varphi_P (1 - \lambda_e), \quad \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (1.10)$$

Η προσέγγιση που επιτυγχάνεται με την γραμμική παρεμβολή της Εξ. (1.10) είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας διότι υποθέτει γραμμική μεταβολή της μεταβλητής μέσα στον ΟΕ. Με απαλοιφή της πρώτης παραγώγου από το ανάπτυγμα Taylor βρίσκουμε

$$\varphi_e = \varphi_E \lambda_e + \varphi_P (1 - \lambda_e) + \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P + O((x_e - x_P)^3) \quad (1.11)$$

δηλαδή το σφάλμα αποκοπής είναι ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης και η ακρίβεια είναι δεύτερης τάξης.

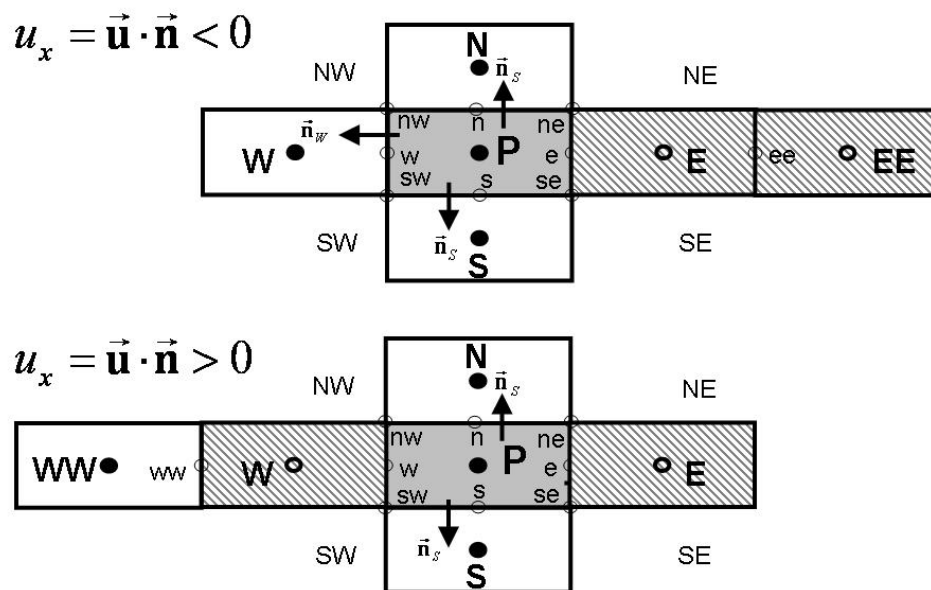
1.3.3 Τετραγωνική Κατάντη (Upwind) Παρεμβολή (QUICK)

Η ακρίβεια παρεμβολής μπορεί να αυξηθεί όταν θεωρηθεί ότι η διακύμανση της μεταβλητής μεταξύ δύο ΟΕ είναι κάποιο πολυώνυμο ανώτερης τάξης. Υποθέτοντας παραδείγματος χάριν παραβολική μεταβολή του φ μεταξύ των κόμβων υπολογισμού P και E μπορούμε να επιτύχουμε τρίτης τάξης ακρίβεια με χρήση κατάντη (upwind) παρεμβολής όπως θα δείξουμε παρακάτω. Ο προσδιορισμός των συντελεστών ενός δεύτερης τάξης πολυωνύμου που ορίζει την παραβολή απαιτεί την χρήση τριών κόμβων υπολογισμού. Ο τρίτος κόμβος που απαιτείται λαμβάνεται από το αριστερό μέρος (upstream side), δηλαδή W (δες Σχ. 1.6) όταν το πρόσημο της ταχύτητας είναι από τον κόμβο P προς τον κόμβο E είναι θετικό, δηλαδή όταν $u_x = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$. Όταν όμως το πρόσημο της ταχύτητας μεταφοράς είναι αρνητικό, δηλαδή όταν

$u_x = \vec{u} \cdot \vec{n} < 0$ τότε ως τρίτος κόμβος που απαιτείται για την παρεμβολή λαμβάνεται ο κόμβος υπολογισμού EE (δες Σχ. 1.6). Η σχέση παραβολικής παρεμβολής είναι

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \varphi_U + g_1(\varphi_D - \varphi_U) + g_2(\varphi_U - \varphi_{UU}) \\ g_1 &= \frac{(x_e - x_U)(x_e - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})}, \quad g_2 = \frac{(x_e - x_U)(x_D - x_e)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})} \end{aligned} \quad (1.12)$$

όπου D , U , και DD υποδηλώνουν τον κόμβο E , P , και W όταν η κατεύθυνση της ροής είναι από τον κόμβο P προς τον κόμβο E , ενώ όταν η κατεύθυνση της ροής είναι από τον κόμβο E προς τον κόμβο P , υποδηλώνουν τους κόμβους P , E , και EE .



Σχήμα 1.6 Σημεία υπολογισμού ολοκληρωμάτων και κόμβοι υπολογισμού που χρησιμοποιούνται για τετραγωνική προσέγγιση QUICK.

Το παραπάνω σχήμα παρεμβολής είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Kinematics) και είναι τρίτης τάξης ακρίβειας για ομοιόμορφα και μη-ομοιόμορφα κατανεμημένα πλέγματα. Με απαλοιφή της δεύτερης παραγώγου από το ανάπτυγμα Taylor βρίσκουμε ότι για ομοιόμορφο πλέγμα και $u_x = \vec{u} \cdot \vec{n} > 0$ το σφάλμα αποκοπής του σχήματος QUICK δίνεται από την σχέση.

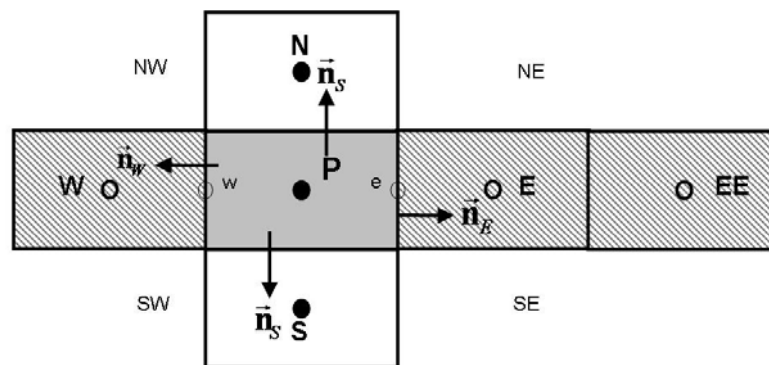
$$\varphi_e = \frac{6}{8}\varphi_P + \frac{3}{8}\varphi_E - \frac{1}{8}\varphi_W - \frac{3(\Delta x)^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_P \quad (1.13)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα και όταν χρησιμοποιείται η παρεμβολή QUICK της Εξ. (1.12) αντί για την γραμμική παρεμβολή της Εξ. (1.9) η ακρίβεια του συνολικού

σχήματος δεν είναι μεγαλύτερη από δεύτερης τάξης διότι τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με τον δεύτερης τάξης ακρίβειας κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης που δίνεται από την Εξ. (1.6)

1.3.4 Σχήματα Παρεμβολής Ανώτερης Τάξης

Σχήματα παρεμβολής ανώτερης τάξης χρησιμοποιούνται μόνον όταν τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με κανόνες ολοκλήρωσης τάξης ακρίβειας μεγαλύτερης από δεύτερη. Όταν για παράδειγμα χρησιμοποιείται ο κανόνας ολοκλήρωσης του Simpson, που παρέχει τέταρτης τάξης ακρίβεια, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν πολυώνυμα παρεμβολής τρίτης τάξης, που παρέχουν τέταρτης τάξης ακρίβεια παρεμβολής, και απαιτούν τέσσερις κόμβους υπολογισμού για την παρεμβολή. Οι τέσσερις κόμβοι υπολογισμού που χρησιμοποιούνται στην παρεμβολή καθορίζουν το τύπο της παρεμβολής και τις αριθμητικές ιδιότητες του σχήματος.



Σχήμα 1.7 Κόμβοι υπολογισμού που χρησιμοποιούνται για τέταρτης τάξης κεντρική παρεμβολή με πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Θεωρώντας ένα ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα το τρίτης τάξης πολυώνυμο κεντρικής παρεμβολής στο σημείο e (δες Σχ. 1.7) χρησιμοποιεί δύο κόμβους από δεξιά, P , W και δύο κόμβους από αριστερά, E και EE . Οι συντελεστές a_0, a_1, a_2, a_3 του κυβικού πολυωνύμου παρεμβολής $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ μπορεί να υπολογισθούν από τις τιμές της μεταβλητής στα σημεία P , W , E και EE η δε παρεμβολή στο σημείο e για ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα είναι

$$\varphi_e = \frac{-3\varphi_W + 27\varphi_P + 27\varphi_E - 3\varphi_{EE}}{48} \quad (1.14)$$

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο στο σημείο e από τις τιμές της μεταβλητής στα σημεία P , W , E και EE η τιμή της πρώτης παραγώγου είναι

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_e = \frac{\varphi_W - 27\varphi_P + 27\varphi_E - \varphi_{EE}}{24(\Delta x)} \quad (1.15)$$

Η παρεμβολή με ανώτερης τάξης πολυώνυμα σε δομημένα πλέγματα είναι σχετικά απλή, μπορεί να επιτευχθεί με μονοδιάστατα πολυώνυμα παρεμβολής και δεν απαιτεί εκτεταμένους υπολογισμούς. Σε αδόμητα όμως πλέγματα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολυδιάστατα πολυώνυμα παρεμβολής $\varphi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3yx + a_4y^2$ φαίνεται ότι και η τρίτης τάξης παρεμβολή δεν είναι τόσο απλή. Τέταρτης τάξης παρεμβολή μπορεί επίσης να επιτευχθεί και με την χρήση κυβικών σπληνών (cubic splines) που εξασφαλίζουν συνέχεια της συνάρτησης παρεμβολής και των δύο πρώτων παραγώγων της.

1.3.5 Compact Σχήματα Παρεμβολής Ανώτερης Τάξης

Το πλήθος τιμών που υπεισέρχονται στο σχήματα παρεμβολής ανώτερης τάξης μπορεί να ελαττωθεί όταν χρησιμοποιήσουμε σχήματα παρεμβολής για την συνάρτηση και την πρώτη παράγωγό της από δύο κόμβους υπολογισμού που βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου e πάνω στο όριο του ΟΕ. Για ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα η σχέση παρεμβολής είναι

$$\varphi_e = \frac{\varphi_P + \varphi_E}{2} + \frac{\Delta x}{8} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E \right] \quad (1.16)$$

Ο πρώτος όρος της Εξ. (1.15) αναπαριστά μία δεύτερης τάξης ακρίβειας γραμμική παρεμβολή. Ο δεύτερος όρος είναι μία παρεμβολή της δεύτερης παραγώγου στο σφάλμα αποκοπής. Οι παράγωγοι στην Εξ. (1.15) στα σημεία P και E δεν είναι γνωστές. Οι παράγωγοι στα σημεία P και E προσεγγίζονται με κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{\varphi_E + \varphi_W}{2\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E = \frac{\varphi_{EE} + \varphi_P}{2\Delta x} \quad (1.17)$$

Με αντικατάσταση των παρεμβολών των παραγώγων από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκεται η παρεμβολή τέταρτης τάξης πολυωνύμου στο όριο του υπολογιστικού κελιού (cell face) που δίνεται από την σχέση

$$\varphi_e = \frac{\varphi_P + \varphi_E}{2} + \frac{\varphi_P + \varphi_E - \varphi_W + \varphi_{EE}}{16} + O(\Delta x)^4 \quad (1.18)$$

Χρησιμοποιώντας δεδομένα από τις δύο πλευρές του κελιού και την προσέγγιση της παραγώγου από την μία πλευρά είναι δυνατόν να επιτύχουμε μία προσέγγιση τύπου QUICK

$$\varphi_e = \frac{3}{4}\varphi_E + \frac{1}{4}\varphi_D + \frac{\Delta x}{4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_U \quad (1.19)$$

2 Η Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων για νόμους διατήρησης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (ΠΟ) για τις εξισώσεις συμπιεστής μη συνεκτικής ροής που είναι γνωστές ως εξισώσεις Euler και στην συντηρητική τους μορφή αποτελούν νόμους διατήρησης για την μάζα, την ορμή, και την ενέργεια. Οι βασικές αρχές της μεθόδου των ΠΟ παρουσιάζονται για τις μονοδιάστατες εξισώσεις Euler, τις ιδιότητες των οποίων εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι εξισώσεις Euler περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους μεταφοράς και είναι υπερβολικού χαρακτήρα.

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιεί την ολοκληρωματική μορφή των εξισώσεων Euler, που η μονοδιάστατη μορφή τους μετά την εφαρμογή του θεωρήματος Gauss είναι

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{q} dx dy + \int_{\partial V} \mathbf{F} dy = 0 \quad (2.1)$$

όπου \mathbf{q} είναι το διάνυσμα των εξαρτημένων συντηρητικών μεταβλητών και \mathbf{F} είναι το διάνυσμα των ροών που για μονοδιάστατη ροή είναι.

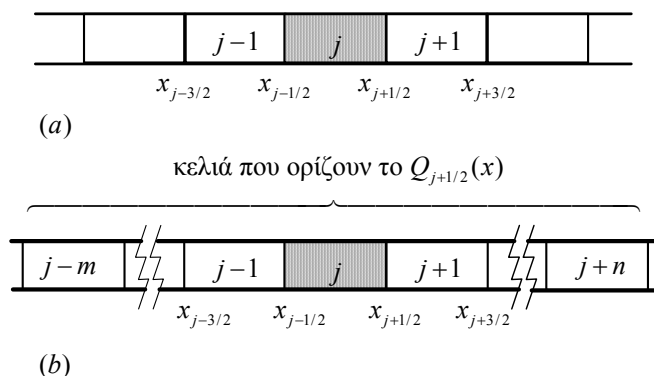
$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho e u + p u \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Οι πολυδιάστατες εξισώσεις Euler είναι της μορφής $\mathbf{q}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ και η εφαρμογή της μεθόδου των ΠΟ απαιτεί την κατασκευή υπολογιστικού πλέγματος. Οι βασικές διαδικασίες διακριτοποίησης, αναδόμησης, και υπολογισμού της αριθμητικής ροής είναι οι ίδιες και στις πολυδιάστατες εξισώσεις.

2.2 Διακριτοποίηση με πεπερασμένους όγκους

Ο νόμος διατήρησης που εκφράζει η Εξ. (2.1) εφαρμόζεται σε ένα σύνολο διακριτών όγκων V_j , $j=1, \dots, M$ (δες Σχ. 2.1a) που χρησιμοποιείται για την διακριτοποίηση του χωρίου ορισμού.

Το κάθε υπολογιστικό κελί, η πεπερασμένος όγκος, ορίζεται από το κέντρο βάρους (KB) του τετράπλευρου χωρίου που αναπαριστά τον ΠΟ (ουσιαστικά το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζει τον ΠΟ στην μία διάσταση) και βρίσκεται στην θέση x_j . Οι πλευρές του κελιού βρίσκονται στην ενδιάμεση απόσταση από τα KB των διαδοχικών κελιών, δηλαδή στις θέσεις $x_{j-1/2}$ και $x_{j+1/2}$.



Σχήμα 2.1 (a) Πλέγμα πεπερασμένων όγκων και (b) ορισμός της μεταβλητής $Q_{j+1/2}$.

Η μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής στον ΠΟ (volume averaged vector of the dependent variable) συμβολίζεται με Q_j και ορίζεται από

$$Q_j(t) = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} \mathbf{q} dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{V_j} \mathbf{q} dx dy \quad (2.3)$$

Όπου σε μία διάσταση το ύψος του κελιού Δy είναι σταθερό και μπορεί να θεωρηθεί ίσο με την μονάδα. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος ροής \mathbf{F} συμβολίζεται ως $F_{j+1/2}$ και ορίζεται

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{A_{j+1/2}} \int_{x_{j+1/2}} \mathbf{F} dy = \frac{1}{\Delta y} \int_{x_{j+1/2}} \mathbf{F} dy \quad (2.4)$$

όπου $A_{j+1/2}$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της έδρας του κελιού που βρίσκεται στην θέση $x_{j+1/2}$ και στην μία διάσταση είναι μονάδα. Ο ορισμός του διακριτού διανύσματος ροής $F_{j+1/2}$ προϋποθέτει ότι η διακριτή τιμή $Q_{j+1/2}$ πάνω στην πλευρά του κελιού είναι γνωστή. Όπως θα δούμε παρακάτω η τιμή $Q_{j+1/2}$ ορίζεται σαν μία συνάρτηση

$$Q_{j+1/2} = f(Q_{j-m}, Q_{j-m+1}, \dots, Q_{j-1}, Q_j, \dots, Q_{j+1}, \dots, Q_{j+n-1}, Q_{j+n}) \quad (2.5)$$

των μέσων τιμών Q_{j+s} , $s \in [-m, n]$ στα ΚΒ γειτονικών κελιών. Δηλαδή η τιμή $Q_{j+1/2}$ προσδιορίζεται γενικά από ένα εύρος μέσων τιμών που περιλαμβάνει $-m$ κελιά εξ αριστερών από το κελί j και n κελιά εκ δεξιών του κελιού j (δες Σχ. 2.1b). Το πλήθος των κελιών που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της τιμής $Q_{j+1/2}$ πάνω στην

πλευρά του κελιού καθορίζει τον βαθμό ακρίβειας της μεθόδου ΠΟ όπως θα δούμε παρακάτω.

Με τους παραπάνω ορισμούς η διακριτή μορφή των εξισώσεων Euler στην μία διάσταση είναι

$$\frac{d}{dt} Q_j V_j + (F_{j+1/2} \Delta y - F_{j-1/2} \Delta y) = 0 \quad (2.6)$$

ή

$$\frac{dQ_j}{dt} + \frac{(F_{j+1/2} - F_{j-1/2})}{\Delta x} = 0 \quad (2.7)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την ημι-διακριτή μέθοδο επίλυσης των νόμων διατήρησης όπου μετά την χωρική διακριτοποίηση μετασχηματίζονται σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Θεωρώντας παραδείγματος χάριν την πεπλεγμένη (implicit) χρονική διακριτοποίηση

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F_{j+1/2}^{n+1} - F_{j-1/2}^{n+1}) dt \quad (2.8)$$

και εφαρμόζοντας τον δεύτερης τάξης ακρίβειας ($m=2$) κανόνα ολοκλήρωσης του τραπεζίου για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στον χρόνο

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F_{j+1/2} dt = \Delta t \left[\theta F(Q_{j+1/2}^{n+1}) + (1-\theta) F(Q_{j+1/2}^n) \right] + O(\Delta t^m)$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι πρώτης τάξης ακρίβειας και το σχήμα είναι ρητό όταν $\theta = 0$, ενώ για $\theta = 1/2$ έχουμε δεύτερης τάξης ακρίβεια και πεπλεγμένο σχήμα.

Η χρονική ολοκλήρωση που βασίζεται σε μεθόδους αριθμητικής επίλυσης συνήθων διαφορικών που θα αναπτυχθεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο. Η το διακριτό σχήμα για την επίλυση της Εξ. (2.1) είναι.

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \theta [F_{j+1/2}^{n+1} - F_{j-1/2}^{n+1}] \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\theta) [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] \right\} + O(\Delta t^m, \Delta x^n) \quad (2.9)$$

Η τάξη ακρίβειας της διακριτοποίησης στον χώρο, n , και στον χρόνο, m , που συμβολίζεται με $O(\Delta t^m, \Delta x^n)$ στην Εξ. (2.9) εξαρτάται από το σφάλμα διακριτοποίησης ϵ που ορίζεται ως

$$Q_j^{n+1} \Big|_{\text{discr}} = Q_j^{n+1} \Big|_{\text{exact}} + \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) \quad (2.10)$$

και εξαρτάται από την μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης και την τάξη ακρίβειας που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της τιμής $Q_{j+1/2}$ πάνω στην πλευρά του κελιού.

Υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούμε την δεύτερης τάξης ακρίβειας προσέγγιση για τον προσδιορισμό της τιμής $Q_{j+1/2}$ πάνω στην πλευρά του κελιού, που ορίζεται ως μέσος όρος των τιμών Q_j, Q_{j+1} στα ΚΒ των γειτονικών κελιών.

$$Q_{j+1/2} = \frac{1}{2}(Q_j + Q_{j+1}) \quad (2.11)$$

Δηλαδή υποθέτουμε ότι η συνάρτηση της Εξ. (2.5) είναι η μέση τιμή.

Με την προσέγγιση της Εξ. (2.11) βρίσκουμε ότι η ροή $F_{j+1/2}$ πάνω στην πλευρά του κελιού είναι

$$F_{j+1/2} = \mathbf{F}(Q_{j+1/2}) \quad (2.12)$$

Η αριθμητική ευστάθεια της προσέγγισης που κάναμε με τις Εξ. (2.11) και (2.12) μπορεί να μελετηθεί με την μέθοδο του von Neumann. Η μέθοδος μελέτης αριθμητικής ευστάθειας κατά von Neumann προϋποθέτει ομοιόμορφο διαμερισμό και περιοδική λύση, δηλαδή $Q_1 = Q_M$, στο χωρίο επίλυσης $L = (M-1)\Delta x$. Υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση που παρεμβάλει την διακριτή προσεγγιστική λύση είναι $Q(x,t)$

$$Q(x,t) = Q_j(t) \quad (2.13)$$

Η αναπαράσταση της συνεχούς συνάρτησης $Q(x,t)$ με σειρά Fourier είναι

$$Q(x,t) = \sum_{l=-N+1}^{l=N} \hat{Q}_l(t) e^{i\frac{2\pi l}{L}x} = \sum_{l=-N+1}^{l=N} \hat{Q}_l(t) e^{ikx} \quad (2.14)$$

όπου $k = 2\pi l / L$ είναι ο κυματαριθμός και οι συντελεστές Fourier $\hat{Q}_l(t)$ είναι μιγαδικοί και βρίσκονται από τις τιμές της προσεγγιστικής λύσης για κάποιο χρόνο t_n από τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\hat{Q}_l(t) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{j=2N} Q_j(t^n) e^{-ikx_j} \quad (2.15)$$

Η διακριτή μορφή των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler (δες Εξ. 2.7) είναι

$$\frac{dQ_j}{dt} + \frac{(F_{j+1/2} - F_{j-1/2})}{\Delta x} = 0 \quad (2.16)$$

Η προσέγγιση του διανύσματος ροής στην πλευρά του κελιού $F_{j+1/2}$ μπορεί να εκφρασθεί σαν ανάπτυγμα Taylor γύρω από την τιμή Q_j στο KB του κελιού

$$F_{j+1/2} = F(Q_{j+1/2}) = F(Q_j) + \frac{\partial F(Q_j)}{\partial Q_j} (\Delta Q) + O((\Delta Q)^2) \quad (2.17)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση της Εξ. (2.12) για τον υπολογισμό της προσέγγισης του διανύσματος $F_{j+1/2}$, ο όρος $A_j = A_j(Q_j) = \partial F(Q_j) / \partial Q_j$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, και $\Delta Q = Q_{j+1/2} - Q_j$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Εξ. (2.11) βρίσκουμε

$$F_{j+1/2} = F(Q_j) + \frac{1}{2} A_j (Q_{j+1} - Q_j) + O((\Delta Q)^2) \quad (2.18)$$

Παρόμοια βρίσκουμε ότι η προσέγγιση του διανύσματος $F_{j-1/2}$ είναι

$$F_{j-1/2} = F(Q_j) - \frac{1}{2} A_j (Q_{j+1} - Q_j) + O((\Delta Q)^2) \quad (2.19)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.18), και (2.19) στην Εξ. (2.16) βρίσκουμε

$$\frac{dQ_j}{dt} + A_j \frac{(Q_{j+1} - Q_{j-1})}{2\Delta x} = 0 \quad (2.20)$$

Υποθέτουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας παραμένει σταθερός για μικρά μήκη διαμερισμού Δx με αντικατάσταση της Εξ. (2.14) στην Εξ. (2.20) βρίσκουμε ότι η συντελεστές της σειράς Fourier που παρεμβάλει την προσεγγιστική λύση στα KB των κελιών ικανοποιούν την σχέση

$$\sum_{l=-N+1}^{l=N} \frac{d\hat{Q}_l}{dt} e^{ikx_j} + \frac{1}{2\Delta x} A \sum_{l=-N+1}^{l=N} \hat{Q}_l [e^{ik(x_j+\Delta x)} - e^{ik(x_j-\Delta x)}] = 0 \quad (2.21)$$

που ικανοποιείται όταν οι συντελεστές των όρων του αναπτύγματος Fourier μηδενίζονται, δηλαδή όταν

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}_l}{dt} + \frac{i \sin k\Delta x}{\Delta x} A \hat{Q}_l = 0, \quad l = -N+1, \dots, N, \quad k = \frac{2\pi l}{L} \\ \text{ή} \\ \frac{d\hat{Q}_l}{dt} + G \hat{Q}_l = 0, \quad k = \frac{\pi}{\Delta x} \frac{(-N+1)}{N}, \dots, \frac{\pi}{\Delta x}, \quad G = \frac{i \sin k\Delta x}{\Delta x} A \end{aligned} \quad (2.22)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορεί να λυθούν αναλυτικά με την χρήση της σχέσης διαγωνιοποίησης $A = T\Lambda T^{-1}$ και ορίζοντας $\tilde{Q}_l = T^{-1}\hat{Q}_l$

$$\frac{d\hat{Q}_l}{dt} + G\hat{Q}_l = \frac{d\tilde{Q}_l}{dt} + \beta\Lambda\tilde{Q}_l = 0, \quad \beta = \frac{i \sin k\Delta x}{\Delta x}, \quad G = \beta A \quad (2.23)$$

ή

$$\frac{d\tilde{Q}_l}{dt} + \beta\Lambda\tilde{Q}_l = 0, \quad \tilde{Q}_l = T^{-1}\hat{Q}_l \quad (2.24)$$

Η παραπάνω συνήθης διαφορική έχει λύση

$$\tilde{Q}_{k_m}(t) = \tilde{Q}_{k_m}(0)e^{-\Omega_m t}, \quad m = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad k = \frac{\pi(1-N)}{\Delta x}, \dots, \frac{\pi}{\Delta x} \quad (2.25)$$

όπου $\Omega_m = \beta\lambda_m$ είναι μιγαδικές σταθερές και λ_m είναι οι ιδιοτιμές. Γράφοντας τις μιγαδικές σταθερές $\Omega_m = (\Omega_R)_m + i(\Omega_I)_m$ έχουμε

$$\tilde{Q}_{k_m}(t) = \tilde{Q}_{k_m}(0)e^{-(\Omega_R)_m t} e^{-i(\Omega_I)_m t}, \quad m = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad k = \frac{\pi(1-N)}{\Delta x}, \dots, \frac{\pi}{\Delta x} \quad (2.26)$$

Η συνθήκη ευστάθειας της λύσης (δηλαδή η συνθήκη που εξασφαλίζει ότι η λύση δεν αυξάνεται εκθετικά στον χρόνο) είναι

$$(\Omega_R)_m \geq 0 \quad (2.27)$$

αλλά

$$\begin{aligned} (\Omega_R)_m &= 0 \\ (\Omega_I)_m &= \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} \lambda_m \end{aligned} \quad (2.28)$$

Συνεπώς η προσέγγιση των Εξ. (2.11) και (2.12) δίνει αριθμητική λύση που είναι ευσταθής

3 Αναδόμηση (Εύρεση των $Q_{j+1/2}$) στα Όρια των ΠΟ από τις Λύσεις στα ΚΒ Γειτονικών Κελιών

Η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση των τιμών $Q_{j+1/2}$ της προσεγγιστικής λύσης στις πλευρές των αριθμητικών κελιών από τις τιμές της λύσης στα ΚΒ των γειτονικών κελιών $Q_{j-m}, \dots, Q_j, \dots, Q_{j+n}$ ονομάζεται αναδόμηση (reconstruction). Η κατανόηση της διαδικασίας αναδόμησης είναι βασική για την εφαρμογή της μεθόδου των ΠΟ. και θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι η ημι-διακριτή μορφή της αριθμητικής λύσης των μονοδιάστατων Euler έχει δίνεται από

$$\frac{dQ_j}{dt} + \frac{(F_{j+1/2} - F_{j-1/2})}{\Delta x} = 0 \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω σχέση Q_j είναι η αριθμητική, ή προσεγγιστική λύσης, που ορίζεται ως η μέση στον στοιχειώδη όγκο του υπολογιστικού κελιού

$$Q_j(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{V_j} \mathbf{q} \, dx \, dy \quad (3.2)$$

και

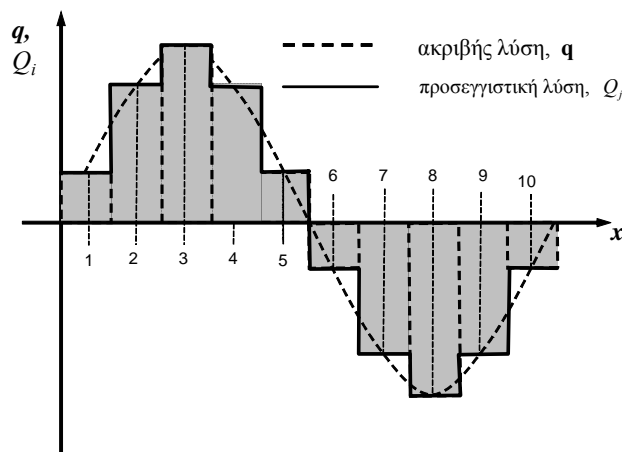
$$F_{j\pm 1/2} = \frac{1}{A_{j\pm 1/2}} \int_{x_{j\pm 1/2}} \mathbf{F} \, dy \quad (3.2)$$

είναι προσέγγιση του διανύσματος ροής (spatial flux quadrature) που για μονοδιάστατη ροή όπου $A_{j\pm 1/2} = dy$ είναι

$$F_{j\pm 1/2} = \mathbf{F}_{j\pm 1/2} \quad (3.3)$$

δηλαδή το διάνυσμα ροής υπολογισμένο για $Q_{j\pm 1/2}$, $F_{j\pm 1/2} = \mathbf{F}_{j\pm 1/2} = \mathbf{F}(Q_{j\pm 1/2})$.

Είναι προφανές ότι η δικριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς του μέσου όρου (δες. Εξ. 3.2) έχει σαν αποτέλεσμα την απώλεια πληροφορίας. Η απώλεια πληροφορίας από την διακριτοποίηση από τις μέσες τιμές των κελιών μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης με δέκα πεπερασμένους όγκους αναπαρίσταται στο Σχ. 3.1. Η απώλεια πληροφορίας είναι φανερή. Ασφαλώς η προσέγγιση βελτιώνεται με την αύξηση του αριθμού διαστημάτων.



Σχήμα 3.1 Ακριβής λύση, $q(x) = \sin x$, και προσεγγιστική λύση, Q_j , που είναι ο σταθερή μέσα σε κάθε υπολογιστικό κελί και ορίζεται ως μέσος όρος του $q(x)$.

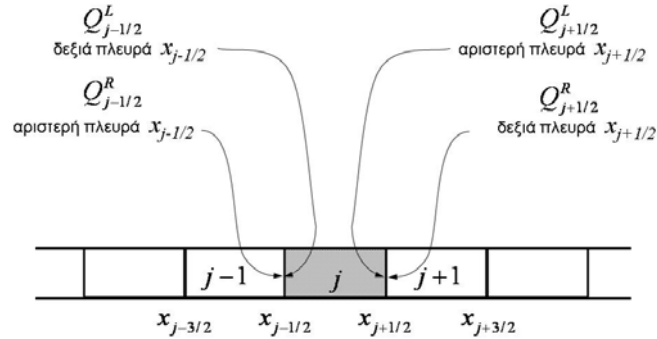
Η αριθμητική επίλυση της Εξ. (3.1) απαιτεί τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $F_{j+1/2}$ στην πλευρά του στοιχειώδους όγκου, που απαιτεί την τιμή του διανύσματος $Q_{j+1/2}$. Η διακριτή προσεγγιστική λύση Q_j είναι η σταθερή μέσα στον στοιχειώδη όγκο μέση τιμή της ακριβούς λύσης $q(x)$. Το βασικό πρόβλημα είναι η δημιουργία μίας συνάρτησης $Q_j(x)$ που να παρέχει καλύτερη προσέγγιση στην ακριβή λύση $q(x)$ από αυτή που παρέχει η προσέγγιση Q_j . Η βελτιωμένη αυτή προσέγγιση $Q_j(x)$ ονομάζεται αναδόμηση (reconstruction) της προσεγγιστικής λύσης και επιτυγχάνεται με την χρήση της προσέγγισης Q_j και γειτονικών προσεγγίσεων Q_{j-m} , $m = 1, 2, \dots$, Q_{j+n} , $n = 1, 2, \dots$. Η δημιουργία τη αναδομημένης λύσης $Q_j(x)$ στον στοιχειώδη όγκο j επιτρέπει τον ακριβέστερο υπολογισμό της τιμής $Q_{j+1/2}$ που απαιτείται για το διάνυσμα ροής $F_{j+1/2}$ στο όριο $j+1/2$ του στοιχειώδους όγκου. Ο υπολογισμός του $Q_{j+1/2}$ μετά από την αναδόμηση μπορεί να δημιουργήσει ασυνέχειες της μορφής $Q_j(x_{j+1/2}) \neq Q_{j+1}(x_{j+1/2})$. Ο αλγόριθμος επίλυσης λαμβάνει υπ' όψη αυτή την ιδιομορφία της αναδόμησης όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής.

Η πιο απλή αναδόμηση είναι η πρώτης τάξης ακρίβειας προσέγγιση $Q_j(x) = Q_j$. Η πρώτης τάξης ακρίβειας προσέγγιση εισάγει όμως μεγάλη διάχυση στην αριθμητική λύση και δεν χρησιμοποιείται στην πράξη. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μεθόδους αναδόμησης που παρέχουν μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια.

3.2 Αναδόμηση με την χρήση της παραγώγου συνάρτησης (primitive function)

Η μέθοδος αναδόμησης με την χρήση της παραγώγου συνάρτησης, που επιτυγχάνουν ανώτερης τάξης ακρίβεια, παρουσιάστηκε αρχικά από τους Collella and Woodward (1989) και τον Harten (1987). Η ιδέα αυτής της μεθόδου είναι η

κατασκευή ενός πολυωνύμου μέσα σε κάθε στοιχειώδη όγκο (υπολογιστικό κελί) j που προσεγγίζει την ακριβή λύση με τον επιθυμητή τάξη ακρίβειας.



Σχήμα 3.2 Αναδόμηση στις πλευρές του υπολογιστικού κελιού j .

Το πολυώνυμο που προσεγγίζει την ακριβή λύση $q(x)$ εκ δεξιών του $x_{j-1/2}$ στο κελί j συμβολίζεται ως $Q_{j-1/2}^R$, ενώ το πολυώνυμο που προσεγγίζει την ακριβή λύση $q(x)$ στο άλλο όριο του κελιού j δηλαδή εξ αριστερών του $x_{j+1/2}$ συμβολίζεται με $Q_{j+1/2}^L$ (δες Σχ. 3.2). Η διαδικασία αναδόμησης επαναλαμβάνεται για όλα τα υπολογιστικά κελιά. Το διάνυσμα ροής $F_{j-1/2}$ προσδιορίζεται από τις αναδομημένες τιμές $Q_{j-1/2}^L$ και $Q_{j-1/2}^R$ ενώ το διάνυσμα ροής $F_{j+1/2}$ προσδιορίζεται από τις αναδομημένες τιμές $Q_{j+1/2}^L$ και $Q_{j+1/2}^R$.

Η διαδικασία αναδόμησης που περιγράψαμε παραπάνω παρουσιάζεται αναλυτικά χρησιμοποιώντας σαν παράδειγμα την αναδόμηση της λύσης στο υπολογιστικό κελί j με χρήση των μέσων τιμών της διακριτής λύσης

$Q_{j-1/2}$, Q_j , και $Q_{j+1/2}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση (primitive function)

$$I(x) = \int_{x_{j-3/2}}^x Q dx, \quad x_{j-3/2} \leq x \leq x_{j+3/2}$$

Τότε

$$I(x_{j-3/2}) = 0$$

$$I(x_{j-1/2}) = \Delta x Q_{j-1}$$

$$I(x_{j+1/2}) = \Delta x (Q_{j-1} + Q_j)$$

$$I(x_{j+3/2}) = \Delta x (Q_{j-1} + Q_j + Q_{j+1})$$

Το μοναδικό τριτοβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ που παρεμβάλει την συνάρτηση $I(x)$ είναι

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_{j-3/2}) + a_2(x - x_{j-3/2})(x - x_{j-1/2}) \\ + a_3(x - x_{j-3/2})(x - x_{j-1/2})(x - x_{j+1/2})$$

Και οι συντελεστές του βρίσκονται από τις διαιρεμένες διαφορές

$$a_0 = I[x_{j-3/2}] = I(x_{j-3/2})$$

$$a_1 = I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}] = \frac{I[x_{j-1/2}] - I[x_{j-3/2}]}{x_{j-1/2} - x_{j-3/2}} = \frac{Q_{j-1}}{x_{j-1/2} - x_{j-3/2}}$$

$$a_2 = I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = \frac{I[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] - I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}]}{x_{j+1/2} - x_{j-3/2}}$$

$$a_3 = I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] = \frac{I[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] - I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}{x_{j+3/2} - x_{j-3/2}}$$

και το σφάλμα προσέγγισης είναι τέταρτης τάξης

Η συνάρτηση αναδόμησης που είναι η μέση τιμή στο κελί ορίζεται ως

$$Q_j(x) = \frac{dP(x)}{dx}, \quad x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}$$

και

$$Q_j(x) = a_1 + a_2[(x - x_{j-3/2}) + (x - x_{j-1/2})] \\ + a_3[(x - x_{j-1/2})(x - x_{j+1/2}) + (x - x_{j-3/2})(x - x_{j+1/2}) + (x - x_{j-3/2})(x - x_{j-1/2})]$$

αλλά

$$I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}] = Q_{j-1}$$

$$I[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = Q_j$$

$$I[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] = Q_{j+1}$$

$$I[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = \frac{Q_j - Q_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$I[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] = \frac{Q_{j+1} - Q_j}{2\Delta x}$$

και ορίζοντας

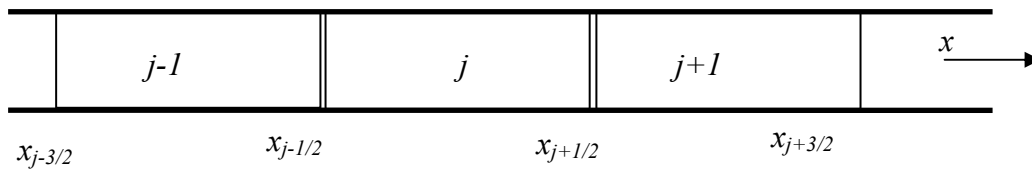
$$\Delta Q_{j+1/2} = Q_{j+1} - Q_j, \quad \zeta = x - x_j,$$

$$a_1 = Q_{j-1}, \quad a_2 = \frac{\Delta Q_{j-1/2}}{2\Delta x}, \quad a_3 = \frac{\Delta Q_{j+1/2} - \Delta Q_{j-1/2}}{6(\Delta x)^2}$$

βρίσκουμε

$$Q_j(x) = Q_j - \frac{\Delta Q_{j+1/2} - \Delta Q_{j-1/2}}{24} + \frac{\Delta Q_{j+1/2} - \Delta Q_{j-1/2}}{2(\Delta x)} \zeta + \frac{\Delta Q_{j+1/2} - \Delta Q_{j-1/2}}{2(\Delta x)^2} \zeta^2$$

Δηλαδή η αναδόμηση $Q_j(x)$ ορίζεται από τρία κελιά



Εφαρμόζοντας την εξίσωση αναδόμησης βρίσκουμε

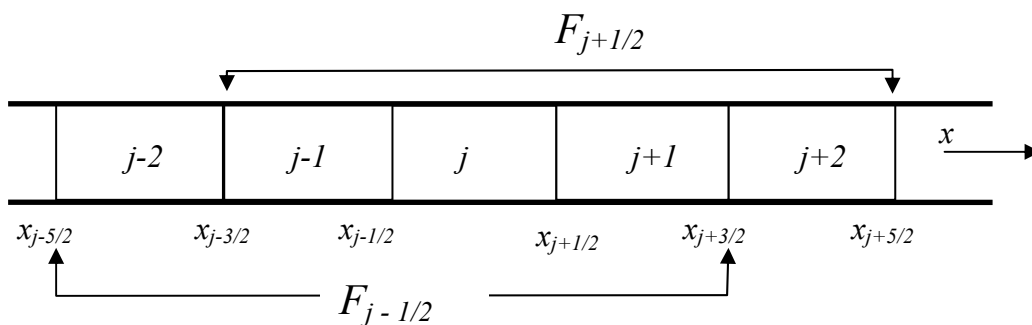
$$Q_{j-1/2}^L = Q_{j-1} + \frac{1}{3} \Delta Q_{j-1/2} + \frac{1}{6} \Delta Q_{j-3/2}$$

$$Q_{j-1/2}^R = Q_j - \frac{1}{3} \Delta Q_{j-1/2} - \frac{1}{6} \Delta Q_{j+1/2}$$

$$Q_{j+1/2}^L = Q_j + \frac{1}{3} \Delta Q_{j+1/2} + \frac{1}{6} \Delta Q_{j-1/2}$$

$$Q_{j+1/2}^R = Q_{j+1} - \frac{1}{3} \Delta Q_{j+1/2} - \frac{1}{6} \Delta Q_{j+3/2}$$

και τα κελιά που χρησιμοποιούνται για την αναδόμηση του διανύσματος ροής είναι



4. Οι εξισώσεις μη-συνεκτικής, συμπιεστής ροής (εξισώσεις Euler)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση μη-συνεκτικού (χωρίς ιξώδες) ρευστού καλύπτουν μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών της αεροναυπηγικής, διότι περιγράφουν με αρκετή ακρίβεια την ροή και τα αναπτυσσόμενα φορτία γύρω από αεροδυναμικά σώματα σε μικρή γωνία πρόσπτωσης όπου η ροή δεν παρουσιάζει αποκόλληση. Επί πλέον, η μεθοδολογία που ακολουθείται για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων μη-ιξώδους ροής (εξισώσεων Euler) αποτελεί την βάση των αριθμητικών μεθόδων για συμπιεστή ροή, η ανάπτυξη των οποίων είχε σημαντική άνθηση τα τελευταία χρόνια. Όλες οι πρακτικές εφαρμογές αναφέρονται σε αριθμητικές επιλύσεις δυοδιάστατων (π.χ. γύρω από αεροτομές) και τρισδιάστατων πεδίων ροής. Όπως θα δείξουμε όμως στα παρακάτω κεφάλαια, οι αριθμητικοί αλγόριθμοι για την επίλυση των εξισώσεων Euler αλλά και των εξισώσεων Navier-Stokes σε περισσότερες από μία διαστάσεις βασίζονται στην θεωρία για την για τις μονοδιάστατες εξισώσεις Euler. Είναι συνεπώς ουσιαστικό να κατανοήσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler και του αλγόριθμους που χρησιμοποιούμε για την επίλυση τους. Για τον λόγο αυτό, στο προκαταρκτικό αυτό κεφάλαιο αναπτύσσεται σύντομα η βασική θεωρία των μαθηματικών ιδιοτήτων των εξισώσεων Euler σε μία διάσταση. Περισσότερο λεπτομερής ανάπτυξη των μαθηματικών ιδιοτήτων των εξισώσεων Euler και η πολυδιάστατη θεωρία τους βρίσκεται στα βιβλία Courant and Friedrichs (1948) και Hirsch (1988).

4.1 Η διαφορική μορφή των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler

Η διαφορική μορφή των εξισώσεων Euler αποτελεί την βάση για τις αριθμητικές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών των φασματικών μεθόδων και των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων (με χρήση της ασθενούς μορφής), ενώ οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων βασίζονται στην ολοκληρωτική μορφή. Οι τρεις πλέον βασικές διαφορικές μορφές που είναι χρήσιμες στην ανάπτυξη αριθμητικών αλγορίθμων επίλυσης των εξισώσεων Euler είναι η συντηρητική μορφή, η μη συντηρητική μορφή και η χαρακτηριστική μορφή που παρουσιάζονται παρακάτω.

4.2 Συντηρητική μορφή (conservative form)

Η συντηρητική διαφορική μορφή των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler είναι

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών και $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{q})$ είναι το διάνυσμα ροής. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ είναι

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, u είναι η ταχύτητα κατά την κατεύθυνση x και e είναι η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{q}(x,t)$ έχει σαν συνιστώσες ποσότητες που διατηρούνται, όπως η μάζα ανά μονάδα όγκου ρ , η ορμή ρu και η ενέργεια. Το διάνυσμα ροής $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{q})$ έχει συνιστώσες

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ (\rho e + p)u \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

και η πίεση συνδέεται με την ολική ενέργεια με την καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \rho u^2 / 2) \quad (4.4)$$

Το διάνυσμα ροής μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση των συνιστωσών του διανύσματος συντηρητικών μεταβλητών

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ (\rho e + p)u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + (\gamma - 1) \left(q_3 - \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{q_1} \right) \\ \frac{q_2 q_3}{q_1} + (\gamma - 1) \frac{q_2}{q_1} \left(q_3 - \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{q_1} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Η συντηρητική μορφή των εξισώσεων Euler αποτελεί την βάση για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για ροές που περικλείουν ασυνέχειες. Η χρήση της συντηρητικής μορφής με μεθόδους πεπερασμένων όγκων για το διάστημα $0 \leq x \leq L$ δίνει

$$\int_0^L \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right] dx = 0$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \mathbf{q} dx = \mathbf{F}(0,t) - \mathbf{F}(L,t)$$

Που σημαίνει ότι η συνολική μεταβολή των συντηρητικών μεταβλητών στην μονάδα του χρόνου μέσα στο χωρίο της αριθμητικής επίλυσης προκαλείται από την συνολική ροή μέσα στο χωρίο.

4.2.1 Μη συντηρητική μορφή (nonconservative form)

Με την εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας μπορούμε να μετασχηματίσουμε την συντηρητική μορφή των εξισώσεων Euler που δίνεται από την Εξ. (4.1) στην παρακάτω μη συντηρητική μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

όπου A είναι ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix)

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)}{2} \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 & (3-\gamma) \left(\frac{q_2}{q_1} \right) & (\gamma-1) \\ -\gamma \left(\frac{q_2 q_3}{q_1^2} \right) + (\gamma-1) \left(\frac{q_3}{q_1} \right)^3 & \gamma \left(\frac{q_3}{q_1} \right) + \frac{3(\gamma-1)}{2} \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 & \gamma \left(\frac{q_2}{q_1} \right) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Το Ιακωβιανό μητρώο εκφράζεται σε σχέση με την ταχύτητα και ενέργεια ως

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)}{2} u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\gamma eu + (\gamma-1)u^3 & \gamma e + \frac{3(\gamma-1)}{2} u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Αντικαθιστώντας την ενέργεια με $e = 0.5u^2 + c^2 / \gamma(\gamma-1)$ όπου $c^2 = \gamma RT = \gamma p / \rho$ έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)}{2} u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\frac{uc^2}{(\gamma-1)} + \frac{(\gamma-2)}{2} u^3 & \frac{c^2}{(\gamma-1)} + \frac{(3-2\gamma)}{2} u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + c \\ \lambda_3 &= u - c \end{aligned} \quad (4.10)$$

Δηλαδή οι εξισώσεις Euler είναι υπερβολικού τύπου επειδή οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Τα εκ δεξιών ιδιοδιανύσματα του μητρώου A είναι

$$r_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{Bmatrix}, \quad r_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ u+c \\ H+uc \end{Bmatrix}, \quad r_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ u-c \\ H-uc \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Όπου H είναι η ολική ενθαλπία ανά μονάδα μάζας $H = c_p T + 0.5u^2$. Τα αντίστοιχα εξ αριστερών ιδιοδιανύσματα του A είναι

$$\begin{aligned} l_1 &= \left\{ 1 - \frac{(\gamma-1)u^2}{2c^2}, \quad (\gamma-1)\frac{u}{c^2}, \quad -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \right\} \\ l_2 &= \left\{ \frac{(\gamma-1)u^2}{4c^2} - \frac{u}{2c}, \quad -(\gamma-1)\frac{u}{2c^2} + \frac{1}{2c}, \quad \frac{(\gamma-1)}{c^2} \right\} \\ l_3 &= \left\{ \frac{(\gamma-1)u^2}{4c^2} + \frac{u}{2c}, \quad -(\gamma-1)\frac{u}{2c^2} - \frac{1}{2c}, \quad \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Δηλαδή το μητρώο A μπορεί να διαγωνοποιηθεί και να εκφρασθεί στην μορφή

$$A = T \Lambda T^{-1} \quad (4.13)$$

όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών, T είναι το μητρώο των εκ δεξιών ιδιοδιανυσμάτων

$$T = r_{kj} = \begin{Bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \\ r_{k3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & u+c & u-c \\ \frac{u^2}{2} & H+uc & H-uc \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

και T^{-1} είναι το μητρώο των εκ δεξιών ιδιοδιανυσμάτων

$$T^{-1} = l_{kj} = \{l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}\}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 - \frac{(\gamma-1)u^2}{2c^2} & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{(\gamma-1)u^2}{4c^2} - \frac{u}{2c} & -(\gamma-1)\frac{u}{2c^2} + \frac{1}{2c} & \frac{(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{(\gamma-1)u^2}{4c^2} + \frac{u}{2c} & -(\gamma-1)\frac{u}{2c^2} - \frac{1}{2c} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Από τις Εξ. (4.14) και (4.15) προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^3 r_{ik} l_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^3 r_{ki} l_{kj} = \delta_{ij} \quad (4.16)$$

$$\text{ή} \quad TT^{-1} = I$$

Ακόμη με απ' ευθείας αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\mathbf{F} = [A]\mathbf{q} \quad (4.17)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μία σημαντική ιδιότητα του Ιακωβιανού μητρώου που ονομάζεται ιδιότητα ομοιογένειας (homogeneity property) και αποτελεί την βάση του σχήματος διαχωρισμού διανυσμάτων ροής (flux vector splitting του Steger and Warming 1981) στο οποίο θα αναφερθούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

4.2.2 Χαρακτηριστική μορφή (characteristic form)

Οι εξισώσεις μη συνεκτικής, συμπιεστής ροής έχουν κυματικό χαρακτήρα. Ο κυματικός χαρακτήρας των εξισώσεων Euler γίνεται κατανοητός όταν αυτές γραφούν στην χαρακτηριστική τους μορφή που θα αναπτύξουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Θεωρούμε την απλή κυματική εξίσωση

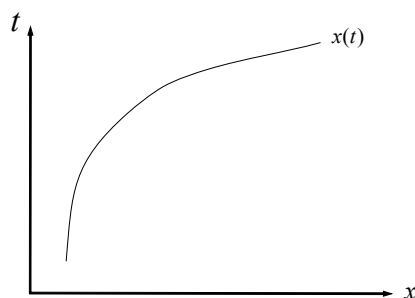
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

που ορίζεται στο χωρίο $-\infty < x < +\infty$ για την βαθμωτή συνάρτηση $f(x, t)$ με αρχική συνθήκη $f(x, 0) = g(x)$, όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης κύματος που θεωρείται θετική. Η γενική λύση της Εξ. (4.18) είναι

$$f(x, t) = g(x - ct) \quad (4.19)$$

και αναπαριστά την μετάδοση χωρίς αλλαγή της μορφής του αρχικού κύματος $g(x)$ προς τα δεξιά με ταχύτητα c .

Ο κυματικός χαρακτήρας της Εξ. (4.18) γίνεται πιο ευδιάκριτος όταν εξετάσουμε την συμπεριφορά της λύσης κατά μήκος της καμπύλης $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχ. 4.1.



Σχήμα 4.1 Παραμετρική μορφή της καμπύλης $x(t)$.

Η ολική μεταβολή της συνάρτησης f στον χρόνο t κατά μήκος της καμπύλης $x(t)$ βρίσκεται από την ολική παράγωγο που συμβολίζεται με df/dt και είναι

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.20)$$

Από τις Εξ. (4.18) και (4.20) προκύπτει ότι

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad (4.21)$$

Δηλαδή η τιμή της συνάρτησης f είναι αμετάβλητη πάνω στην καμπύλη $dx/dt = c$ ή $x - ct = \text{σταθ.}$ Για τον λόγο αυτό οι καμπύλες $x - ct = \text{σταθερό}$ ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες της Εξ. (4.18).

Ο κυματικός χαρακτήρας των εξισώσεων Euler γίνεται κατανοητός όταν αυτές γραφούν σε ανάλογη μορφή με την Εξ. (4.20) ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

όπου όταν αντί για την ενέργεια χρησιμοποιηθεί η εντροπία (για ροή που δεν έχει μετάδοση θερμότητας) η εξίσωση της εντροπίας είναι ήδη στην μορφή της Εξ. (4.20) και μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{d}{dt} x(t) = u(x(t), t) \quad (4.23)$$

δηλαδή η εντροπία είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται πάνω στην καμπύλη που ακολουθεί την κίνηση ενός σωματιδίου του ρευστού.

Από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής βρίσκουμε

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

ή

$$\frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{dx}{dt} = u+c \quad (4.24)$$

και

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

ή

$$\frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} - \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{dx}{dt} = u-c \quad (4.25)$$

Ο ορισμός της εντροπίας είναι

$$s - s_1 = c_v \log \left(\frac{p}{p_1} \right) - c_p \log \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \quad (4.26)$$

Δηλαδή όταν η εντροπία είναι ομοιόμορφη σε κάποια αρχική στιγμή τότε παραμένει ομοιόμορφη και η πυκνότητα ρ (συνεπώς και η ταχύτητα του ήχου $c^2 = \gamma p / \rho$) είναι συνάρτηση μόνο της πίεσης και η Εξ. (4.25) γράφεται

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{dp}{\rho c} + u \right] = 0 \quad (4.27)$$

αλλά $p/p_1 = (\rho/\rho_1)^\gamma$ και $c/c_1 = (p/p_1)^{(\gamma-1)/2\gamma}$ οπότε από την Εξ. (4.24) έχουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2c}{(\gamma-1)} + u \right) = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{dx}{dt} = u+c \quad (4.28)$$

και παρόμοια βρίσκουμε από την Εξ. (4.25) βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2c}{(\gamma-1)} - u \right) = 0 \quad \text{πάνω στην καμπύλη} \quad \frac{dx}{dt} = u-c \quad (4.29)$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{2c}{\gamma-1} + u \right) = 0 & \text{ πάνω στην καμπύλη} & \frac{dx}{dt} = u + c \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{2c}{\gamma-1} - u \right) = 0 & \text{ πάνω στην καμπύλη} & \frac{dx}{dt} = u - c \\
\frac{ds}{dt} = 0 & \text{ πάνω στην καμπύλη} & \frac{dx}{dt} = u
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Οι ποσότητες $2c/(\gamma-1)+u$, $2c/(\gamma-1)-u$, και s είναι γνωστές σαν σταθερές Riemann (Riemann invariants) και παραμένουν αναλλοίωτες πάνω στις αντίστοιχες χαρακτηριστικές καμπύλες ($dx/dt = u+c$, $dx/dt = u-c$, και $dx/dt = u$). Οι σχέσεις (4.30) δείχνουν τον κυματικό χαρακτήρα των εξισώσεων Euler.

4.3 Κύματα ασυνέχειας

Ο κυματικός χαρακτήρας και η μη-γραμμικότητα των εξισώσεων Euler έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία κυμάτων όπου μία η περισσότερες από τις μεταβλητές ροής είναι ασυνεχείς κατά μήκος του μετώπου του κύματος, που κινείται με ταχύτητα $u_w(t)$. Το Σχ. 4.2 αναπαριστά το μέτωπο του κύματος ασυνέχειας και ένα μικρός όγκο ελέγχου $\delta V = dx dy$ που το περιβάλλει και κινείται με ταχύτητα $u_w(t)$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα. Οι ταχύτητες του ρευστού ως προς το αδρανειακό σύστημα πριν και μετά την ασυνέχεια είναι u_1 και u_2 , αντίστοιχα. Η αρχή διατήρησης της μάζας για τον όγκο ελέγχου δV εκφράζεται από την σχέση

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} (dx dy) + \rho_2 (u_2 - u_w) dy - \rho_1 (u_1 - u_w) dy = 0 \tag{4.31}$$

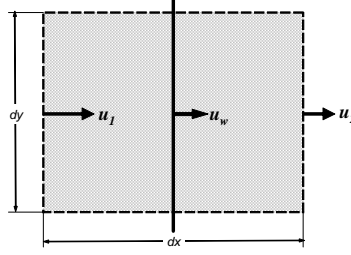
όπου $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ είναι η μέση πυκνότητα. Η Εξ. (4.31) στο όριο στοιχειώδους όγκου $\delta V \rightarrow 0$ ή $dx \rightarrow 0$ γίνεται

$$\begin{aligned}
\rho_2 (u_2 - u_w) - \rho_1 (u_1 - u_w) &= 0 \\
\text{ή} & \\
[\rho(u - u_w)]_w &= 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

όπου με το συμβολισμό $[]_w$ ορίζεται

$$[f]_w = f_1 - f_2$$

και f_1, f_2 είναι οι τιμές κάποιας συνάρτησης εκατέρωθεν του μετώπου του κύματος ασυνέχειας.



Σχήμα 4.2 Όγκος ελέγχου προσαρμοσμένος στο μέτωπο κύματος.

Η διατήρηση της ορμής κατά την κατεύθυνση x για τον στοιχειώδη όγκο $\delta V = dx dy$ εκφράζεται από την σχέση

$$\frac{\partial \overline{\rho u}}{\partial t} (dx dy) + (\rho_2 u_2 (u_2 - u_w) + p_2) dy - (\rho_1 (u_1 - u_w) + p_1) dy = 0 \quad (4.33)$$

η οποία στο όριο $\delta V \rightarrow 0$ ή $dx \rightarrow 0$ είναι

$$[\rho u (u - u_w) + p]_w = 0 \quad (4.34)$$

Παρόμοια η αρχή διατήρησης ενέργειας είναι

$$[\rho e (u - u_w) + p u]_w = 0 \quad (4.35)$$

Οι Εξ. (4.31), (4.34), και (4.35) είναι γνωστές και ως οι μονοδιάστατες συνθήκες Rankine-Hugoniot (RH). Οι δύο τύποι ασυνεχών λύσεων κυματομορφών που προβλέπονται από τις συνθήκες RH είναι η ασυνέχεια επαφής (contact discontinuity) και το ωστικό κύμα (shock wave). Σε δυσδιάστατη η τρισδιάστατη ροή είναι πιθανή η ύπαρξη και ενός ακόμη τύπου ασυνέχειας, του στρώματος στροβιλισμού (vortex sheet).

Η ασυνέχεια επαφής (contact discontinuity) ορίζεται ως

$$u_1 = u_2 = u_w \quad (4.36)$$

Η ασυνέχεια επαφής εξ ορισμού ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη RH, $[\rho(u - u_w)]_w = 0$, ενώ η δεύτερη συνθήκη RH, $[\rho u (u - u_w) + p]_w = 0$, συνεπάγεται ότι $p_1 = p_2$, οπότε η τρίτη συνθήκη RH, $[\rho e (u - u_w) + p u]_w = 0$, επίσης ικανοποιείται. Η ασυνέχεια επαφής δεν απαιτεί επιβολή συνθηκών για ποσότητες όπως $[\rho]_w$ ή $[\rho e]_w$. Συνεπώς ασυνέχειες της μορφής $\rho_1 \neq \rho_2$ ή $\rho_1 e_1 \neq \rho_2 e_2$ είναι αποδεκτές για την ασυνέχεια επαφής. Η ασυνέχεια δε της μορφής $\rho_1 e_1 \neq \rho_2 e_2$ συνεπάγεται ότι $T_1 \neq T_2$ και $s_1 \neq s_2$ κατά μήκος της ασυνέχειας επαφής.

Ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας που είναι αποδεκτός από τις συνθήκες RH για μονοδιάστατη ροή συμπιεστού ρευστού είναι το ωστικό κύμα που ορίζεται ως

$$u_1 \neq u_2 \neq u_w \quad (4.37)$$

Υπάρχουν δύο τύποι ωστικών κυμάτων ανάλογα με το πρόσημο του όρου $u_1 - u_w$. Η μονο-παραμετρική οικογένεια λύσεων για $u_1 - u_w > 0$ και δεδομένη ταχύτητα ρευστού, u_1 , και ταχύτητα του ήχου c_1 είναι γνωστή από την θεωρία της δυναμικής των αερίων (Liermann and Roshko 1957). Εκλέγοντας $u_1 - u_w > 0$ και για ελεύθερη παράμετρο το λόγο πίεσης $\sigma = p_2 / p_1 > 1$ κατά μήκος του κύματος βρίσκουμε ότι η λύση για το ωστικό κύμα που κινείται προς τα αριστερά είναι

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1)\sigma}{(\gamma+1) + (\gamma-1)\sigma}, & \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \sigma, & \sigma &= \frac{p_2}{p_1} > 1 \\ u_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[u_1 + u_w \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \right], & u_w &= u_1 - c_1 \sqrt{\frac{(\gamma+1)}{2\gamma} \sigma + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Παρόμοια η λύση για το ωστικό κύμα που κινείται προς τα δεξιά, $u_1 - u_w < 0$, είναι

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1)\sigma}{(\gamma+1) + (\gamma-1)\sigma}, & \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \sigma, & \sigma &= \frac{p_1}{p_2} > 1 \\ u_1 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[u_2 + u_w \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \right], & u_w &= u_2 - c_2 \sqrt{\frac{(\gamma+1)}{2\gamma} \sigma + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.4 Η Μέθοδος των Χαρακτηριστικών

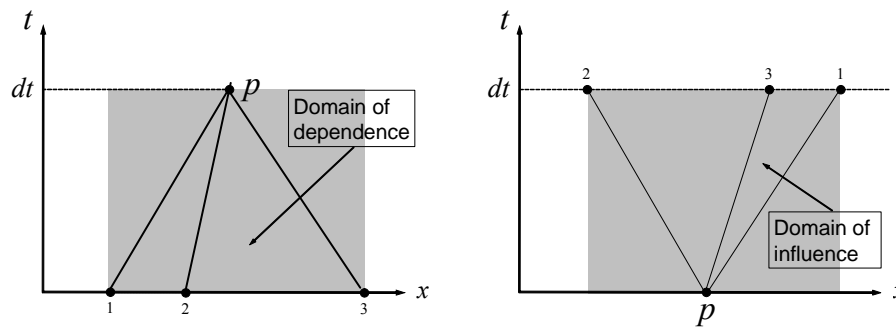
Η χαρακτηριστική μορφή των εξισώσεων Euler, Εξ. (4.30), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση λύσεων και την περαιτέρω διερεύνηση των ιδιοτήτων που έχουν. Θεωρούμε αρχικές κατανομές ταχύτητας ρευστού και ήχου, $u(x, 0) = u_0(x)$ και $c(x, 0) = c_0(x)$, με ομοιόμορφη αρχική κατανομή εντροπίας s_0 . Υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικές γραμμές που αντιστοιχούν στις παραπάνω αρχικές συνθήκες σε χρόνο $t=0$ και τέμνονται στο σημείο p όπως φαίνεται στο Σχ. 4.3. Οι γραμμές αυτές είναι.

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + c_1, \quad \frac{dx}{dt} = u_2 - c_2, \quad \frac{dx}{dt} = u_3$$

Από την λύση του συστήματος των δυο πρώτων σχέσεων από τις Εξ. (4.30) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} u_p &= (c_1 + c_2) / 2 + (\gamma - 1)(u_1 - u_2) / 4 \\ c_p &= (c_1 - c_2) / (\gamma - 1) + (u_1 + u_2) / 2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

ενώ η πυκνότητα και η πίεση στο σημείο p μπορεί να υπολογισθούν από τις ισεντροπικές σχέσεις.



Σχήμα 4.3 Τομή των τριών χαρακτηριστικών για $c > u > 0$ και ορισμός των χωρίων εξάρτησης και επηρεασμού.

Η παραπάνω διαδικασία επίλυσης δεν είναι γενική διότι προϋποθέτει ότι υπάρχουν μόνο τρεις χαρακτηριστικές που διέρχονται από το σημείο p . Θα δείξουμε παρακάτω ότι η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται πάντοτε όπως για παράδειγμα σε ωστικά κύματα.

Είναι προφανές από τις Εξ. (4.40) ότι η ροή στο σημείο p εξαρτάται μόνο από περιορισμένο εύρος αρχικών δεδομένων που βρίσκονται στην περιοχή

$$\min(x_1, x_2, x_3) \leq x \leq \max(x_1, x_2, x_3)$$

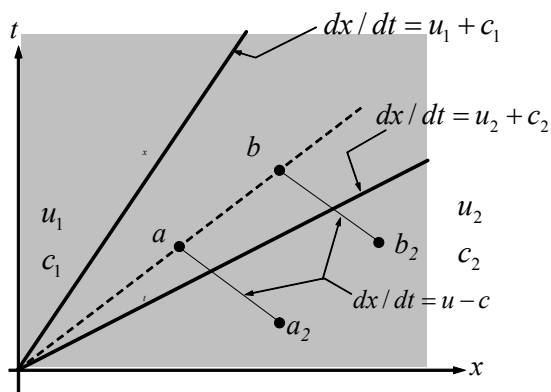
που ονομάζεται χωρίο εξάρτησης (domain of dependence) της λύσης στο σημείο p . Αντίστοιχα μπορούμε να βρούμε τα σημεία x_1, x_2, x_3 σε χρόνο στον χρόνο $t=dt$ στο χαρακτηριστικό επίπεδο για τα οποία οι χαρακτηριστικές που ξεκινά από αυτά τέμνονται στο σημείο p στον χρόνο $t=0$ (δες. Σχ. 4.3). Τότε η περιοχή που ορίζεται από

$$\min(x_1, x_2, x_3) \leq x \leq \max(x_1, x_2, x_3)$$

στον χρόνο $t=dt$ ορίζει το πεδίο επηρεασμού (domain of influence) του αρχικού σημείου p στον χρόνο $t=0$ στο χαρακτηριστικό επίπεδο. Δηλαδή κάθε μεταβολή στο σημείο p θα επηρεάσει την ροή μόνο μέσα στην σκιασμένη περιοχή του Σχ. 4.3 που ονομάζεται πεδίο επηρεασμού (domain of influence).

4.4.1 Βεντάλια Εκτόνωσης (expansion fan)

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών μπορεί να εφαρμοσθεί για την εύρεση της λύσης απλών κυμάτων, όπως η βεντάλια εκτόνωσης, όπου το μέτωπο κύματος διαχωρίζει δύο περιοχές με ομοιόμορφη εντροπία αλλά με διαφορετικές ταχύτητες, πιέσεις και θερμοκρασίες. Η χαρακτηριστικές $dx/dt = u_1 + c_1$ και $dx/dt = u_2 + c_2$ που διαχωρίζουν τις δύο περιοχές με ομοιόμορφη ροή (u_1, c_1 και u_2, c_2) φαίνονται στο Σχ. 4.4. Η περιοχή μεταξύ αυτών των χαρακτηριστικών με θετική κλίση ονομάζεται βεντάλια εκτόνωσης



Σχήμα 4.4 Βεντάλια εκτόνωσης κινούμενη προς τα δεξιά.

Θεωρούμε δύο σημεία, a και b , επί της θετικής χαρακτηριστικής $dx/dt = u + c$ μέσα στην βεντάλια εκτόνωσης για τις οποίες ισχύει.

$$\frac{2}{(\gamma-1)}c_a + u_a = \frac{2}{(\gamma-1)}c_b + u_b \quad (4.41)$$

Από τα σημεία a και b διέρχονται αρνητικές χαρακτηριστικές $dx/dt = u - c$ για τις οποίες ισχύει.

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\gamma-1)}c_a - u_a &= \frac{2}{(\gamma-1)}c_{a_2} - u_{a_2} \\ \frac{2}{(\gamma-1)}c_b - u_b &= \frac{2}{(\gamma-1)}c_{b_2} - u_{b_2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

αλλά επειδή η ροή στην περιοχή 2 είναι ομοιόμορφη έχουμε

$$\frac{2}{(\gamma-1)}c_a - u_a = \frac{2}{(\gamma-1)}c_b - u_b \quad (4.43)$$

και από τις Εξ. (4.41) και (4.43) συμπεραίνουμε ότι, οι χαρακτηριστικές μέσα στην σκιασμένη περιοχή της βεντάλιας εκτόνωσης του Σχ. 4.4, είναι ευθείες γραμμές διότι $u_a = u_b$ και $c_a = c_b$. Η εξίσωση της χαρακτηριστικής ευθείας μέσα στην βεντάλια εκτόνωσης είναι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(\gamma+1)}{2}u_a - \frac{(\gamma-1)}{2}u_2 + c_2, \quad x = \left[\frac{(\gamma+1)}{2}u_a - \frac{(\gamma-1)}{2}u_2 + c_2 \right] t \quad (4.44)$$

Η μεταβολή των ταχυτήτων a και u , μέσα στην βεντάλια εκτόνωσης είναι

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{2}{(\gamma-1)} \left[\frac{x}{t} + \frac{(\gamma-1)}{2} u_2 - c_2 \right], \\
c(t) &= \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \left[\frac{x}{t} - u_2 \right] + \frac{2c_2}{(\gamma+1)}
\end{aligned}
\tag{4.45}$$

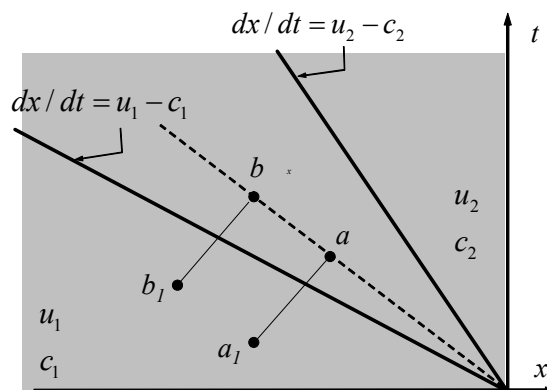
Η μεταβολή των θερμοδυναμικών μεταβλητών μέσα στην βεντάλια εκτόνωσης βρίσκεται από τις ισεντροπικές σχέσεις

$$p = p_1 (c/c_1)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad T = T_1 (c/c_1)^2, \quad \rho = \rho_1 (c/c_1)^{\frac{2}{\gamma-1}}
\tag{4.46}$$

Επί πλέον οι συνθήκες στις περιοχές ομοιόμορφης ροής σχετίζονται με τον λόγο πιέσεων

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_2 + \frac{2}{(\gamma-1)} (c_1 - c_2) \\
&= u_2 + \frac{2c_2}{(\gamma-1)} \left[(p_1/p_2)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right]
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

Η προς τα αριστερά κινούμενη βεντάλια εκτόνωσης που ορίζεται από τις αρνητικές χαρακτηριστικές $dx/dt = u - c$ δείχνεται στο Σχ. 4.5. Χρησιμοποιώντας παρόμοια ανάλυση όπως και στις θετικές χαρακτηριστικές μπορούμε να βρούμε την μεταβολή ταχύτητας και για την κινούμενη προς τα αριστερά βεντάλια εκτόνωσης.



Σχήμα 4.5 Βεντάλια εκτόνωσης κινούμενη προς τα αριστερά.

4.5 Δημιουργία Ωστικών Κυμάτων

Αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι σε κάποιο σημείο p και για κάποιο χρόνο t (δες Σχ. 4.3) είναι δυνατό να τέμνονται περισσότερες από τρεις χαρακτηριστικές. Στην περίπτωση η λύση με την μέθοδο των χαρακτηριστικών δεν είναι μοναδική διότι η προϋπόθεση, ότι το πεδίο ροής καθορίσετε από συναρτήσεις που είναι συνεχείς και διαφορίσιμες, βάσει της οποίας βρέθηκαν οι χαρακτηριστικές

εξισώσεις δεν ισχύει. Στις περιοχές όπου οι ποσότητες του πεδίου ροής δεν προσδιορίζονται από συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις έχουμε την δημιουργία ασυνεχών λύσεων όπως είναι το ωστικό κύμα και οι ασυνέχεια επαφής.

Θα μελετήσουμε τον σχηματισμό ωστικού κύματος και θα προσδιορίσουμε την θέση του. Θεωρούμε αδιαβατική, μη-ιξώδη ροή, χωρίς ωστικά κύματα, με ομοιόμορφη εντροπία s στον χρόνο $t=0$. Το παραπάνω πεδίο ροής περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

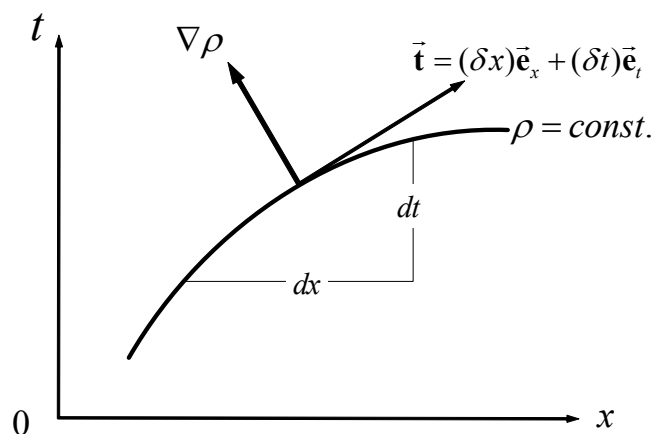
όπου η εντροπία παραμένει σταθερή για χρόνο $t > 0$ μέχρι να δημιουργηθούν ωστικά κύματα.

Από την εξίσωση διατήρησης της μάζας έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d \rho u}{d \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad -\frac{d \rho u}{d \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^{-1} \quad (4.49)$$

Ο όρος $\frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^{-1}$ στην παραπάνω σχέση βρίσκεται σύμφωνα με το Σχ. 4.6 όπου

$$\begin{aligned} \nabla \rho \cdot \vec{t} = \vec{t} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{e}_t \right) \cdot (\delta x \vec{e}_x + \delta t \vec{e}_t) = 0 \\ \text{ή} & \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^{-1} &= -\frac{\delta x}{\delta t} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho \end{aligned} \quad (4.50)$$



Σχήμα 4.6 Ισοσταθμικές πυκνότητας στο χαρακτηριστικό επίπεδο..

Δηλαδή από τις Εξ. (4.49) και (4.50) έχουμε

$$\left. \frac{d\rho u}{d\rho} = \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho \quad (4.51)$$

που σημαίνει ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση της πυκνότητας, $u = u(\rho)$. Παρόμοια μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} = - \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right)_u = \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho \quad (4.52)$$

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής γράφεται ως

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.53)$$

Αλλά η πίεση είναι συνάρτηση δύο θερμοδυναμικών μεταβλητών $p = p(\rho, s)$ και η κλίση της πίεσης $\partial p / \partial x$ είναι

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \left(\frac{du}{d\rho} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.54)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση της πυκνότητας. Δηλαδή η εξίσωση διατήρησης της ορμής γράφεται ως

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} = - \left[u + \frac{c^2}{\rho} \left(\frac{du}{d\rho} \right)^{-1} \right] \quad (4.55)$$

Από τις Εξ. (4.51) και (4.55) βρίσκουμε

$$\frac{d\rho u}{d\rho} = u + \frac{c^2}{\rho} \left(\frac{du}{d\rho} \right)^{-1} \quad (4.56)$$

δηλαδή

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} \Rightarrow u = \int \frac{c}{\rho} d\rho \quad (4.57)$$

αλλά επειδή η ροή υποτέθηκε ισεντροπική

$$u = \pm \frac{2}{(\gamma-1)} \int dc \quad (4.58)$$

ή

$$u = \pm \frac{2}{(\gamma-1)}(c - c_0) \quad (4.59)$$

όπου c_0 είναι η ταχύτητα του ήχου στο σημείο όπου η ταχύτητα ροής μηδενίζεται. Συμβολίζοντας με p_0 και ρ_0 την πίεση και πυκνότητα στο σημείο αποκοπής έχουμε

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left[1 \pm \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{u}{c_0} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \\ p &= p_0 \left[1 \pm \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{u}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \\ c &= c_0 \pm \frac{(\gamma-1)}{2} u \end{aligned} \quad (4.60)$$

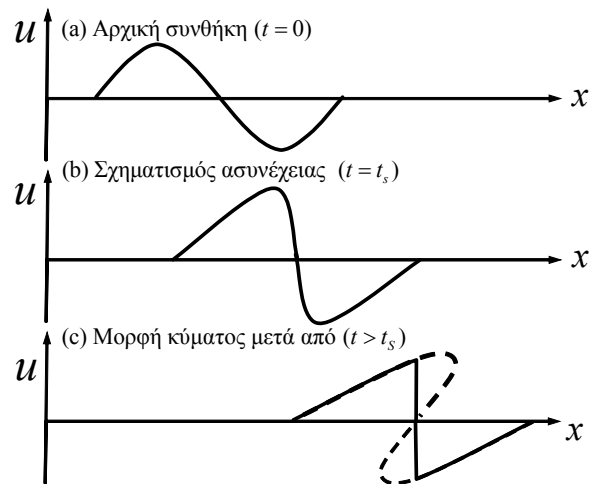
Από τις Εξ. (4.52), (4.55), και (4.57) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= u \pm c = \pm c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u, \\ x &= \left[\pm c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u \right] t + f(u) \end{aligned} \quad (4.61)$$

όπου $f(u)$ είναι μία συνάρτηση ολοκλήρωσης που για χρόνο $t = 0$ είναι $x = f(u)$.

Οι Εξ. (4.60) και (4.61) αποτελούν την γενική λύση για τα κύματα που κατευθύνονται προς τα δεξιά (+) και προς τα αριστερά (-). Όπως δε φαίνεται από την Εξ. (4.61) οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές που η κλίση τους εξαρτάται από την ταχύτητα.

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν την δημιουργία η μη του ωστικού κύματος. Θεωρούμε το κύμα που μεταδίδεται προς τα δεξιά, όπου η κλίση των χαρακτηριστικών δίνεται από την Εξ. (4.61) και κάθε σημείο πάνω στο κύμα ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα που αυξάνεται μονοτονικά όπως η ταχύτητα u . Συνεπώς όταν η ταχύτητα μειώνεται σε κάποια θέση x (δες. Σχ. 4.7) τότε οι χαρακτηριστικές θα τμηθούν σε κάποιο χρόνο $t = t_s$ με αποτέλεσμα την δημιουργία λύσης πολλαπλών τιμών. Η κατάσταση όμως αυτή είναι φυσικά αδύνατη και για χρόνους $t > t_s$ δημιουργείται ασυνέχεια ροής (shock wave), όπως φαίνεται στο Σχ. 4.7.



Σχήμα 4.7 Σχηματισμός ωστικού κύματος.

Την χρονική στιγμή δημιουργίας της ασυνέχειας (shock wave) η κλίση της ταχύτητας $\partial u / \partial x$ απειρίζεται, και για $t = t_s$ έχουμε

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{t=t_s} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right|_{t=t_s} = 0 \quad (4.62)$$

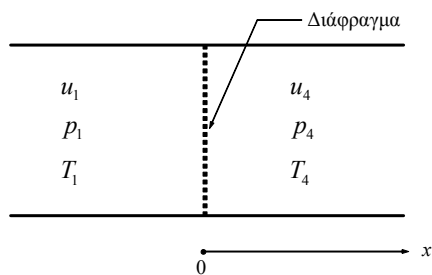
ενώ από την Εξ. (4.61) βρίσκουμε

$$t_s = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{df(u)}{du}, \quad \frac{d^2 f(u)}{du^2} = 0 \quad (4.63)$$

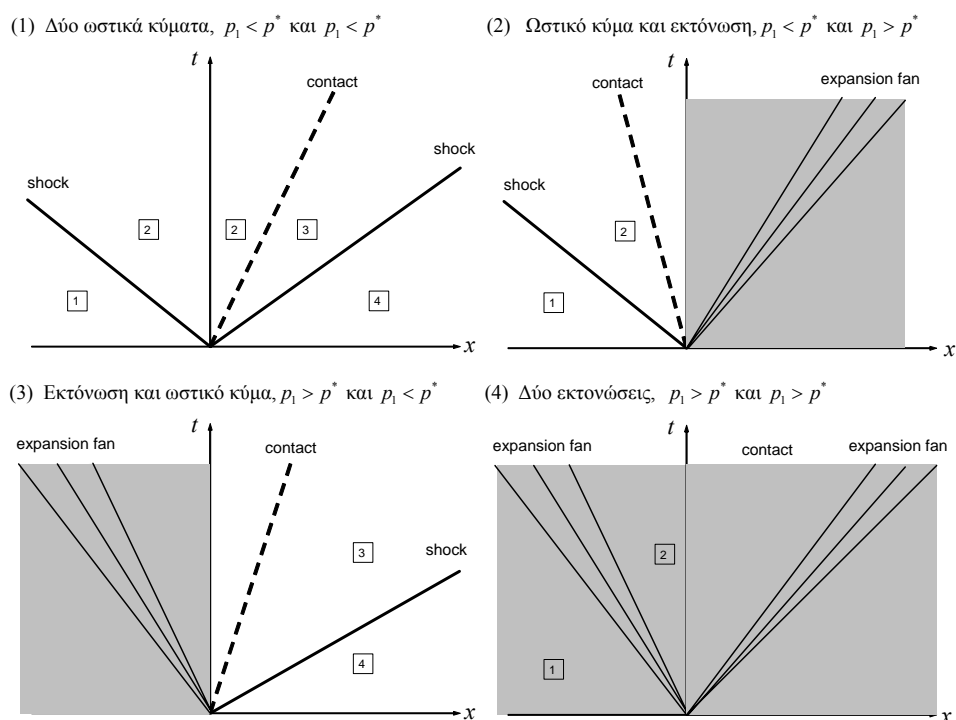
Δηλαδή κατά την δημιουργία του ωστικού κύματος η κλίση df/du είναι αρνητική και υπάρχει σημείο καμπής στην κατανομή ταχύτητας όπου $d^2 f / du^2 = 0$ για $u=u_s$.

4.6 Γενικευμένο Πρόβλημα Riemann

Το γενικευμένο πρόβλημα Riemann, που αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχ. 4.8, είναι ένα χρήσιμο παράδειγμα δοκιμής αριθμητικών αλγορίθμων για τις μονοδιάστατες εξισώσεις Euler και ορίζεται με αρχική συνθήκη σε χρόνο $t=0$ από δύο καταστάσεις ροής που διαχωρίζονται από ένα διάφραγμα στο $x=0$. Στο χωρίο $x<0$ η ταχύτητα, πίεση, και θερμοκρασία του ρευστού είναι, u_1 , p_1 , και T_1 , ενώ στο χωρίο $x>0$ είναι u_4 , p_4 , και T_4 . Οι τέσσερις καταστάσεις ροής που μπορεί να προκύψουν ανάλογα με τις εκατέρωθεν συνθήκες απεικονίζονται στα Σχ. 4.9.1 – 4.9.4.



Σχήμα 4.8 Αρχικές συνθήκες του γενικευμένου προβλήματος Riemann.



Σχήμα 4.9 Αρχικές συνθήκες και λύσεις του προβλήματος Riemann.

4.7 Σωλήνας Ωστικού Κύματος (Shock Tube)

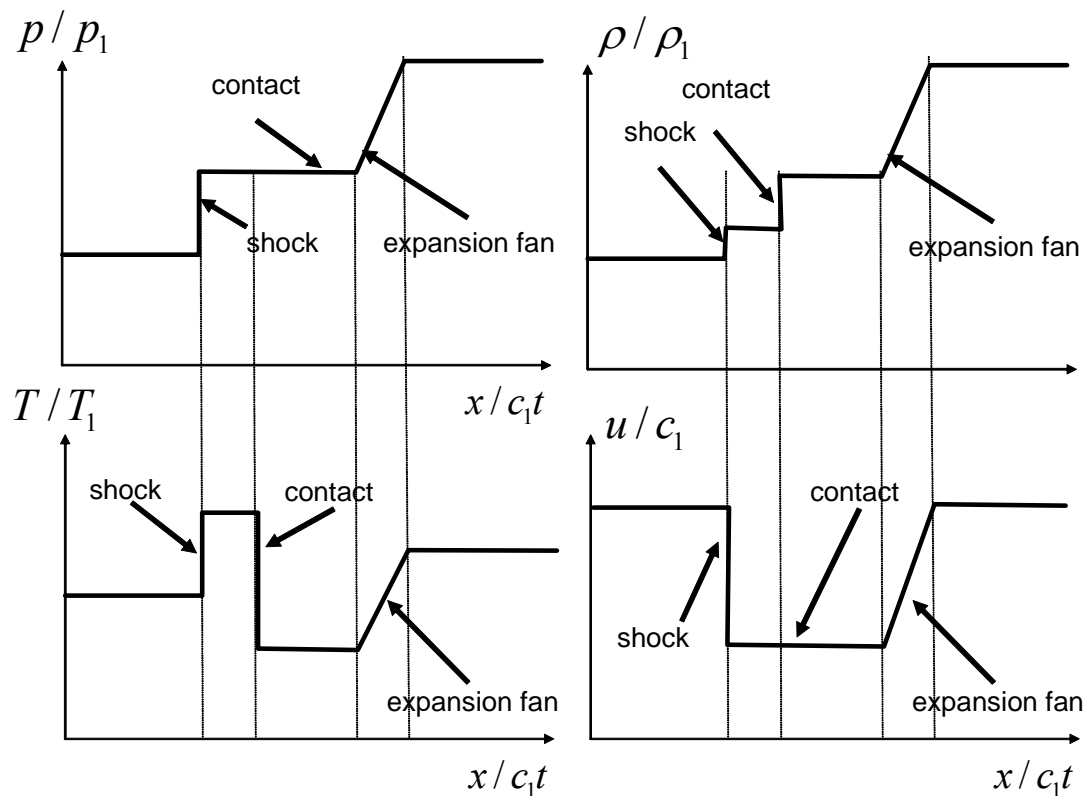
Το πρόβλημα του σωλήνα ωστικού κύματος είναι η ειδική περίπτωση του γενικευμένου προβλήματος Riemann όπου οι αρχικές ταχύτητες είναι μηδενικές. Είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να αναπαραχθεί εργαστηριακά και έχει αναλυτική λύση. Υποθέτοντας ότι $p_4 > p_1$ (δες Σχ. 4.9.2), ο λόγος πιέσεων p^*/p_1 (δες Lierman and Roshko, 1957) δίνεται από την παρακάτω σχέση που λύνεται με επαναληπτική μέθοδο.

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p^*}{p_1} \left[1 - \frac{(\gamma-1)(c_1 - c_4)[(p^*/p_1) - 1]}{\sqrt{2\gamma}\sqrt{2\gamma + (\gamma+1)[(p^*/p_1) - 1]}} \right]^{-\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}} \quad (4.64)$$

Η ταχύτητα του ωστικού κύματος είναι

$$c_s = -c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_1} - 1 \right)} \quad (4.65)$$

Η γραφική αναπαράσταση της λύσης δίνεται στο Σχ. 4.10.



Σχήμα 4.10 Αναπαράσταση τυπικού προβλήματος σωλήνα ωστικού κύματος

Βιβλιογραφία

Courant, P. and Friedrichs, K., “*Supersonic Flow and Shock Waves*,” Springer Verlag, New York, 1948.

Hirsch, C. “*Numerical Computation of Internal and External Flow*,” Volume I, II, John Wiley and Sons, New York, 1988.

Liepmann, H. and Roshko, A., “*Elements of Gas Dynamics*,” John Wiley and Sons, New York, 1957.

Steger, J. and Warming, R., “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-Dynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, 1981, pp. 263-293.