

Λύστε ένα από τα προβλήματα 1.α, 1.β ή 1.γ

Πρόβλημα 1.α

Λύστε αριθμητικά στο διάστημα $0 \leq t \leq 10$ με την μέθοδο Runge-Kutta την δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = b \cos(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = c$$

$$a = \quad, b = \quad, c = \quad, \omega^2 = \quad \neq a$$

$$x(t) = A \cos(t\sqrt{a}) + B \sin(t\sqrt{a}) + \frac{b \cos(\omega t)}{a - \omega^2}$$

Συγκρίνετε την αριθμητική λύση με την αναλυτική και βρείτε την τάξη σύγκλισης.

Πρόβλημα 1.β

Λύστε αριθμητικά στο διάστημα $1 \leq t \leq 10$ με την μέθοδο Runge-Kutta την δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = \frac{e^t}{t}, \quad x(1) = 1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = 1$$

$$x(t) = e^{t-1}(e-1)(t-1) + te^t \ln |x|$$

Συγκρίνετε την αριθμητική λύση με την αναλυτική και βρείτε την τάξη σύγκλισης.

Πρόβλημα 1.γ

Λύστε αριθμητικά στο διάστημα $0 \leq t \leq 10$ με την μέθοδο Runge-Kutta την δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

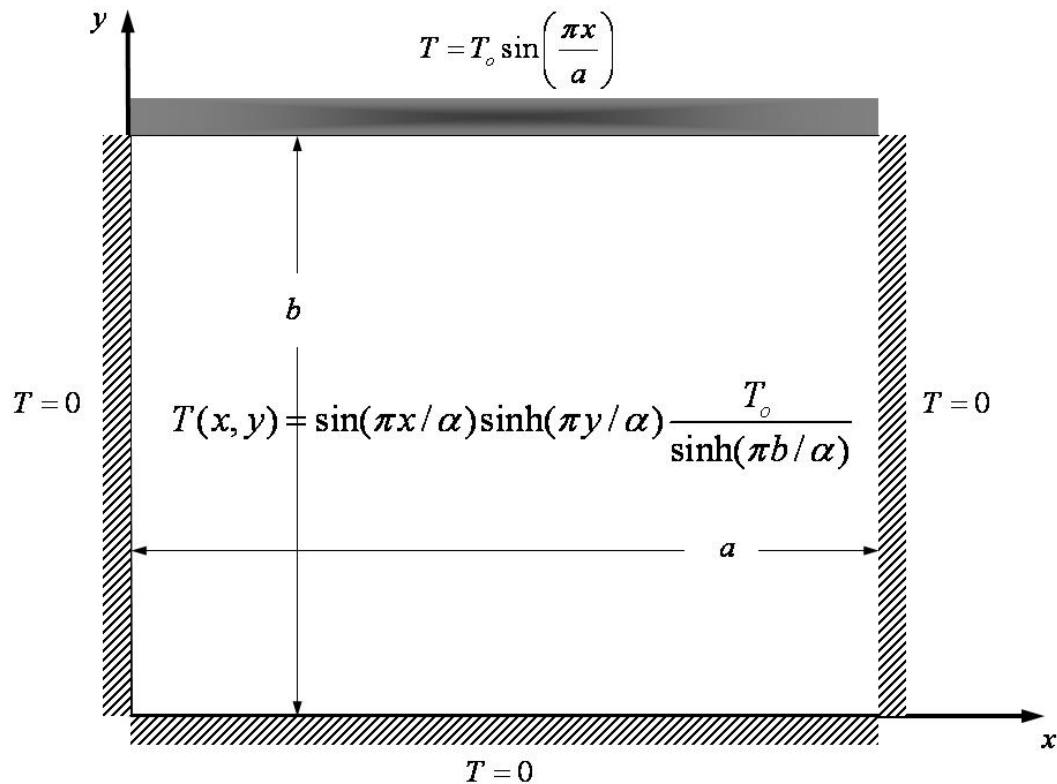
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 4t, \quad x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -3$$

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t} - 2t^2 + 2t - 3$$

Συγκρίνετε την αριθμητική λύση με την αναλυτική και βρείτε την τάξη σύγκλισης.

Πρόβλημα 2

Η κατανομή θερμοκρασίας στην επίπεδη πλάκα ($a = \quad b = \quad$) που απεικονίζεται στον παρακάτω σχήμα



διέπεται από την εξίσωση Laplace.

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Επιλύστε αριθμητικά την εξίσωση Laplace με πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης $u_{xx}|_{j,k} = (u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k})/(\Delta x)^2$ σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα $n(\Delta x) \times m(\Delta y)$ όπου $10 < n, m < 20$.

1. Χρησιμοποιήστε το λογισμικό επίλυσης γραμμικού συστήματος με την μέθοδο απαλοιφής Gauss από την πρώτη εργασία για να λύσετε το γραμμικό σύστημα $(\Delta y)^2 (u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) + (\Delta x)^2 (u_{j,k+1} + u_{j,k-1}) - 2u_{j,k} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] = 0$ το οποίο για $(\Delta x) = (\Delta y)$ γίνεται
 - a) $u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k} = 0$
2. Συγκρίνετε τα αριθμητικά αποτελέσματα με την αναλυτική λύση στις γραμμές $(x = a/2, 0 \leq y \leq b), (0 \leq x \leq a, y = b/2)$
3. Σχεδιάστε τις ισο-θερμοκρασιακές καμπύλες της αναλυτική και αριθμητικής λύσης στο χωρίο ορισμού $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$