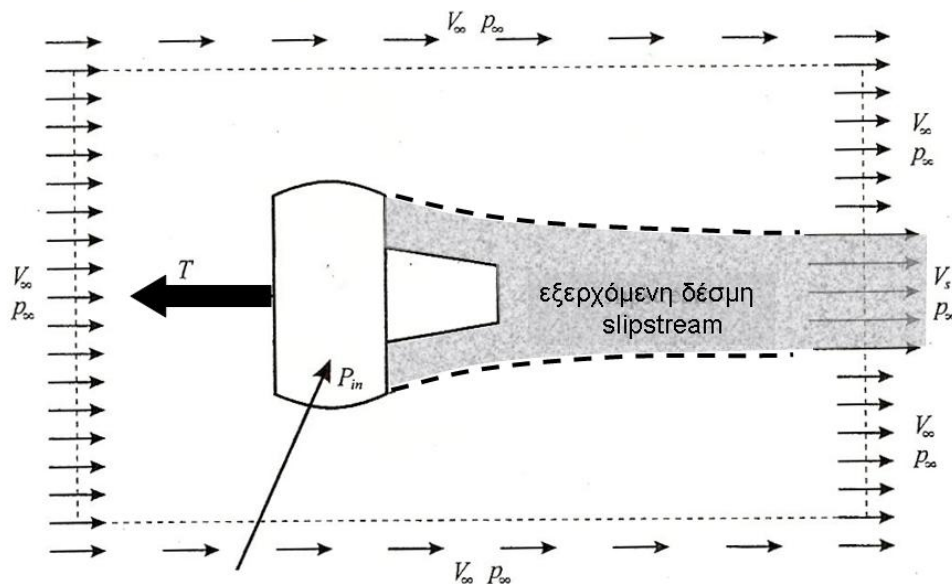


## 1.1. Στοιχεία προωθητικών συστημάτων αεροσκάφους

Τα προωθητικά συστήματα του αεροσκάφους επηρεάζουν την συμπεριφορά, την ευστάθεια, τα συστήματα ελέγχου και την γενική δυναμική κατάσταση πτήσης. Συνεπώς η μελέτη της μηχανικής της πτήσης απαιτεί στοιχειώδη γνώση των προωθητικών συστημάτων. Το κεφάλαιο αυτό έχει σαν σκοπό να συνοψίσει τα απαραίτητα στοιχεία προωθητικών συστημάτων που αφορούν την μηχανική της πτήσης και όχι να δώσει μια λεπτομερή παρουσίαση των προωθητικών συστημάτων. Η εξέλιξη των σύγχρονων αεροσκαφών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ανάπτυξη και βελτίωση των συστημάτων προώθησης που και στο παρελθόν έπαιξαν πρωταρχικό ρόλο και συντέλεσαν σε μεγάλο βαθμό στην δημιουργία νέων αεροχημάτων και σε μεγάλες προόδους της αεροναυπηγικής.



Σχήμα 1.1.1 Διάγραμμα του όγκου ελέγχου που περιβάλλει ένα ιδανικό προωθητικό σύστημα

Τα περισσότερα προωθητικά συστήματα παράγουν ώση με τον ίδιο ως επί το πλείστον τρόπο. Ο αέρας εισέρχεται στην συσκευή πρόωσης από την επιφάνεια εισόδου (δες Σχ. 1.1.1) και η ισχύς που παρέχεται από κάποια πηγή αυξάνει την κινητική ενέργεια του αέρα. Η αύξηση της ορμής που συνοδεύει την αύξηση της κινητικής ενέργειας του αέρα, που περνάει μέσα από το σύστημα προώθησης, έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία μιας δύναμης αντίδρασης  $T$  που ονομάζουμε ώση (thrust). Για να μελετήσουμε πιο αναλυτικά την αρχή λειτουργίας των

προωθητικών συστημάτων θεωρούμε την αντιστρεπτή και ασυμπίεστη ροή μέσω ενός ιδανικού προωθητικού συστήματος του Σχ.1.1.1.

Για την ανάλυση θεωρούμε τον κλειστό όγκο ελέγχου που εκτείνεται αρκετά μακριά από το προωθητικό σύστημα, έτσι ώστε στα σύνορα όγκου να εξασκείται η εξωτερική πίεση. Ακόμη υποτίθεται ότι σε όλα τα όρια του όγκου, εκτός από το όριο που εξέρχεται η δέσμη που προέρχεται από την έξοδο του συστήματος προώθησης, η ταχύτητα είναι η ίδια με την ταχύτητα του αδιατάρακτου ρεύματος,  $V_\infty$ , (free-stream velocity). Στο σημείο εξόδου της δέσμης υποτίθεται ότι η ταχύτητα εξόδου  $V_s$  είναι και πάλι ομοιόμορφη αλλά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του αδιατάρακτου ρεύματος  $V_s > V_\infty$ . Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Newton για τον παραπάνω όγκο ελέγχου του Σχ. 1.1.1 βρίσκουμε:

$$T = \dot{m}(V_s - V_\infty) \quad (1.1.1)$$

όπου  $T$  είναι η ώση που αναπτύσσεται και  $\dot{m}$  είναι ο ρυθμός ροής της μάζας αέρα που διέρχεται από το προωθητικό σύστημα. Από την εφαρμογή του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής στον όγκο ελέγχου βρίσκουμε:

$$P_{in} = \dot{m} \left[ \left( h_s + \frac{V_s^2}{2} \right) - \left( h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} \right) \right]$$

όπου  $P_{in}$  είναι η παρεχομένη ισχύς και  $h_s$  και  $h_\infty$  είναι οι ενθαλπίες (εσωτερική ενέργεια +  $p/\rho$ ) της δέσμης εξόδου και του αδιατάρακτου ρεύματος αέρος, αντίστοιχα. Η μεταβολή εσωτερικής ενέργειας είναι όμως μηδενική διότι υποθέσαμε ασυμπίεστη ροή και αντιστρεπτή διαδικασία. Επιπλέον, εφ' όσον στο άκρο του όγκου ελέγχου η πίεση στην περιοχή της δέσμης είναι η ίδια με την πίεση του αδιατάρακτου ρεύματος η ενθαλπία της δέσμης είναι η ίδια με την ενθαλπία του αδιατάρακτου ρεύματος,  $h_s = h_\infty$ , οπότε:

$$P_{in} = \dot{m} \left( \frac{V_s^2}{2} - \frac{V_\infty^2}{2} \right) = \frac{\dot{m}}{2} (V_s - V_\infty)(V_s + V_\infty) \quad (1.1.2)$$

Η αποδοτικότητα προώθησης της μηχανής του αεροπλάνου ορίζεται ως το γινόμενο της ώσης με την ταχύτητα διαιρούμενη με την παρεχόμενη ισχύ.

$$\eta_p \equiv \frac{TV_\infty}{P_{in}} \quad (1.1.3)$$

που με της παρεχομένης ισχύος από την Εξ. (1.1.2) μετασχηματίζεται ως

$$\eta_p = \frac{2V_\infty}{V_s + V_\infty} = \frac{1}{1 + \frac{V_s - V_\infty}{2V_\infty}} \quad (1.1.4)$$

Είναι προφανές από την Εξ. (1.1.1) ότι η ώση που αναπτύσσεται από ένα ιδανικό σύστημα πρόωσης αυξάνεται είτε με την αύξηση της ροής μάζας δια μέσου του συστήματος ή με την αύξηση της ταχύτητας εξόδου. Από την Εξ. (1.1.4) όμως φαίνεται ότι η αύξηση της ταχύτητας εξόδου συνεπάγεται μείωση της απόδοσης, συνεπώς :

*Αποδοτική παραγωγή ώσης επιτυγχάνεται με την ροή μεγάλης μάζας και μικρή αύξηση ταχύτητας.*

Δυστυχώς όμως το μέγεθος του προωθητικού συστήματος είναι γενικά ανάλογο με τον ρυθμό ροής μάζας, συνεπώς

*Χρήση μεγαλύτερης ταχύτητας εξόδου σε συνδυασμό με μικρότερο ρυθμό ροής μάζας έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερο λόγο ώσης/βάρους .*

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι σημαντικές στην επιλογή του συστήματος πρόωσης. Για τους παραπάνω λόγους το πιο κατάλληλο προωθητικό σύστημα σε χαμηλές υποηχητικές ταχύτητες πτήσης είναι οι προπέλες διότι παράγουν σχετικά υψηλούς ρυθμούς ροής με μικρή αύξηση της ταχύτητας. Αντίθετα οι κινητήρες δέσμης (jet engines ή turbojet) παράγουν δέσμες υψηλής ταχύτητας με σχετικά μικρό ρυθμό ροής και είναι κατάλληλες για διηχητικές και υπερηχητικές ταχύτητες πτήσης. Οι μηχανές turbojet σε υποηχητικές ταχύτητες είναι λιγότερο αποδοτικές αλλά έχουν μεγαλύτερο λόγο ώσης ως προς βάρος. Οι μηχανές turbofan αποτελούν μια συμβιβαστική λύση μεταξύ των προπελών και των κινητήρων δέσμης, διότι η διάμετρος του κινητήρα turbofan και ο παραγόμενος ρυθμός ροής είναι μικρότερος από αυτόν των προπελών. Οι μηχανές turbofan έχουν όμως μεγαλύτερο ρυθμό ροής από τον ρυθμό ροής κινητήρα δέσμης με αντίστοιχη ισχύ.

Η ανάπτυξη της μηχανής εσωτερικής καύσης και ο καλός σχεδιασμός της προπέλας έπαιξαν αποφασιστικό ρόλο και κατέστησαν δυνατή την πρώτη πτήση οχήματος βαρύτερο από τον αέρα που πραγματοποίησαν οι αδελφοί Wright το 1903. Στο τέλος του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου τα προωθητικά συστήματα αεροσκαφών με

μηχανές εσωτερικής καύσης έφθασαν τα όρια απόδοσης τους με αποτέλεσμα να γίνει εφικτή ανάπτυξη ταχυτήτων 450 mil/h με την χρήση μηχανών ισχύος 5000 Hp.

Οι περιορισμοί που συναντά ο συνδυασμός προπελών με μηχανή εσωτερικής καύσης η στροβιλοκινητήρα μπορεί να γίνει κατανοητός όταν ακολουθήσουμε την απλοποιημένη ανάλυση που παρουσιάστηκε στις Εξς. (1.1.1)–(1.1.4). Στην Εξ. (1.1.1) φαίνεται ότι η ώση είναι ανάλογη με τον ρυθμό ροής αέρα πολλαπλασιασμένη με την αύξηση ταχύτητας. Από την Εξ. (1.1.4) βρήκαμε ότι η απόδοση μικραίνει όταν η διαφορά ταχύτητας μεγαλώνει. Συνεπώς, όταν αυξάνεται η ισχύς της μηχανής, για να διατηρηθεί η απόδοση είναι αναγκαίο να αυξήσουμε τον ρυθμό ροής και όχι την διαφορά ταχυτήτων. Επειδή όμως ο ρυθμός ροής είναι ανάλογος με το γινόμενο επιφάνειας με την ταχύτητα περιστροφής, για να αυξήσουμε τον ρυθμό ροής χωρίς να αυξήσουμε την διαφορά ταχύτητας, πρέπει να αυξήσουμε την διάμετρο της προπέλας. Αλλά η αύξηση της διαμέτρου της προπέλας συνεπάγεται αύξηση της ταχύτητας στο άκρο του πτερυγίου της προπέλας. Το ανώτατο όμως στην αύξηση διαμέτρου είναι η ταχύτητα του ήχου διότι όταν η ταχύτητα στο άκρο της προπέλας υπερβεί την ταχύτητα του ήχου, τότε η απόδοση της προπέλας μειώνεται κατά πολύ. Μια εναλλακτική λύση είναι να αυξήσουμε τον αριθμό πτερυγίων της προπέλας. Η αύξηση του αριθμού πτερυγίων όμως έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της διαφοράς ταχύτητας και συνοδεύεται από δυσμενή παρεμβολή με όλα τα άλλα πτερύγια που μειώνουν την απόδοση. Οι παραπάνω περιορισμοί ουσιαστικά σταμάτησαν την παραπέρα εξέλιξη του συστήματος μηχανής/προπέλας σαν μέσο πρόωσης αεροσκαφών μεγάλης ταχύτητας.

Οι περιορισμοί που έχει ο συνδυασμός προπέλας με μηχανή εσωτερικής καύσης παραμερίστηκαν με την ανάπτυξη των κινητήρων δέσμης (turbojet). Ο πρώτος κινητήρας δέσμης παρουσιάστηκε το 1930 από τον Frank Whittle αλλά δεν τράβηξε την ανάλογη προσοχή από το υπουργείο άμυνας της Μ. Βρετανίας που θεώρησε ότι τα υλικά δεν μπορούν να αντέξουν τις μεγάλες οι θερμοκρασίες λειτουργίας που απαιτούνται. Η ανάπτυξη των κινητήρων δέσμης βρήκε πιο πρόσφορο έδαφος στην Γερμανία του μεσοπολέμου όπου το 1939 δοκιμάστηκε το πρώτο αεροπλάνο που προωθούνταν από κινητήρα δέσμης. Μετά από συνεχείς βελτιώσεις των κινητήρων δέσμης παρουσιάστηκε στην Γερμανία το πρώτο μαζικά παραγόμενο jet fighter Me-262 το 1944, το οποίο μπορούσε να αναπτύξει ταχύτητες 550 mph. Το Me-262 προωθούνταν από δυο κινητήρες δέσμης βάρους 1650 lbs που μπορούσαν να παράγουν ισχύ 2000 lbs ώσης και είχαν ένα λόγο ώσης ως προς το βάρος μεγαλύτερο από 1.2, που ξεπερνούσε κατά πολύ τον λόγο της ώσης/βάρους των καλύτερων συνδυασμών μηχανής/προπέλας. Τα μειονεκτήματα του προωθητικού συστήματος του Me-262 ήταν ο μικρός

χρόνος ζωής των κινητήρων δέσμης (25 ώρες) και η μεγάλη κατανάλωση καυσίμου (1.4 lb – fuel / hr / 1 b – trust) που υπερέβαινε κατά πολύ την κατανάλωση του spitfire (0.65 lb – fuel / hr/ lb – thrust ) που μπορούσε να αναπτύξει ταχύτητα 440 mph. Η επιτυχής πτήση μαχητικών αεροσκαφών από τους Γερμανούς ακολουθήθηκε από την ανάπτυξη μαχητικών αεροσκαφών με στροβιλοκινητήρες στην Μ. Βρετανία και ΗΠΑ. Στην περίοδο της ειρήνης παρουσιάστηκαν τα πρώτα επιβατικά αεροπλάνα με κινητήρες δέσμης από την Boeing το 1954. Ενώ στις αρχές του 1950 ξεπεράστηκε το φράγμα της ταχύτητας του ήχου από αεροπλάνα που επίσης προωθούνταν με κινητήρες δέσμης.

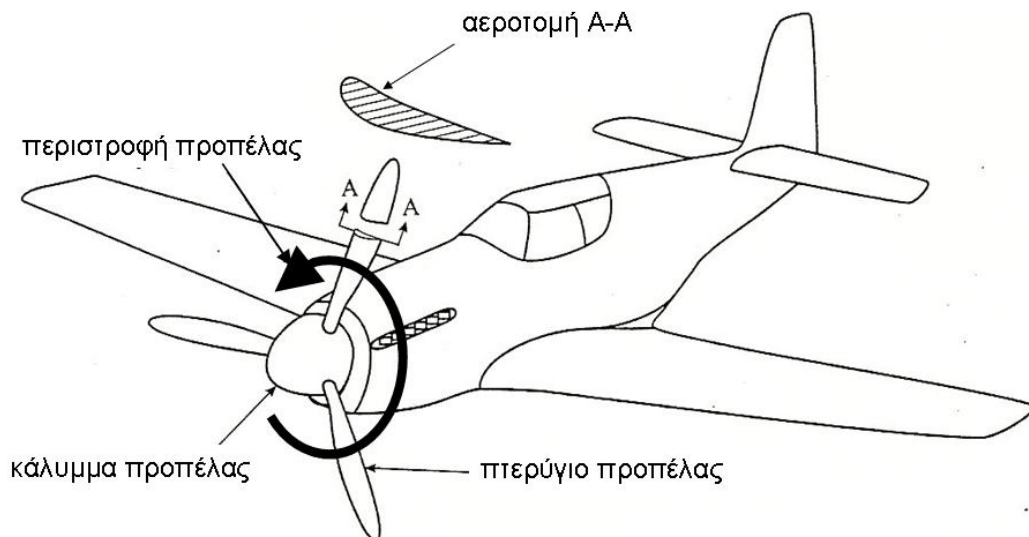
## 1.2 Η προπέλα

Τα πτερύγια της προπέλας έχουν πολλά κοινά με τις πτέρυγες του αεροσκάφους επειδή κάθε πτερύγιο της προπέλας μπορεί να θεωρηθεί σαν μία περιστρεφόμενη πτέρυγα. Επί πλέον, τα πτερύγια της προπέλας όπως και οι πτέρυγες του αεροσκάφους είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να παράγουν άντωση. Τα πτερύγια της προπέλας όμως σκοπεύουν στην εξουδετέρωση της οπισθέλκουσας ενώ οι πτέρυγες του αεροσκάφους εξισορροπούν το βάρος του αεροπλάνου. Η άντωση των πτερυγίων της προπέλας παράγεται από την περιστροφή και έχει κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα περιστροφής. Η συνιστώσα του αεροδυναμικού φορτίου που είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής ονομάζεται ώση.

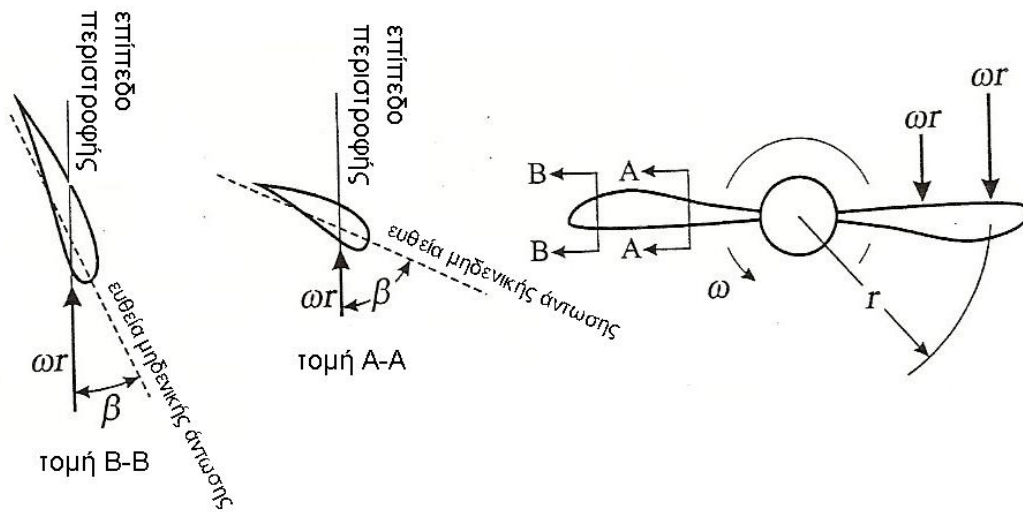
Η σχετική ταχύτητα των πτερυγίων της προπέλας εξαρτάται από την απόσταση από τον άξονα περιστροφής γι' αυτό το λόγο η γωνία πρόσπτωσης της διατομής μεταβάλλεται όπως φαίνεται στα Σχ.1.2.1 και Σχ. 1.2.2. Οι διατομές που βρίσκονται κοντά στον άξονα περιστροφής (που έχουν μικρή ταχύτητα) έχουν μεγάλη γωνία πρόσπτωσης, ενώ οι διατομές κοντά στην περιφέρεια (που έχουν μεγάλη ταχύτητα) έχουν μικρότερη γωνία πρόσπτωσης. Η μεταβολή αυτή της γωνίας πρόσπτωσης έχει σαν αποτέλεσμα την περίπου ομοιόμορφη φόρτιση των πτερυγίων της προπέλας. Η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία μηδενικής άντωσης και το επίπεδο περιστροφής ονομάζεται γωνία αεροδυναμικής κλίσης (aerodynamic pitch angle) που συμβολίζεται ως  $\beta(r)$  διότι μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση. Η σχέση μεταξύ της γωνίας  $\beta$  και της γωνίας ως προς την χορδή  $\beta_c$  είναι :

$$\beta(r) = \beta_c(r) - a_{L_0}(r) \quad (1.2.1)$$

όπου  $\alpha_{Lo}(r)$  είναι η γωνία μηδενικής άντωσης της αεροτομής που βρίσκεται στην ακτινική θέση  $r$ , (δες Σχ. 1.2.2).



Σχήμα 1.2.1 Διατομή πτέρυγας προπέλας



Σχήμα 1.2.2 Μεταβολή (μείωση) της γωνίας πρόσπτωσης με την αύξηση της ακτινικής απόστασης.

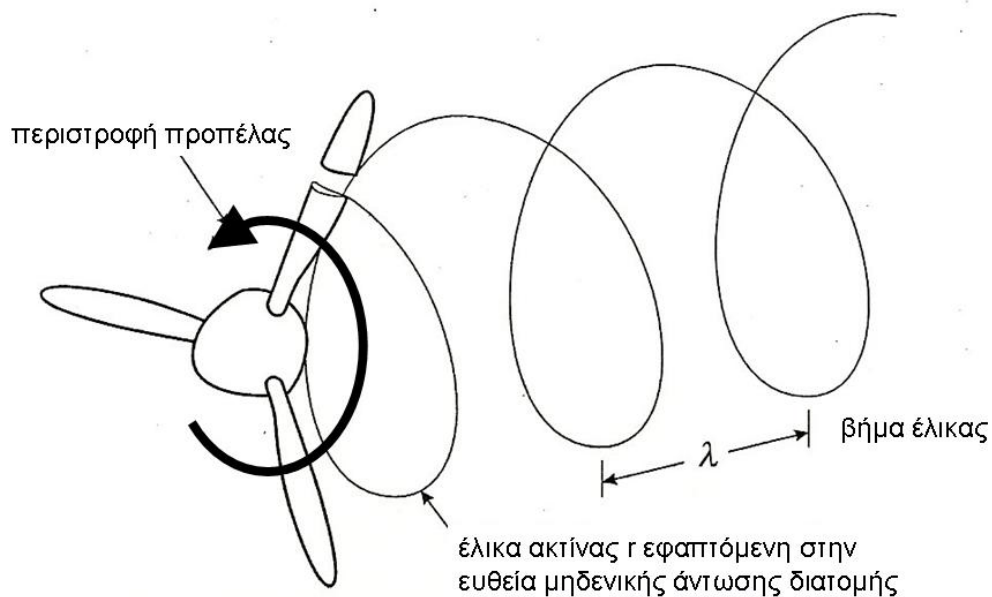
Το αεροδυναμικό βήμα προπέλας είναι το μήκος που θα διένυε η προπέλα αν κινούνταν ελεύθερα στον αέρα, συμβολίζεται με  $\lambda$  (δες Σχ. 1.2.3) και ορίζεται σε σχέση με την ευθεία μηδενικής άντωσης από :

$$\lambda(r) = 2\pi r \tan \beta \quad (1.2.2)$$

Το αεροδυναμικό βήμα  $\lambda$  προσδιορίζεται από το βήμα χορδής  $\lambda_c$  από την σχέση

$$\lambda(r) = 2\pi r \frac{\lambda_c - 2\pi r \tan a_{L_0}}{2\pi r + \lambda_c \tan a_{L_0}} \quad (1.2.3)$$

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι για προπέλα σταθερού βήματος το αεροδυναμικό βήμα είναι σταθερό.



Σχήμα 1.2.3 Ορισμός αεροδυναμικού βήματος  $\lambda$  έλικας.

Όπως οι πτέρυγες του αεροσκάφους έτσι και τα περύγια της προπέλας φορτίζονται από την άντωση και την οπισθέλκουσα. Η οπισθέλκουσα αναπτύσσει μια ροπή που αντιστέκεται στην περιστροφή της προπέλας και αντισταθμίζεται από την στρεπτική ροπή της μηχανής. Θεωρώντας ότι ο άξονας της προπέλας είναι παράλληλος στην διεύθυνση κίνησης είναι φανερό ότι η ροπή που αναπτύσσεται στην προπέλα ενεργεί στο αεροσκάφος σαν ροπή περιστροφής και πρέπει να αντισταθμίζεται από την αντίθετη φορά ροπής που αναπτύσσεται από την άλλη προπέλα, ή από μια ροπή του πλαισίου του αεροχήματος.

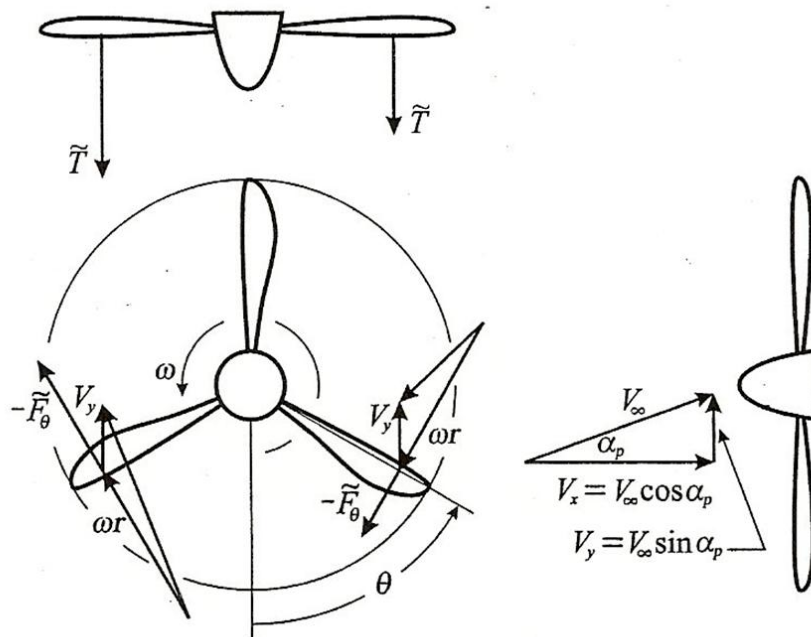
Μέτρο του καλού σχεδιασμού προπέλας είναι η ελαχιστοποίηση της ροπής που είναι αναγκαία για την περιστροφή της. Ο λόγος της παραγόμενης ώσης προς την ροπή περιστροφής είναι ανάλογος του λόγου της άντωσης προς την οπισθέλκουσα που μας είναι γνωστός από την θεωρία πτέρυγας.

Ισχύς πέδησης προπέλας είναι το γινόμενο της ροπής περιστροφής με την γωνιακή ταχύτητα της προπέλας και είναι η ισχύς που πρέπει να έχει η μηχανή που την περιστρέφει. Η ισχύς ώσης της προπέλας είναι το γινόμενο της ώσης με την ταχύτητα και είναι η ωφέλιμη ισχύς που παρέχεται από την προπέλα στο αερόχημα για την κατανίκηση της οπισθέλκουσας. Απόδοση προώθησης είναι ο λόγος της ισχύος ώσης με την ισχύ πέδησης και αποτελεί μέτρο απόδοσης της προπέλας. Η ώση



που παράγεται από την προπέλα όταν το αεροσκάφος είναι ακίνητο ονομάζεται στατική ώση.

Σε μια προπέλα που δεν είναι ευθυγραμμισμένη με την κατεύθυνση πτήσης αναπτύσσονται πρόσθετα αεροδυναμικά φορτία. Η γωνία που σχηματίζει ο άξονας προπέλας με την κατεύθυνση κίνησης ονομάζεται γωνία ώσης,  $\alpha_p$  ή γωνία προσβολής της προπέλας (δες Σχ. 1.2.4). Η γωνία ώσης  $\alpha_p$  αλλάζει με την γωνία προσβολής του αεροσκάφους κατά την διάρκεια πτήσης.



Σχήμα 1.2.4 Αεροδυναμικά φορτία που ασκούνται στα περιστρεφόμενα πτερύγια προπέλας και αποτέλεσμα της γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha_p$

Όταν ο άξονας της προπέλας βρίσκεται υπό θετική γωνία πρόσπτωσης με την κατεύθυνση κίνησης τότε υπάρχει μια συνιστώσα της ταχύτητας στο επίπεδο περιστροφής της, όπως φαίνεται στο Σχ.1.2.4. Η συνιστώσα αυτή της ταχύτητας μεταβάλλει την σχετική ταχύτητα των πτερυγίων. Η αύξηση της ταχύτητας για τα πτερύγια που κινούνται προς τα κάτω αυξάνει την άντωση και την οπισθέλκουσα ενώ η μείωση της ταχύτητας στα προς τα πάνω κινούμενα πτερύγια μειώνει την άντωση και την οπισθέλκουσα. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε διαφορετική ώση από κάθε πλευρά και την δημιουργία πλάγιας ροπής.

### 1.3 Θεωρία πτερυγίων προπέλας

Τα πτερύγια περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και κινούνται σχετικά με τον αέρα με μια ταχύτητα  $V_\infty$  (δες Σχ. 1.3.1). Υποθέτουμε ότι

το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας  $V_\infty$  είναι στην κατεύθυνση του άξονα. Η ολική γωνία κατωρεύματος (downwash angle),  $\varepsilon_b$ , της αεροτομής που βρίσκεται σε ακτινική θέση  $r$  αποτελείται από δυο μέρη. Από την γωνία κατωρεύματος  $\varepsilon_\infty$  που προέρχεται από την πρόσθια κίνηση του αεροσκάφους με ταχύτητα  $V_\infty$  και την επαγόμενη από τα άλλα πτερύγια γωνία κατωρεύματος,  $\varepsilon_i$  όπως φαίνονται στο Σχ. 1.3.1, δηλαδή

$$\varepsilon_b(r) = \varepsilon_\infty(r) + \varepsilon_i(r) \quad (1.3.1)$$

Η ώση και το διάνυσμα περιφερειακής δύναμης εκφράζονται σαν συναρτήσεις της άντωσης και οπισθέλκουσας από τις σχέσεις

$$\tilde{T} = \tilde{L} \cos \varepsilon_b - \tilde{D} \sin \varepsilon_b \quad (1.3.2)$$

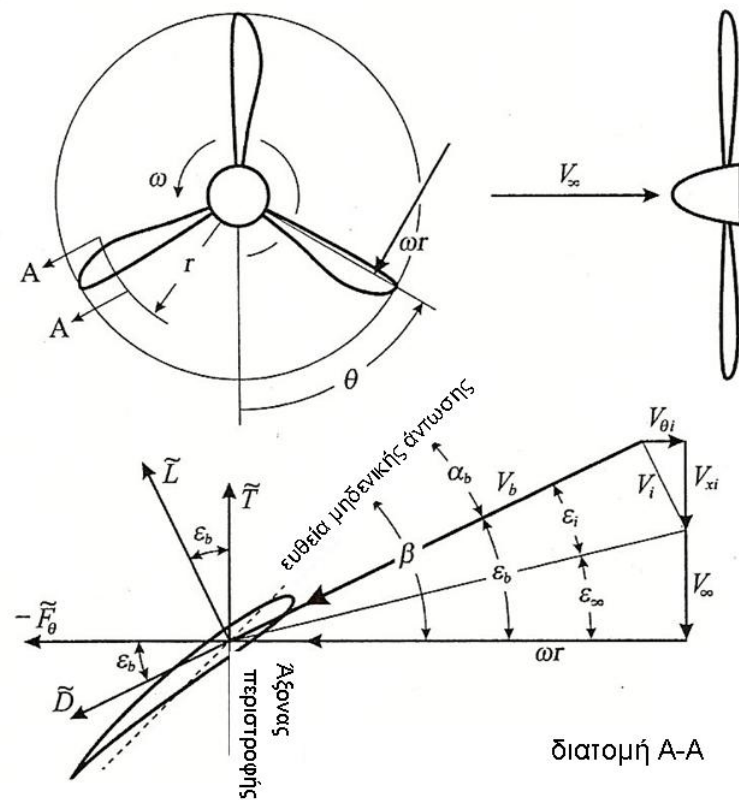
$$\tilde{F}_\theta = -\tilde{L} \sin \varepsilon_b - \tilde{D} \cos \varepsilon_b \quad (1.3.3)$$

Η γωνία  $\varepsilon_b$  υπολογίζεται από τις συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας  $V_{x_i}$  και  $V_{\theta_i}$  από την σχέση :

$$\varepsilon_b(r) = \tan^{-1} \left( \frac{V_\infty + V_{x_i}}{\omega r - V_{\theta_i}} \right) \quad (1.3.4)$$

και η γωνία κατωρεύματος  $\varepsilon_\infty$  υπολογίζεται από την σχέση

$$\varepsilon_\infty(r) = \tan^{-1} \left( \frac{V_\infty}{\omega r} \right) \quad (1.3.5)$$



Σχήμα 1.3.1 Διάγραμμα ταχυτήτων και δυνάμεις που ασκούνται σε ένα περιστρεφόμενο πτερυγίο προπέλας.

οπότε

$$\varepsilon_i(r) = \tan^{-1} \left( \frac{V_\infty + V_{x_i}}{\omega r - V_{\theta_i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{V_\infty}{\omega r} \right) \quad (1.3.6)$$

Η γωνία προσβολής του πτερυγίου,  $\alpha_b$ , μετρούμενη από την ευθεία μηδενικής άντωσης είναι

$$\alpha_b(r) = \beta(r) - \varepsilon_b(r) \quad (1.3.7)$$

Η ολική σχετική ταχύτητα του πτερυγίου ως προς την ταχύτητα αέρος του αεροπλάνου (airspeed) στο επίπεδο της διατομής του πτερυγίου είναι

$$\begin{aligned} V_b^2 &= (\omega r - V_{\theta_i})^2 + (V_\infty + V_{x_i})^2 = \\ &= \omega^2 r^2 \left[ \left( 1 - \frac{V_{\theta_i}}{\omega r} \right)^2 + \left( \frac{V_\infty}{\omega r} + \frac{V_{x_i}}{\omega r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Η άντωση που παράγεται από τα πτερύγια της προπέλας είναι

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \rho V_b^2 c_b \tilde{C}_L(\alpha_b) \quad (1.3.9)$$

όπου  $c_b$  και  $\tilde{C}_L$  είναι η τοπική χορδή και συντελεστής άντωσης αντίστοιχα. Παρόμοια η οπισθέλκουσα είναι

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} \rho V_b^2 c_b \tilde{C}_D(\alpha_b) \quad (1.3.10)$$

Οπότε τα διανύσματα της ώσης  $T$  κατά μήκος του άξονα περιστροφής και το διανύσματα  $F_\theta$  που είναι εφαπτόμενο στον κύκλο περιστροφή σε ακτινική απόσταση  $r$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \rho V_b^2 c_b (\tilde{C}_L \cos \varepsilon_b - \tilde{C}_D \sin \varepsilon_b) \quad (1.3.11)$$

$$\tilde{F}_\theta = \frac{1}{2} \rho V_b^2 c_b (-\tilde{C}_L \sin \varepsilon_b - \tilde{C}_D \cos \varepsilon_b) \quad (1.3.12)$$

Η ώση που παράγεται ανά μονάδα μήκους πτερυγίου σε μια πλήρη περιστροφή είναι το γινόμενο της ώσης ανά πτερύγια επί τον αριθμό πτερυγίων  $k$

$$\frac{dT}{dr} = k \tilde{T} = k \frac{\rho}{2} V_b^2 c_b (\tilde{C}_L \cos \varepsilon_b - \tilde{C}_D \sin \varepsilon_b) \quad (1.3.13)$$

Η ροπή που πρέπει να παράγει η μηχανή για να περιστρέψει την προπέλα είναι

$$\frac{dl}{dr} = -k r \tilde{F}_\theta = k \frac{\rho}{2} V_b^2 c_b (\tilde{C}_L \sin \varepsilon_b + \tilde{C}_D \cos \varepsilon_b) \quad (1.3.14)$$

Όταν η γεωμετρία της προπέλας είναι γνωστή τότε η χορδή αεροτομής και η γωνία  $\varepsilon_b$  είναι δεδομένες για κάθε ακτίνα  $r$ . Επί πλέον, οι συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας είναι γνωστές συναρτήσεις της ακτίνας και της τοπικής γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha_b$ , όπως φαίνεται από τις Εξ. (1.3.10) (1.3.11). Η ταχύτητα περιστροφής και η ταχύτητα πτήσης είναι επίσης γνωστές, οπότε η γωνία  $\varepsilon_\infty(r) = \tan^{-1}(V_\infty / \omega r)$ . Όμως οι Εξ. (1.3.13) και (1.3.14) περιέχουν τέσσερεις αγνώστους : την ώση  $T$ , την ροπή  $\ell$ , και τις δυο συνιστώσες των επαγομένων ταχυτήτων  $V_{x_i}$  και  $V_{\theta_i}$

(οι οποίες θα ήταν δυνατόν να υπολογισθούν εφ' όσον η γωνία κατωρέματος  $\varepsilon_b(r) = \tan^{-1}(V_\infty + V_{x_r} / \omega r - V_{\theta_r})$  ήταν γνωστή).

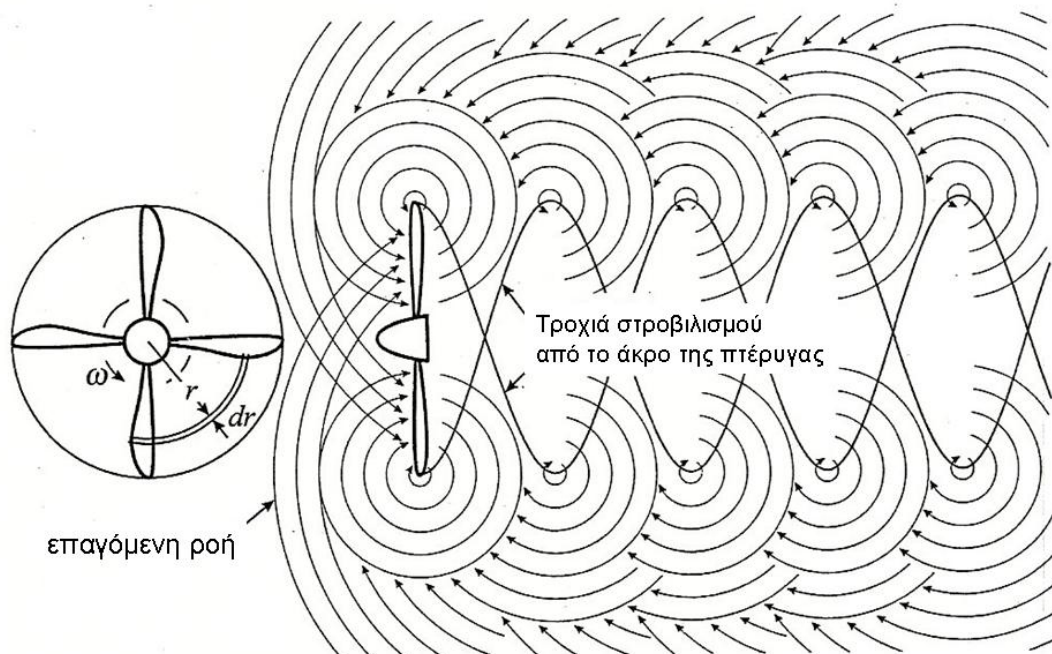
Η επί πλέον πληροφορία που απαιτείται για την λύση των Εξ. (1.3.13) και (1.3.14) βρίσκεται άμα θεωρήσουμε την άντωση που προέρχεται από τον στροβιλισμό που δημιουργείται από τα περιστρεφόμενα πτερύγια.

Όπως είναι γνωστό από την αεροδυναμική δεν είναι δυνατή η ανάπτυξη άντωσης χωρίς την δημιουργία στροβιλισμού. Η άντωση σε κάθε διατομή των πτερυγίων της προπέλας σχετίζεται με την πυκνότητα, την σχετική ταχύτητα, και την ολική κυκλοφορία με την εξίσωση

$$\tilde{L} = \rho V_b \Gamma \quad (1.3.15)$$

η παραπάνω σχέση μετά από αντικατάσταση της ταχύτητας και της άντωσης από τις Εξ. (1.3.8) και (1.3.9) γίνεται

$$\Gamma = \frac{1}{2} V_b c_b \tilde{C}_L = \frac{1}{2} \omega r c_b \tilde{C}_L \sqrt{\left(1 - \frac{V_{\theta_r}}{\omega r}\right)^2 + \left(\frac{V_\infty + V_{x_r}}{\omega r}\right)^2} \quad (1.3.16)$$

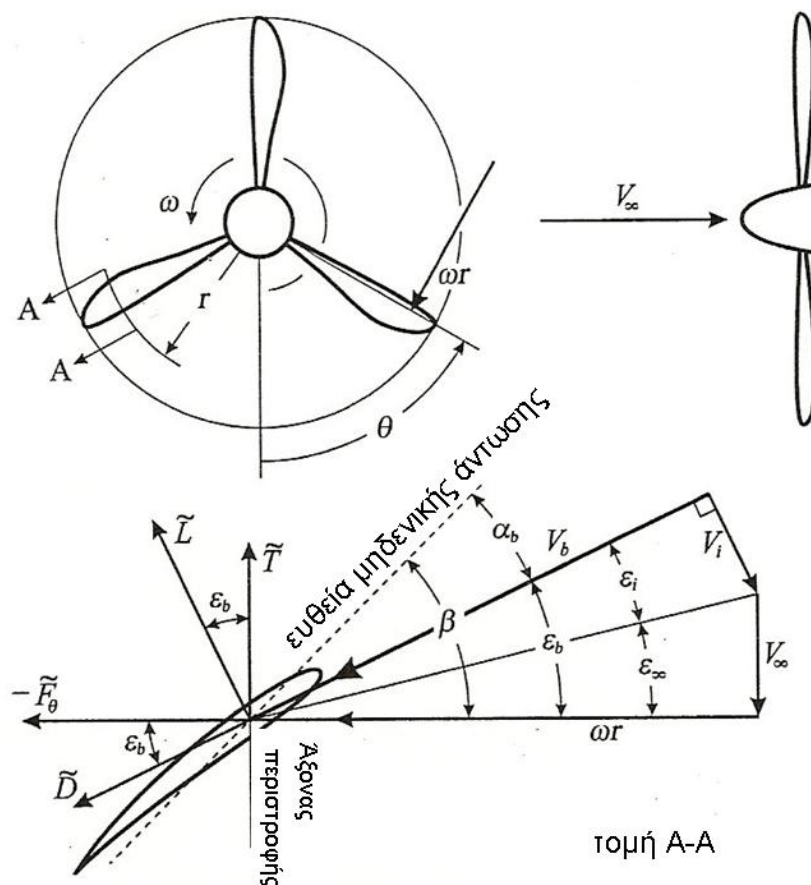


Σχήμα 1.3.2 Διάγραμμα της από στροβιλισμό επαγόμενης ροής στο απόρρευμα προπέλας.

Ο στροβιλισμός που δημιουργείται από τα πτερύγια διαχέεται από το άκρο τους και ακολουθεί μια ελικοειδή τροχιά μέσα σε μια κυλινδρική περιοχή πίσω από την προπέλα όπου υπάρχει ισχυρό κατώρευμα. Στην περιοχή που βρίσκεται στο εξωτερικό της ελικοειδούς τροχιάς υπάρχει ανώρευμα. Η συνήθης σύμβαση για τον όρο κατώρευμα αναφέρεται σε ροή με κατεύθυνση αντίθετη με το διάνυσμα της άντωσης. Το μοντέλο ροής που περιγράψαμε αναπαρίσταται γραφικά στο Σχ. 1.3.2.

Ο υπολογισμός της επαγόμενης ταχύτητας από το ελικοειδές σύστημα στροβιλισμών που δημιουργείται από τα περιστρεφόμενα πτερύγια είναι πολύ πιο περίπλοκος από τον υπολογισμό της ταχύτητας που επάγεται από τον στροβιλισμό που δημιουργείται σε μια μεμονωμένη πτέρυγα. Οι παρακάτω απλουστευτικές παραδοχές χρησιμοποιούνται για την απλοποίηση του υπολογισμού της ταχύτητας.

1. Ο στροβιλισμός που διαχέεται από την πτέρυγα βρίσκεται σε μια επιφάνεια με σταθερό βήμα
2. Η επαγόμενη ταχύτητα υποτίθεται ότι είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας  $V_b$  που είναι το άθροισμα της ταχύτητας περιστροφής της ταχύτητας πτήσης και της επαγόμενης ταχύτητας.



Σχήμα 1.3.3

Δυνάμεις και ταχύτητες σε μία διατομή πτερυγίου προπέλας.

Η ταχύτητα  $V_b$  όπως φαίνεται από το Σχ. 1.3.3 είναι

$$V_b = \sqrt{\omega^2 r^2 + V_\infty^2} \cos \varepsilon_i = \frac{\omega r}{\cos \varepsilon_\infty} \cos \varepsilon_i \quad (1.3.17)$$

Από το Σχ. 1.3.3 επίσης βρίσκουμε τις συνιστώσες κατά μήκος του άξονα και την κατεύθυνση που είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια περιστροφής

$$V_i = \sqrt{\omega^2 r^2 + V_\infty^2} \sin \varepsilon_i = \frac{\omega r}{\cos \varepsilon_\infty} \sin \varepsilon_i \quad (1.3.18)$$

$$V_{x_i} = V_i \cos \varepsilon_b = \frac{\omega r}{\cos \varepsilon_\infty} \sin \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) \quad (1.3.19)$$

$$V_{\theta_i} = V_i \sin \varepsilon_b = \frac{\omega r}{\cos \varepsilon_\infty} \sin \varepsilon_i \sin(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) \quad (1.3.20)$$

Η υπόθεση του σταθερού βήματος επιτρέπει να εκφράσουμε την συνιστώσα  $V_{\theta_i}$  στο επίπεδο του δίσκου της προπέλας σαν συνάρτηση της τοπικής κυκλοφορίας διατομής,  $\Gamma$ , με την παρακάτω σχέση

$$V_{\theta_i} = \frac{k \Gamma}{\kappa 4 \pi r} \quad (1.3.21)$$

όπου η σταθερά  $\kappa$  είναι ο παράγοντας Golstein (Golstein kappa factor) ο οποίος βρίσκεται από πίνακες.

Η ταχύτητα  $V_{\theta_i}$  μπορεί επίσης να υπολογισθεί και από την παρακάτω σχέση

$$V_{\theta_i} \approx \frac{k \Gamma}{f 4 \pi r} \quad (1.3.22)$$

όπου η παράμετρος  $f$  ονομάζεται παράγοντας απωλειών Prandtl (Prandtl tip loss factor) δίνεται από την σχέση

$$f = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \exp \left\{ -\frac{k}{2 \sin \beta_r} \left( 1 - \frac{2r}{d_p} \right) \right\} \quad (1.3.23)$$

όπου  $\beta_r$  είναι η αεροδυναμική γωνία στο άκρο της προπέλας και  $d_p$  είναι η διάμετρος της.

Από τις Εξ. (1.3.16) και (1.3.17) η κυκλοφορία είναι

$$\Gamma = \frac{1}{2} V_b c_b \tilde{C}_L = \frac{1}{2} \omega r c_b \tilde{C}_L = \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \varepsilon_\infty} \quad (1.3.24)$$

και με αντικατάσταση της κυκλοφορίας από την Εξ. (1.3.24) και της ταχύτητας  $V_{\theta_i}$  από την Εξ. (1.3.20) στην σχέση του Prandtl, Εξ. (1.3.22) βρίσκουμε

$$\frac{k c_b}{16r} \tilde{C}_L - \cos^{-1} \left[ \exp \left\{ -\frac{k}{2 \sin \beta_r} \left( 1 - \frac{2r}{d_p} \right) \right\} \right] \tan \varepsilon_i \sin(\varepsilon_\infty + \varepsilon_i) = 0 \quad (1.3.25)$$

που έχει σαν μόνο άγνωστο την επαγόμενη γωνία  $\varepsilon_i$  και πρέπει να λυθεί αριθμητικά. Όταν η επαγόμενη γωνία σε κάθε ακτινική θέση  $r$  είναι γνωστή, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε από την Εξ. (1.3.13) την συνολική ώση  $T$

$$T = \int_{r=r_h}^{r_i} \frac{dT}{dr} = \frac{k \rho \omega^2}{2} \int_{r=r_h}^{r_i} r^2 c_b \frac{\cos^2 \varepsilon_i}{\cos^2 \varepsilon_\infty} \left[ \tilde{C}_L \cos(\varepsilon_\infty + \varepsilon_i) - \tilde{C}_D \sin(\varepsilon_\infty + \varepsilon_i) \right] dr \quad (1.3.26)$$

και την απαιτούμενη ροπή από την Εξ. (1.3.14)

$$\ell = \int_{r_h}^{r_i} \frac{d\ell}{dr} dr = \frac{k \rho \omega^2}{2} \int_{r_h}^{r_i} r^3 c_b \frac{\cos^2 \varepsilon_i}{\cos^2 \varepsilon_\infty} \left[ \tilde{C}_D \cos(\varepsilon_\infty + \varepsilon_i) + \tilde{C}_L \sin(\varepsilon_\infty + \varepsilon_i) \right] dr \quad (1.3.27)$$

Στην γενική περίπτωση, που οι γωνίες  $\varepsilon_i$  είναι περίπλοκες συναρτήσεις του  $r$ , οι παραπάνω εξισώσεις Εξ. (1.3.26) και (1.3.27) πρέπει να ολοκληρωθούν αριθμητικά για τον προσδιορισμό της συνολικής ώσης και ροπής της προπέλας.

Η ισχύς πέδησης της προπέλας είναι :

$$P_b = \ell \omega \quad (1.3.28)$$

οι αεροδυναμικοί συντελεστές προπέλας αδιαστατοποιούνται με την ταχύτητα περιστροφής και την διάμετρό της  $d_p$

$$\text{Συντελεστής ώσης} \quad C_T = \frac{T}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d_p^4} \quad (1.3.29)$$



$$\text{Συντελεστής ροπής} \quad C_l = \frac{\ell}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d_p^5} \quad (1.3.30)$$

$$\text{Συντελεστής ισχύος} \quad C_p = \frac{\ell \omega}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^3 d_p^5} \quad (1.3.31)$$

Η αδιάστατη μορφή των συντελεστών  $C_T$ ,  $C_p$  είναι

$$\tilde{C}_T = \frac{\pi^2}{4} \int_{\zeta=\zeta_h}^1 \zeta^2 \hat{c}_b \frac{\cos^2 \varepsilon_i}{\cos^2 \varepsilon_\infty} \left[ \tilde{C}_L \cos(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) - \tilde{C}_D \sin(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) \right] d\zeta$$

$$\tilde{C}_p = \frac{\pi^2}{8} \int_{\zeta=\zeta_h}^1 \zeta^3 \hat{c}_b \frac{\cos^2 \varepsilon_i}{\cos^2 \varepsilon_\infty} \left[ \tilde{C}_L \cos(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) + \tilde{C}_D \sin(\varepsilon_i + \varepsilon_\infty) \right] d\zeta$$

Όπου  $J = 2\pi V_\infty / \omega d_p$  είναι λόγος μετατόπισης (advance ratio), και  $\zeta = r / (d_p / 2)$ . Με τους παραπάνω ορισμούς αδιαστατοποιούνται και οι Εξ. (1.3.25)–(1.3.28).

Η αποδοτικότητα προώθησης προπέλας ορίζεται ως ο λόγος της ισχύος πρόωσης με την ισχύ πέδησης

$$\eta_p = \frac{TV_\infty}{\ell \omega} = \left[ \frac{T}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d_p^4} \right] \left[ \frac{V_\infty}{\left( \frac{\omega}{2\pi} \right) d_p} \right] \left[ \frac{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^3 d_p^5}{\ell \omega} \right] = \frac{C_T}{C_p} J \quad (1.3.32)$$

όπου ο όρος  $J = \frac{2\pi V_\infty}{\omega d_p}$  ονομάζεται λόγος προώθησης (advance ratio)

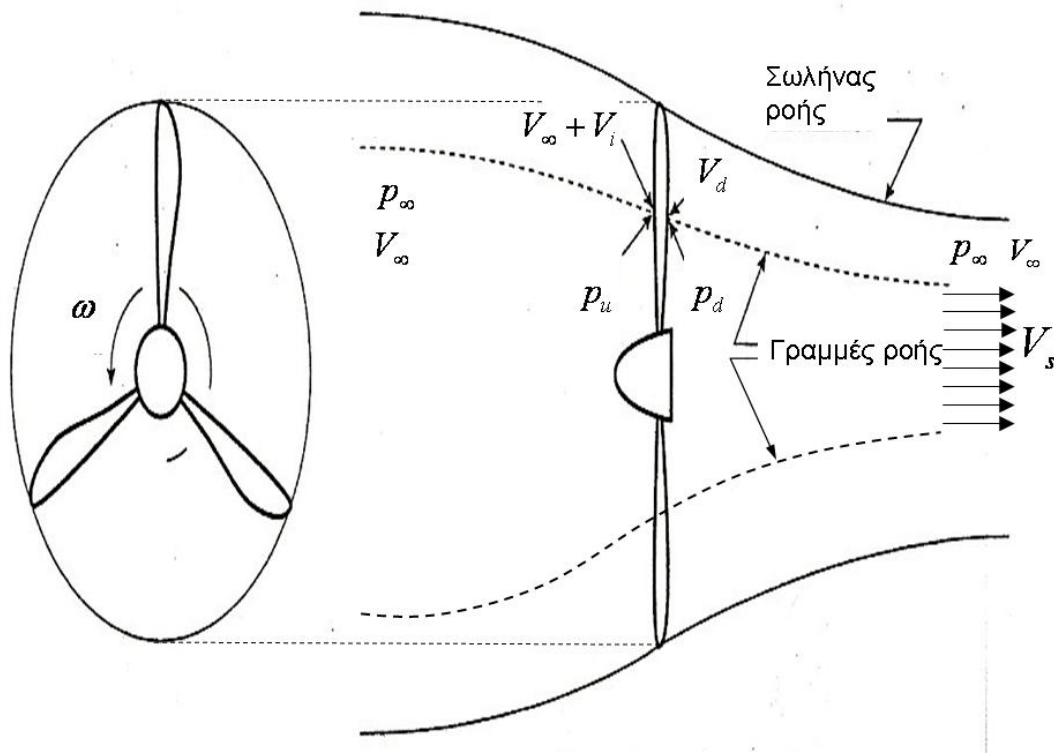
#### 1.4 Θεωρία ορμής προπέλας (propeller momentum theory)

Η θεωρία ορμής προπέλας είναι μη ιξώδης θεωρία και βασίζεται στην υπόθεση ενός σωλήνα ροής (stream-tube) που περικλείει την προπέλα όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4.1. Ο σωλήνας ροής εκτείνεται μακριά από την προπέλα και έχει τα δυο άκρα του στην περιοχή του πεδίου όπου η πίεση είναι αδιατάρακτη και ίση με την στατική πίεση. Οι απλουστευτικές παραδοχές της θεωρίας ορμής είναι :

1. Ασυμπίεστη και μη ιξώδες ροή
2. Απουσία περιστροφής ρευστού μέσα στον σωλήνα ροής

3. Ομοιόμορφη ταχύτητα σε κάθε διατομή
4. Ομοιόμορφη πίεση σε κάθε διατομή

Η εφαρμογή των παραπάνω απλουστευτικών παραδοχών έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία του μονοδιάστατου μοντέλου του Σχ. 1.4.1, που περιγράφεται παρακάτω.



Σχήμα 1.4.1 Μοντέλο ροής σε περιστρεφόμενη προπέλα βασισμένο στην κλασική θεωρία ορμής (classical momentum theory) που αμελεί την περιστροφή του ρευστού.

Το ρευστό στην είσοδο του σωλήνα ροής έχει πίεση  $p_\infty$  και ταχύτητα  $V_\infty$ . Επειδή η προπέλα αναπτύσσει ώση η πίεση μπροστά από την προπέλα  $p_u$  είναι μικρότερη από την πίεση στην είσοδο του σωλήνα ροής,  $p_u < p_\infty$ . Πίσω από τον δίσκο της προπέλας η πίεση  $p_d$  είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην είσοδο του σωλήνα ροής,  $p_d > p_\infty$ . Εξ ορισμού μπροστά από τον δίσκο της προπέλας η ταχύτητα είναι η ταχύτητα πτήσης  $V_\infty$  συν την επαγόμενη ταχύτητα  $V_i$  ενώ η ταχύτητα πίσω από τον δίσκο της προπέλας συμβολίζεται με  $V_d$ . Η αρχή της διατήρησης της μάζας για τον όγκο που περικλείει την προπέλα και έχει επιφάνεια  $A_p$  δίνει :

$$\rho V_d A_p = \rho(V_\infty + V_i) A_p$$

ή

$$V_d = V_\infty + V_i \quad (1.4.1)$$

Εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli κατά μήκος μιας γραμμής ροής του Σχ. 1.4.1 δίνει :

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_u}{\rho} + \frac{(V_\infty + V_i)^2}{2} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{p_d}{\rho} + \frac{V_d^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} \quad (1.4.3)$$

όπου  $V_s$  είναι η ταχύτητα απορρεύματος μακριά από την προπέλα όπου η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Αφαιρώντας την Εξ. (1.4.2) από την Εξ. (1.4.3) και αντικαθιστώντας  $V_d = V_i + V_\infty$  βρίσκουμε :

$$\frac{V_s^2}{2} - \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} \quad (1.4.4)$$

Η ώση που παράγεται από την προπέλα είναι :

$$T = A_p (p_d - p_u) \quad (1.4.5)$$

και επειδή η ώση εφαρμόζεται στο ρευστό προκαλεί αύξηση της ορμής του ίση με την παραγόμενη ώση

$$T = \dot{m}(V_s - V_\infty) \quad (1.4.6)$$

όπου ο ρυθμός ροής μάζας  $\dot{m}$  δια μέσω της επιφάνειας  $A_p$  δίνεται από την σχέση :

$$\dot{m} = A_p \rho (V_\infty + V_i) \quad (1.4.7)$$

οπότε ή ώση είναι :

$$T = A_p \rho (V_\infty + V_i)(V_s - V_\infty) \quad (1.4.8)$$

Από τις Εξ. (1.4.5) και (1.4.8) βρίσκουμε :

$$A_p (p_d - p_u) = A_p \rho (V_\infty + V_i)(V_s - V_\infty)$$

ή

$$\frac{p_d - p_u}{\rho} = (V_\infty + V_i)(V_s - V_\infty) \quad (1.4.9)$$

και από τις Εξ. (1.1.4) και (1.4.9)

$$\frac{V_s^2 - V_\infty^2}{2} = (V_\infty + V_i)(V_s - V_\infty)$$

ή

$$V_s = V_\infty + 2 V_i \quad (1.4.10)$$

Η ισχύς πέδησης βρίσκεται από την εφαρμογή της εξίσωσης ενέργειας

$$P = \dot{m} \left( h_s - h_\infty + \frac{V_s^2 - V_\infty^2}{2} \right)$$

που με αντικατάσταση της Εξ. (1.4.7) για την ροή μάζας  $\dot{m}$  από την Εξ. (1.4.7) γίνεται :

$$P = A_p \rho (V_\infty + V_i) \cdot \left( \frac{V_s^2 - V_\infty^2}{2} \right) \quad (1.4.11)$$

Με την χρήση της Εξ. (1.4.10) η ώση και η ισχύς πέδησης είναι :

$$T = 2 A_p \rho (V_\infty + V_i) V_i \quad (1.4.12)$$

Ενώ η ισχύς πέδησης δηλαδή η ισχύς που απαιτείται για την περιστροφή της προπέλας δίνεται από την σχέση

$$P = 2 A_p \rho (V_\infty + V_i)^2 V_i \quad (1.4.13)$$

η επαγόμενη ταχύτητα είναι :

$$V_i = \sqrt{\frac{V_\infty^2}{4} + \frac{T}{3 A_p \rho}} - \frac{V_\infty}{2} \quad (1.4.14)$$

οπότε η ισχύς πέδησης μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση της ώσης και της ταχύτητας πτήσης

$$P = T \left( \frac{V_\infty}{2} + \sqrt{\frac{V_\infty^2}{4} + \frac{T}{2A_p \rho}} \right) \quad (1.4.15)$$

Η αποδοτικότητα πρόωσης (ideal efficiency) είναι :

$$\eta_i = \frac{TV_\infty}{P} = \frac{2A_p \rho (V_\infty + V_i) V_i V_\infty}{2A_p \rho (V_\infty + V_i)^2 V_i} = \frac{V_\infty}{V_\infty + V_i} = \frac{1}{1 + \frac{V_i}{V_\infty}}$$

που με αντικατάσταση της επαγόμενης ταχύτητα από την Εξ, (1.4.14) γίνεται:

$$\eta_i = \left[ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{T}{2A_p \rho V_\infty^2}} \right]^{-1} \quad (1.4.16)$$

Η αποδοτικότητα πρόωσης που βρίσκουμε από την θεωρία ορμής προπέλας είναι η ιδανική απόδοση λόγω των υποθέσεων ασυμπίεστης και μη ιξώδους ροής που χρησιμοποιήσαμε.

Η επαγόμενη ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί με αδιάστατα μεγέθη από την σχέση

$$V_i = \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) d_p \left[ \sqrt{\frac{J^2}{4} + \frac{2C_T}{\Pi}} - J/2 \right] \quad (1.4.17)$$

όπου

$$C_T = \frac{T}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d_p^2}, \quad J = \frac{V_\infty}{\left( \frac{\omega}{2\pi} \right) d_p}$$

Παρόμοια από την Εξ. (1.4.15) ο συντελεστής ισχύος είναι

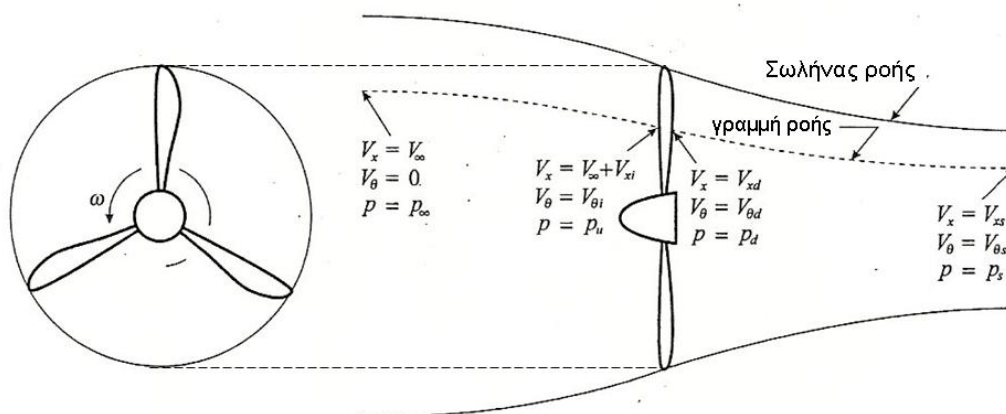
$$C_P = \frac{P}{\rho \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d_p^5} = C_T \left( \frac{J}{2} + \sqrt{\left( \frac{J}{2} \right)^2 + \frac{2C_T}{\pi}} \right) \quad (1.4.18)$$

Από την Εξ. (1.4.16) η ιδανική απόδοση προπέλας εκφράζεται επίσης με τους συντελεστές ώσης και ισχύος από :

$$n_i = \frac{C_T J}{C_p} = \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2C_T}{\pi J^2}} \right]^{-1} \quad (1.4.19)$$

Η απλουστευμένη θεωρία προπέλας που παρουσιάστηκε έχει το μειονέκτημα ότι δεν λαμβάνει υπ' όψη την περιστροφική κίνηση του ρευστού στο απόρρευμα της προπέλας. Επειδή προφανώς κάποια ισχύς δαπανάται για αυτήν την περιστροφή ή ώση και η απόδοση της προπέλας είναι μικρότερες από αυτές που προβλέπει η εξιδακικευμένη θεωρία. Όπως θα δείξουμε παρακάτω είναι δυνατόν να λάβουμε υπ' όψη την περιστροφική κίνηση του ρευστού όταν συμπεριλάβουμε και την γωνιακή ορμή στην διατήρηση της ορμής.

Αναφερόμενοι και πάλι στον σωλήνα ροής του Σχ. 1.4.2 και θεωρώντας ύπαρξη ομοιόμορφης περιστροφικής κίνησης του ρευστού και ομοιόμορφη τιμή πίεσης εξόδου, που δεν είναι βέβαια συμβατή με την υπόθεση περιστρεφόμενου απορεύματος, είναι δυνατόν να βελτιώσουμε τις προβλέψεις της απλοποιημένης θεωρίας ορμής.



Σχήμα 1.4.2 Μοντέλο ροής σε περιστρεφόμενη προπέλα βασισμένο στην κλασική θεωρία ορμής (classical momentum theory) που παίρνει υπό όψη την περιστροφή του ρευστού.

Εφαρμόζοντας διατήρηση της γωνιακής ορμής μπροστά από την προπέλα για το μοντέλο του Σχ.1.4.2, όπου η περιστροφή του απορεύματος έχει ληφθεί υπ' όψη, βρίσκουμε

$$V_{\theta_i} = 0 \quad (1.4.20)$$

$$V_{x_i} = V_i \quad (1.4.21)$$

Επειδή όμως ο αέρας δεν έχει γωνιακή ορμή στην είσοδο σωλήνα ροής, δεν μπορεί να έχει γωνιακή ορμή όταν συναντά την προπέλα. Γωνιακή ορμή προστίθεται στον αέρα καθώς περνάει από την προπέλα και η ροή της γωνιακής ορμής μετά την προπέλα πρέπει να είναι σταθερή. Η γωνιακή ταχύτητα όμως δεν παραμένει σταθερή καθώς απομακρυνόμαστε από την προπέλα διότι λόγω της διαφοράς πίεσης έχουμε επιτάχυνση της ροής που προκαλεί στένωση του σωλήνα ροής όπως φαίνεται στο Σχ.1.4.2. Επειδή λοιπόν η γωνιακή ορμή είναι σταθερή η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται όσο απομακρυνόμαστε από την προπέλα.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση συνέχειας για ένα όγκο που περικλείει την προπέλα ακριβώς μπροστά και πίσω από τον δίσκο της προπέλας βρίσκουμε :

$$\rho V_{x_d} = \rho(V_{\infty} + V_{x_i})$$

και λόγω της υπόθεσης ασυμπίεστης ροής η αρχή διατήρησης μάζας επιβάλλει

$$V_{x_d} = V_{\infty} + V_{x_i} \quad (1.4.22)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας γραμμής ροής πριν από την προπέλα βρίσκουμε

$$\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{V_{\infty}^2}{2} = \frac{p_u}{\rho} + \frac{(V_{\infty} + V_i)^2}{2} \quad (1.4.23)$$

και για την γραμμή ροής μετά τον δίσκο της προπέλας

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_{x_s}^2 + V_{\theta_s}^2}{2} = \frac{p_d}{\rho} + \frac{(V_{\infty} + V_i)^2 + V_{\theta_d}^2}{2} \quad (1.4.24)$$

όπου  $V_{xs}$  και  $V_{\theta s}$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας μακριά από τον δίσκο προπέλας. Από τις Εξ. (1.4.23) και (1.4.24) βρίσκουμε

$$\frac{p_s - p_\infty}{\rho} + \frac{V_{xs}^2 + V_{\theta s}^2 - V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} + \frac{V_{\theta d}^2}{2} \quad (1.4.25)$$

Η ταχύτητα εξόδου μακριά από τον δίσκο υποτίθεται ομοιόμορφη οπότε

$$\frac{p_s - p_\infty}{\rho} + \frac{V_{xs}^2 + \omega_s^2 r_s^2 - V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} + \frac{V_{\theta d}^2}{2} \quad (1.4.26)$$

επειδή ακόμα μακριά από τον δίσκο προπέλας η ροή είναι ανεξάρτητη από την θέση κατά μήκος του άξονα x από την εξίσωση συνέχειας έχουμε :

$$\frac{d(V_{rs} r_s)}{d r_s} = 0 \quad (1.4.27)$$

και οι εξισώσεις ορμής για ασυμπίεστη και μη συνεκτική ροή για τις υποθέσεις που κάναμε γράφονται :

$$\rho \left( V_{rs} \frac{dV_{rs}}{dr_s} - \frac{V_{\theta s}^2}{r_s} \right) = - \frac{\partial p_s}{\partial r_s} \quad (1.4.28)$$

$$p \left( V_{rs} \frac{\partial V_{\theta s}}{\partial r_s} + \frac{V_{rs} V_{\theta s}}{r_s} \right) = 0 \quad (1.4.29)$$

$$p V_{rs} \frac{V_{xs}}{\partial r_s} = 0 \quad (1.4.30)$$

Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας πού μακριά από τον δίσκο της προπέλας

$$V_{rs} = 0 \quad (1.4.31)$$

Οπότε η Εξ. (1.4.28) γίνεται :

$$\frac{\partial p_s}{\partial r_s} = \rho \frac{V_{\theta s}^2}{r_s} = \rho \omega_s^2 r_s^2 \quad (1.4.32)$$

και από ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε



$$p_s(r_s) = p_\infty - \frac{\rho \omega_s^2}{2} (R_s^2 - r_s^2) \quad (1.4.33)$$

Αντικαθιστώντας την πίεση  $p_s$  από την παραπάνω σχέση στην Εξ. (1.3.26) βρίσκουμε :

$$\omega_s^2 \left( r_s^2 - \frac{R_s^2}{2} \right) + \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} + \frac{V_{\theta d}^2}{2} \quad (1.4.34)$$

Η εξίσωση συνέχειας μετά τον δίσκο της προπέλας ακτίνας  $R_p$  και της διατομής εξόδου ακτίνας  $R_s$  επιβάλλει  $\pi R_p^2 \rho (V_\infty + V_i) = \pi R_s^2 \rho V_{xs}$ , δηλαδή:

$$R_s^2 = R_p^2 \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} \quad (1.4.35)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει και για κάθε ακτίνα των σωλήνων ροής μεταξύ εισόδου και εξόδου δηλαδή  $r_s^2 = r_p^2 (V_\infty + V_i) / V_{xs}$ . Οπότε η Εξ. (1.3.34) γίνεται :

$$\omega_s^2 \left( r_p^2 - \frac{R_p^2}{2} \right) \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} + \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} + \frac{V_{\theta d}^2}{2} \quad (1.4.36)$$

Η διατήρηση της γωνιακής ορμής επιβάλλει  $r_p V_{\theta d} = r_s V_{\theta s} = r_s^2 \omega_s$  και λαμβάνοντας υπ' όψη την Εξ. (1.4.35) έχουμε

$$V_{\theta d} = \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} r_p \omega_s \quad (1.4.37)$$

που όταν αντικατασταθεί στην Εξ. (1.4.36) δίνει

$$\omega_s^2 \left( r_p^2 - R_p^2 / 2 \right) \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} + \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} = \frac{p_d - p_u}{\rho} + \left( \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} \right)^2 \frac{r_p^2 \omega_s^2}{2}$$

ή

$$\frac{p_d - p_u}{\rho} = \omega_s \left[ \left( 1 - \frac{V_\infty + V_i}{2V_{xs}} \right) r_p^2 - R_p^2 / 2 \right] \frac{V_\infty + V_i}{V_{xs}} + \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} \quad (1.4.38)$$

Η συνιστώσα της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα σχετίζεται με την παραγόμενη ώση μέσω της παρακάτω ολοκληρωτικής εξίσωσης ορμής στην κατεύθυνση  $x$

$$T + \int_{A_s} (p_\infty - p_s) dA_s = \int_{A_s} (V_{xs} - V_\infty) dm$$

που με την βοήθεια Εξ. (1.4.33) γίνεται :

$$T + \int_{r_s=0}^{R_s} \frac{\rho \omega_s^2}{2} (R_s^2 - r_s^2) (2\pi r_s) dr_s = \int_{r_s=0}^{R_s} (V_{xs} - V_\infty) (\rho V_{xs} 2\pi r_s dr_s)$$

και μετά από ολοκλήρωση προκύπτει

$$T = \pi R_s^2 \rho V_{xs} (V_{xs} - V_\infty) - \frac{\pi R_s^4 \rho \omega_s^2}{4}$$

Με αντικατάσταση της ακτίνας σωλήνα εξόδου  $R_s$  από την ακτίνα προπέλας  $R_p$  από την Εξ. (1.4.35) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$T = \pi R_p^2 \rho \left[ (V_\infty + V_i)(V_{xs} - V_\infty) + \frac{(V_\infty + V_i)^2}{4V_{xs}^2} \omega_s^2 R_p^2 \right] \quad (1.4.39)$$

Η ώση που παράγεται από την προπέλα δίνεται επίσης από την σχέση

$$T = \int_{A_p} (p_d - p_u) dA_p = \int_{r_p=0}^{R_p} (p_d - p_u) (2\pi r_p dr_p) = \quad (1.4.40)$$

$$= \pi R_p^2 \rho \left[ \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} - \left( \frac{V_\infty + V_i}{2V_{xs}} \right)^2 \omega_s^2 R_p^2 \right]$$

Απαλείφοντας την ώση από τις Εξ. (1.4.39) και (1.4.40) βρίσκουμε

$$\frac{V_s^2 - V_\infty^2}{2} = (V_\infty + V_i)(V_{xs} - V_\infty)$$

ή

$$V_{xs} = V_\infty + 2V_i \quad (1.4.41)$$

που είναι η ίδια με την σχέση της Εξ. (1.4.10) που βρήκαμε για ανάλυση χωρίς περιστρεφόμενο ρεύμα.

Η περιστροφή του απορεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη ροπής που βρίσκεται από την εφαρμογή της εξίσωσης διατήρησης γωνιακής ορμής.

$$\ell = \int_{A_s} r_s A_{\theta s} d\dot{m} = \int_{r_s=0}^{R_s} r_s^2 \omega_s (\rho V_{xs} 2\pi r_s dr_s) = \frac{\pi}{2} \rho V_{xs} \omega_s R_s^4$$

που με αντικατάσταση ακτίνας  $r_s$  από την Εξ. (1.4.35) γίνεται

$$\ell = \pi \rho \frac{(V_\infty + V_i)^2}{2V_{xs}} \omega_s R_p^4 \quad (1.4.42)$$

Επί πλέον η ισχύς που απαιτείται για την περιστροφή της προπέλας ικανοποιεί την εξίσωση διατήρησης ενέργειας οπότε

$$\begin{aligned} \omega l &= \int_{A_s} \left( h_s - h_\infty + \frac{V_{xs}^2 + V_{\theta s}^2 - V_\infty^2}{2} \right) d\dot{m} = \int_{A_s} \left( \frac{p_s - p_\infty}{\rho} + \frac{V_{xs}^2 + \omega_s^2 r_s^2 - V_\infty^2}{2} \right) \rho V_{xs} (2\pi r_s dr_s) \\ &= \pi R_s^2 \rho V_{xs} \left( \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} \right) = \pi R_p^2 \rho (V_\infty + V_i) \left( \frac{V_{xs}^2 - V_\infty^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του απορεύματος βρίσκεται από τις Εξ. (1.4.42) και (1.4.43) με απαλοιφή της ροπής  $\ell$

$$\omega_s = \frac{V_{xs} (V_{xs}^2 - V_\infty^2)}{\omega R_p^2 (V_\infty + V_i)} = \frac{4(V_\infty + 2V_i)V_i}{\omega R_p^2} \quad (1.4.44)$$

οπότε η ώση προπέλας δίνεται από

$$T = 2\pi R_p^2 \rho (V_\infty + V_i) V_i \left[ 1 - \frac{2(V_\infty + V_i)V_i}{\omega^2 R_p^2} \right] \quad (1.4.45)$$

και η ισχύς περιστροφής της προπέλας

$$P = \omega l = 2\pi R_p^2 \rho (V_\infty + V_i)^2 V_i \quad (1.4.46)$$

οπότε η απόδοση προπέλας είναι

$$\eta_i = \frac{TV_\infty}{P} = \frac{V_\infty}{V_\infty + V_i} - \frac{2V_\infty V_i}{\omega^2 R_p^2} \quad (1.4.47)$$

Λύνοντας την Εξ. (1.4.45) ως προς  $V_i$  βρίσκουμε

$$V_i = \frac{1}{2} \left( \left[ V_\infty^2 + \omega^2 R_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4T}{A_p \rho \omega^2 R_p^2}} \right) \right]^{1/2} - V_\infty \right) \quad (1.4.48)$$

όπου μόνο το θετικό πρόσημο έχει φυσική σημασία επειδή η επαγόμενη ταχύτητα πρέπει να είναι θετική. Η παραπάνω σχέση εκφρασμένη σε αδιάστατες ποσότητες είναι

$$V_i = \frac{\omega d_p}{4\pi} \left( \left[ J^2 + \pi^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16C_T}{\Pi^3}} \right) \right]^{1/2} - J \right) \quad (1.4.49)$$

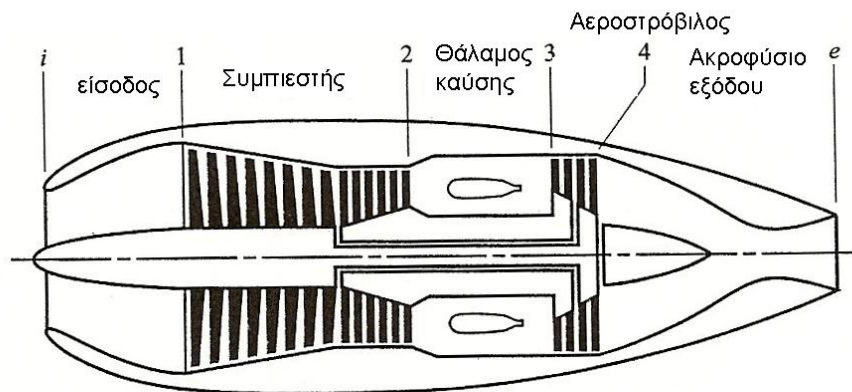
και όπως φαίνεται με την σύγκριση από τις σχέσεις που βρήκαμε χωρίς περιστρεφόμενο ρεύμα η επαγόμενη ταχύτητα αυξάνει και η απόδοση μειώνεται όταν λάβουμε υπ' όψη την περιστροφή του απορευμάτος.

Στην ανάλυση προπέλας που κάναμε μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η κατεύθυνση κίνησης του αεροσκάφους και ο άξονας της προπέλας συμπίπτουν. Στην περίπτωση αυτή και το διάνυσμα ώσης και η ροπή είναι στην κατεύθυνση του άξονα της προπέλας. Στην περίπτωση όμως που ο άξονας της προπέλας δεν είναι ευθυγραμμισμένος με την κατεύθυνση κίνησης αναπτύσσονται επιπρόσθετα φορτία. Η γωνία που σχηματίζει ο άξονας της προπέλας με την κατεύθυνση κίνησης είναι η γωνία πρόσπτωσης προπέλας που μεταβάλλεται με την γωνία πρόσπτωση του αεροσκάφους και είναι ασφαλώς μεταβλητή κατά την διάρκεια της πτήσης.

Όταν η γωνία πρόσπτωσης,  $\alpha_p$ , της προπέλας είναι θετική τότε υπάρχει μια συνιστώσα της ταχύτητας εισόδου στο επίπεδο της προπέλας  $V_\infty \cos \alpha_p$  που μεταβάλλει την σχετική γωνία κάθε πτερυγίου, αυξάνοντας την σχετική ταχύτητα των προς τα κάτω κινουμένων πτερυγίων και μειώνοντας την σχετική ταχύτητα των προς τα πάνω κινουμένων πτερυγίων. Η διαφορά της ώσης που παράγεται σε κάθε πλευρά έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας πλάγιας ροπής (yawing moment) ενώ η διαφορά της εφαπτομένης στην περιφέρεια δύναμης παράγει μια δύναμη στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας. Παρόμοια όταν υπάρχει πλάγια πρόσπτωση  $\beta$  (side slip) έχουμε ανάπτυξη ροπής περιστροφής (pitching moment) και πλάγιας δύναμης. Αυτές οι συνιστώσες της δύναμης και ροπής που δεν είναι ευθυγραμμισμένες με τον άξονα περιστροφής επηρεάζουν σημαντικά την πτητική κατάσταση trim και την ευστάθεια του αεροσκάφους.

## 1.5. Turbojet Μηχανές

Η απλουστευμένη θεωρία των μηχανών turbojet που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο περιορίζεται στα πλαίσια της μηχανικής πτήσης. Τα κύρια μέρη μιας μηχανής turbojet όπως δείχνει το Σχ. 1.5.1 είναι ο αγωγός εισόδου, ο συμπιεστής, ο θάλαμος καύσης, ο αεροστρόβιλος, και το ακροφύσιο εξόδου.



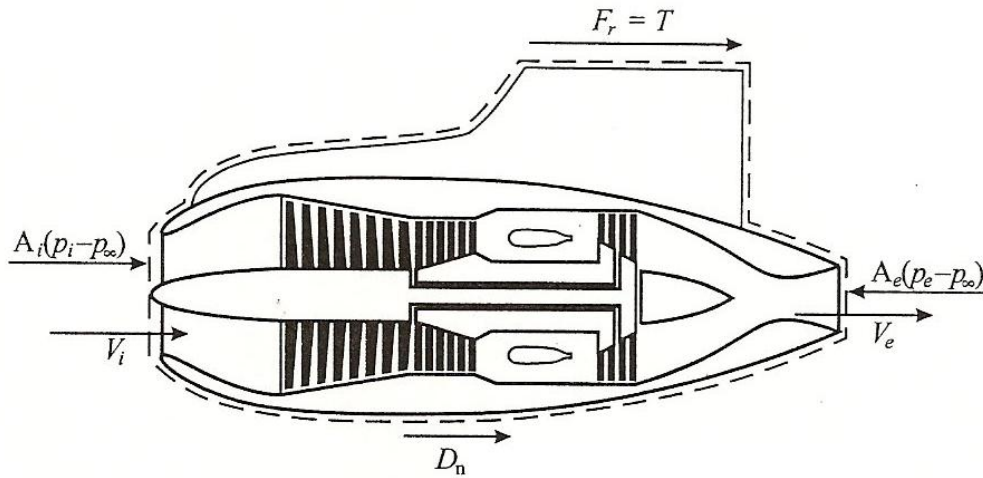
Σχήμα 1.5.1 Turbojet μηχανή και τα βασικά της μέρη.

Η δύναμη που αναπτύσσει μια μηχανή turbojet βρίσκεται με την εφαρμογή της εξίσωσης ορμής. Θεωρώντας τον όγκο ελέγχου του Σχ. 1.5.2 που περικλείει την μηχανή και το στήριγμά της, οι δυνάμεις που ασκούνται είναι η αντίδραση,  $F_r$ , η οπισθέλκουσα,  $D_n$ , που εξασκείται στο περίβλημα (nacelle), και η δύναμη που προέρχεται από την διαφορά πίεσης εισόδου-εξόδου  $(p_i - p_\infty)dA_i - (p_e - p_\infty)dA_e$ . Η δύναμη αντίδρασης  $F_r$  είναι ανάλογη της ώσης που αναπτύσσεται από την turbojet μηχανή. Το άθροισμα των δυνάμεων  $F_r + D_n$  εξισορροπείται από την μεταβολή της ορμής που είναι η ορμή εξόδου  $(\rho_e V_e dA_e)V_e$  μείον την ροή εισόδου  $(\rho_i V_i dA_i)V_i$  οπότε

$$F_r + D_n + A_i(p_i - p_\infty) - A_e(p_e - p_\infty) = \rho_e A_e V_e^2 - \rho_i A_i V_i^2$$

Αντικαθιστώντας  $\dot{m} = \rho AV$  και λύνοντας για την αντίδραση  $F_r$  έχουμε :

$$T \equiv F_r = \dot{m}_e V_e + A_e(p_e - p_\infty) - \dot{m}_i V_i - A_i(p_i - p_\infty) - D_n \quad (1.5.1)$$



Σχήμα 1.5.2 Δυνάμεις και ροπές στον όγκο ελέγχου μηχανής turbojet.

Η παραπάνω σχέση γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$T = [\dot{m}_e V_e - \dot{m}_i V_\infty + A_e (p_e - p_\infty)] - [\dot{m}_i (V_i - V_\infty) + A_i (p_i - p_\infty)] - D_n \quad (1.5.2)$$

Ο πρώτος όρος ονομάζεται μη εγκατεστημένη ώση (uninstalled thrust) και συμβολίζεται με  $F$

$$F = \dot{m}_e V_e - \dot{m}_i V_\infty + A_e (p_e - p_\infty) \quad (1.5.3)$$

Ο δεύτερος όρος της Εξ. (1.5.2) ονομάζεται προεισαγόμενη οπισθέλκουσα (pre-entry drag) η πρόσθετη οπισθέλκουσα (additive drag) και συμβολίζεται με  $D_{add}$ .

$$D_{add} = \dot{m}_i (V_i - V_\infty) + A_i (p_i - p_\infty) \quad (1.5.4)$$

με τους παραπάνω ορισμούς η ώση είναι

$$T = F - (D_n - D_{add}) \quad (1.5.5)$$

Η σχέση που δίνει την προστιθέμενη οπισθέλκουσα γράφεται και ως

$$D_{add} = A_i \left[ \rho_i (V_i^2 - V_i V_\infty) + p_i - p_\infty \right] \quad (1.5.6)$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει η σχέση τέλειου αερίου έχουμε

$$D_{add} = A_i \left[ \frac{p_i}{RT_i} (V_i^2 - V_i V_\infty) + p_i - p_\infty \right] \quad (1.5.7)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα του ήχου  $a = \sqrt{\gamma RT}$  στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$D_{add} = A_i p_\infty \left[ \gamma \frac{p_i}{p_\infty} \left( \frac{V_i^2}{\gamma RT_i} - \frac{V_i V_\infty}{\gamma R \sqrt{T_i T_\infty}} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_i} + \frac{1}{\gamma}} \right) - 1 \right] \quad (1.5.8)$$

$$D_{add} = A_i p_\infty \left[ \gamma \frac{p_i}{p_\infty} \left( M_i^2 - M_i M_\infty \sqrt{\frac{T_\infty}{T_i} + \frac{1}{\gamma}} \right) - 1 \right] \quad (1.5.9)$$

όπου  $T_i$  και  $T_\infty$  συμβολίζουν θερμοκρασίες εισόδου και αδιατάρακτου ρεύματος (freestream). Η ροή και το αδιατάρακτο ρεύμα μέχρι την είσοδο είναι ισεντροπική οπότε η πίεση και η θερμοκρασία πρόσπτωσης (stagnation pressure and temperature)  $p_o$  και  $T_o$  είναι σταθερές συνεπώς η Εξ. (1.5.9) γράφεται :

$$D_{add} = A_i p_\infty \left[ \gamma \frac{p_i / p_{0i}}{p_\infty / p_{0\infty}} \left( M_i^2 - M_i M_\infty \sqrt{\frac{T_\infty / T_{0\infty}}{T_i / T_{0i}} + \frac{1}{\gamma}} \right) - 1 \right] \quad (1.5.10)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right)^{-\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} \quad \text{και} \quad \frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

από την θεωρία συμπιεστής ροής φαίνεται ότι η πρόσθετη οπισθέλκουσα ελαχιστοποιείται όταν ο αριθμός Mach εισόδου  $M_i$  είναι ο ίδιος με τον αριθμό Mach της πτήσης  $M_\infty$ . Οι μηχανές turbojet σχεδιάζονται έτσι ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη αυτή για τον cruise Mach number.

## 1.6 Ανάλυση κύκλου μηχανής turbojet

Αρχικά θα εξετάσουμε την σταθερή λειτουργία της μηχανής turbojet που αναπαρίσταται στο Σχ. 1.5.1. Για την θερμοδυναμική ανάλυση υποθέτουμε ότι όλες οι διεργασίες είναι αντιστρέψιμες, ότι η καύση είναι αδιαβατική, και ότι η αύξηση της θερμοκρασίας του αέρα γίνεται υπό σταθερή πίεση αποκοπής (stagnation pressure). Επίσης, υποτίθεται ότι η ροή δια μέσω του στροβιλοκινητήρα και του ακροφυσίου εξόδου είναι αντιστρεπτή, αδιαβατική εκτόνωση στην κατάσταση εξωτερικής πίεσης.

Χρησιμοποιώντας σχέσεις ισεντροπικής ροής από το αδιατάρακτο πεδίο στην είσοδο έχουμε :

$$\frac{T_{0\infty}}{T_\infty} = \left( \frac{p_{0\infty}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \quad (1.6.1)$$

$$\frac{T_{01}}{T_{0\infty}} = \left( \frac{p_{01}}{p_{0\infty}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.2)$$

για ισεντροπική ροή δια μέσου του συμπιεστή έχουμε

ισεντροπική διαδικασία (1) → (2)

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.3)$$

Για την διαδικασία καύσης που λαμβάνει χώρα υπό σταθερή πίεση αποκοπής και για σχετικά μικρό ρυθμό ροής καυσίμου συγκρινόμενο με την ροή του αέρα έχουμε:

διαδικασία (2) → (3)

$$\dot{m}_i = \dot{m}_e = \dot{m} \quad (1.6.4)$$

$$p_{03} = p_{02} \quad (1.6.5)$$

Για την ισεντροπική ροή δια μέσω του στροβίλου (3-4) και για ρυθμό έργου  $\dot{W}_{3-4}$  (που θεωρείται ότι μεταβιβάζεται απ' ευθείας στον συμπιεστή χωρίς απώλειες) έχουμε :

ισεντροπική διαδικασία (3) → (4)



$$\frac{T_{04}}{T_{03}} = \left( \frac{p_{04}}{p_{03}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.6)$$

$$\dot{W}_{1-2} + \dot{W}_{3-4} = 0 \quad (1.6.7)$$

Για ισεντροπική εκτόνωση από την έξοδο του στροβίλου στην εξωτερική ατμόσφαιρα δια μέσω του ακροφυσίου έχουμε :

ισεντροπική διαδικασία (4)  $\rightarrow$  (e)

$$\frac{T_{0e}}{T_{04}} = \left( \frac{p_{0e}}{p_{04}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.8)$$

$$\frac{T_{0e}}{T_e} = \left( \frac{p_{0e}}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \quad (1.6.9)$$

$$p_e = p_\infty \quad (1.6.10)$$

Με τις υπόθεσεις απουσίας θερμικών απωλειών κατά την μεταφορά θερμότητας από το εισερχόμενο ρεύμα στον καυστήρα είτε προσθήκης ή απώλειας έργου, και από την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος για τον θάλαμο εισόδου βρίσκουμε :

$$\dot{m} \left[ C_p (T_i - T_\infty) + \frac{1}{2} (V_1^2 - V_\infty^2) \right] = \dot{m} C_p (T_{01} - T_{0\infty}) = 0$$

Οι τιμές  $T_\infty, p_\infty$  και  $M_\infty$  είναι γνωστές και οι τιμές πίεσης και θερμοκρασίας αποκοπής υπολογίζονται εύκολα οπότε :

$$T_{01} = T_{0\infty} = T_\infty \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) \quad (1.6.11)$$

Παρόμοια για την αντιστρεπτή και ισεντροπική διαδικασία της συμπίεσης (1) – (2) έχουμε

$$p_{01} = p_{0\infty} = p_\infty \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.6.12)$$

$$T_{02} = T_{01} \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.13)$$

$$p_{02} = p_{01} \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad (1.6.14)$$

Με εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου στον θάλαμο καύσης, και υποθέτοντας ότι δεν παράγεται έργο κατά την καύση αλλά έχουμε μόνο έκλυση θερμότητας,  $\dot{Q}_{2-3}$ , βρίσκουμε :

1<sup>ος</sup> θερμοδυναμικός νόμος για την διαδικασία (2) → (3)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{2-3} &= \dot{m} \left[ C_p (T_3 - T_2) + \frac{1}{2} (V_3^2 - V_2^2) \right] = \\ &= \dot{m} C_p (T_{03} - T_{02}) \end{aligned}$$

όπου  $\dot{Q}_{2-3}$  είναι η θερμότητα που παράγεται από την καύση και θεωρείται γνωστή οπότε λύνοντας για την θερμοκρασία  $T_{03}$  βρίσκουμε

$$T_{03} = T_{02} + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{\dot{m} C_p} \quad (1.6.15)$$

$$p_{03} = p_{02} \quad (1.6.16)$$

Με διαδοχική εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου από την έξοδο του στροβίλου στην είσοδο του ακροφυσίου και από την είσοδο του ακροφυσίου στην έξοδο έχουμε :

1<sup>ος</sup> θερμοδυναμικός νόμος για την διαδικασία (3) → (4)

$$\dot{m} C_p (T_{04} - T_{03}) + \dot{W}_{1-2} + \dot{W}_{3-4} = \dot{Q}_{2-3}$$

1<sup>ος</sup> θερμοδυναμικός νόμος για την διαδικασία (4) → (e)

$$(4) \rightarrow (e) \quad \dot{m} C_p (T_{0e} - T_{04}) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.6.6) και (1.6.8) βρίσκουμε την θερμοκρασία και πίεση αποκοπής εξόδου από τις σχέσεις

$$T_{0e} = T_{04} = T_{01} + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{\dot{m} C_p} \quad (1.6.17)$$

$$p_{0e} = p_{04} = p_{03} \left( \frac{T_{04}}{T_{03}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.6.18)$$

Ο αριθμός Mach και η θερμοκρασία εξόδου βρίσκονται λύνοντας τις Εξ. (1.6.9) και (1.6.10)

$$M_e^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p_{0e}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.6.19)$$

$$T_e = T_{0e} \left( \frac{p_\infty}{p_{0e}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.20)$$

Επειδή όμως η turbojet μηχανή δεν έχει έργο άξονα η αποδοτικότητα της ορίζεται ως η καθαρή αύξηση της κινητικής ενέργειας του ρευστού ως προς τον ρυθμό εισαγωγής ενέργειας, η οποία ισούται με την έκλυση θερμότητας  $\dot{Q}_{2-3}$  διότι υποθέσαμε ότι δεν παράγεται έργο κατά την καύση, και ονομάζεται θερμική απόδοση (thermal efficiency).

$$\eta_T \equiv \frac{0,5\dot{m}(V_e^2 - V_\infty^2)}{\dot{Q}_{2-3}} \quad \text{συντελεστής θερμικής απόδοσης} \quad (1.6.21)$$

Η ισχύς πρόωσης είναι πιο το πιο σημαντικό μέγεθος για τα αεροσκάφη. Η ισχύς πρόωσης μη εγκαταστημένης turbojet μηχανής είναι η ώση επί την ταχύτητα. Η απόδοση της μη-εγκατεστημένης μηχανής (uninstalled propulsive efficiency) ορίζεται η ώση F ως προς την μεταβολή της κινητικής ενέργειας ρευστού.

$$\eta_p \equiv \frac{F V_\infty}{0,5\dot{m}(V_e^2 - V_\infty^2)} \quad \text{συντελεστής ισχύος πρόωσης} \quad (1.6.22)$$

Και η ολική απόδοση μη εγκατεστημένης turbojet μηχανής είναι ισχύς πρόωσης δια του ρυθμού εισαγωγής ενέργειας.

$$\eta_0 \equiv \frac{F V_\infty}{\dot{Q}_{2-3}} = \eta_T \eta_p \quad \text{συντελεστής ολικής απόδοσης} \quad (1.6.23)$$

ο ολικός ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας είναι

$$0.5 \dot{m} (V_e^2 - V_\infty^2) = 0.5 \dot{m} \gamma R T_\infty \left( M_e^2 \frac{T_e}{T_\infty} - M_\infty^2 \right) \quad (1.6.24)$$

Και από τις Εξ, (1.6.11) – (1.6.20) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 0.5 \dot{m} (V_e^2 - V_\infty^2) &= \dot{Q}_{2-3} \left( 1 - \frac{T_\infty}{T_{02}} \right) \\ &= \dot{Q}_{2-3} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1} \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

οπότε

$$\eta_T = 1 - \frac{T_\infty}{T_{02}} = 1 - \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1} \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6.25)$$

δηλαδή η θερμική απόδοση μια ιδανικής turbojet μηχανής εξαρτάται μόνο από τον αριθμό  $M_\infty$  και τον λόγο πιέσεων κατά μήκος του συμπιεστή. Για τον λόγο αυτό οι μηχανές turbojet δεν είναι αποδοτικές για χαμηλές ταχύτητες πτήσης.

Η ώση μη εγκατεστημένη turbojet μηχανής (Εξ. 1.6.4), (1.6.10) και (1.5.3) είναι

$$F = \dot{m} (V_e - V_\infty) = \dot{m} \sqrt{\gamma R T_\infty} \left( M_e \sqrt{\frac{T_e}{T_\infty}} - M_\infty \right) \quad (1.6.26)$$

Το μέγεθος της μηχανής turbojet είναι ανάλογος του όγκου ρευστού που περνάει. Ο λόγος ώσης ως προς το βάρος είναι σημαντική παράμετρος σχεδιασμού αεροσκαφών. Συνεπώς ο λόγος ώσης ανά μονάδα ροής μάζας αέρος, που καλείται και ειδική ώση, είναι απαραίτητο να ορισθεί για τις μηχανές turbojet. Ο λόγος αυτός είναι

$$\frac{F}{\dot{m}} = \sqrt{\gamma R T_\infty} \left\{ \left[ \frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left( \frac{p_{04}}{p_{03}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) \right\} \frac{T_{03}}{T_\infty} \right]^{1/2} - M_\infty \right\} \quad (1.6.27)$$

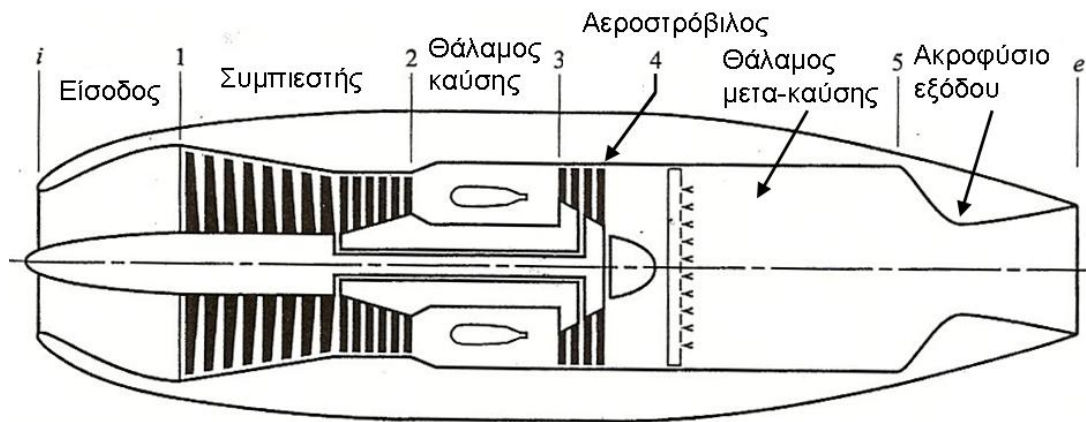
Η απόδοσης πρόωσης ιδανικής turbojet μηχανής εκφράζεται σε σχέση με τον αριθμό Mach ως

$$\eta_p = \frac{2M_\infty}{M_e \sqrt{\frac{T_e}{T_\infty} + M_\infty}} = \frac{2V_\infty}{V_e + V_\infty} \quad (1.6.28)$$

Η Εξ. (1.6.25) δείχνει ότι για δεδομένη θερμοκρασία περιβάλλοντος αύξηση της θερμικής απόδοσης ιδανικής turbojet μηχανής μπορεί να επιτευχθεί μόνο με αύξηση της θερμοκρασίας εξόδου από τον συμπιεστή. Από την Εξ. (1.6.27) βλέπουμε ότι η αύξηση της θερμοκρασίας εισόδου στον στρόβιλο αυξάνει την ειδική ώση για συγκεκριμένο λόγο πίεσης. Δηλαδή μεγάλη απόδοση επιτυγχάνεται με αύξηση της θερμοκρασίας όπου η μέγιστη θερμοκρασία είναι στην είσοδο του στροβίλου. Η απόδοση της turbojet μηχανής περιορίζεται από την θερμοκρασία που μπορούν να αντέξουν τα πτερύγια και αυτός καθορίζει το καύσιμο που μπορούμε να κάψουμε στον καυστήρα.

## 1.7 Η turbojet μηχανή με μετακαύση (afterburner)

Η ώση μιας turbojet μηχανής μπορεί να αυξηθεί, χωρίς να υπερβούμε την μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία, με την εγκατάσταση ενός μετακαυστήρα μετά από τον στρόβιλο όπως φαίνεται στο Σχ. 1.7.1. Η θερμοκρασία στον θάλαμο μετάκαυσης (afterburner) μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την θερμοκρασία μετά από τον κύριο θάλαμο καύσης επειδή τα θερμά καυσαέρια δεν προσπίπτουν στα πτερύγια του στροβίλου όπου η απαγωγή θερμότητας δεν είναι καλή.



Σχήμα 1.7.1 Turbojet μηχανή με μετά-καύση και τα βασικά της μέρη.

Η θερμοδυναμική ανάλυση του στροβιλοκινητήρα με θάλαμο μετάκαυσης είναι η ίδια με την ανάλυση που κάναμε μέχρι το σημείο (4), δηλαδή την έξοδο από τον στρόβιλο, για την απλή μηχανή turbojet όπου βρήκαμε

$$T_{04} = T_{01} + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{\dot{m} C_p} \quad (1.7.1)$$

$$p_{04} = p_{03} \left( \frac{T_{04}}{T_{03}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.7.2)$$

Θεωρώντας και πάλι ότι έχουμε μια ιδανική μηχανή (θερμοδυναμικά αντιστρέψιμη διαδικασία) και ότι η πίεση αποκοπής παραμένει σταθερή μετά τον στρόβιλο η θερμοκρασία αποκοπής εξόδου υπολογίζεται μετά από την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου ως ακολούθως

$$T_{0e} = T_{05} = T_{04} + \frac{\dot{Q}_{4-5}}{\dot{m} C_p} \quad (1.7.3)$$

$$p_{0e} = p_{05} = p_{04} \quad (1.7.4)$$

Ο αριθμός Mach εξόδου δεν επηρεάζεται από την μετάκαυση επειδή δεν επηρεάζει ούτε την στατική πίεση ούτε την πίεση αποκοπής.

Η ταχύτητα εξόδου και η ώση όμως αυξάνονται από την μετάκαυση διότι αυξάνεται η θερμοκρασία εξόδου και συνεπώς η ταχύτητα του ήχου  $a = \sqrt{\gamma RT}$ . Οι εξισώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου ισχύουν και για την turbojet μηχανή με μετάκαυση όταν αντικαταστήσουμε την θερμοκρασία εξόδου με αυτήν που υπολογίζεται από την Εξ. (1.7.3).

Η θερμική απόδοση είναι

$$\eta_T = \frac{\dot{m}(V_e^2 - V_\infty^2)/2}{\dot{Q}_{2-3} + \dot{Q}_{4-5}} = \frac{\dot{m} \gamma R T_\infty [M_e^2 (T_e/T_\infty) - M_\infty^2]/2}{\dot{Q}_{2-3} + \dot{Q}_{4-5}}$$

Όπου η ολική ενέργεια καύση βρίσκεται από τις θερμοκρασίες αποκοπής  $\dot{Q}_{2-3} + \dot{Q}_{4-5} = \dot{m} C_p (T_{05} - T_{01})$  οπότε η θερμική απόδοση είναι

$$\eta_T = \frac{\gamma R T_\infty [M_e^2 (T_e/T_\infty) - M_\infty^2]/2}{C_p (T_{05} - T_{01})} =$$

$$= \frac{\gamma - 2}{2} \left[ M_e^2 \frac{T_e}{T_\infty} - M_\infty^2 \right] \frac{T_\infty}{T_{05} - T_{01}} \quad (1.7.5)$$

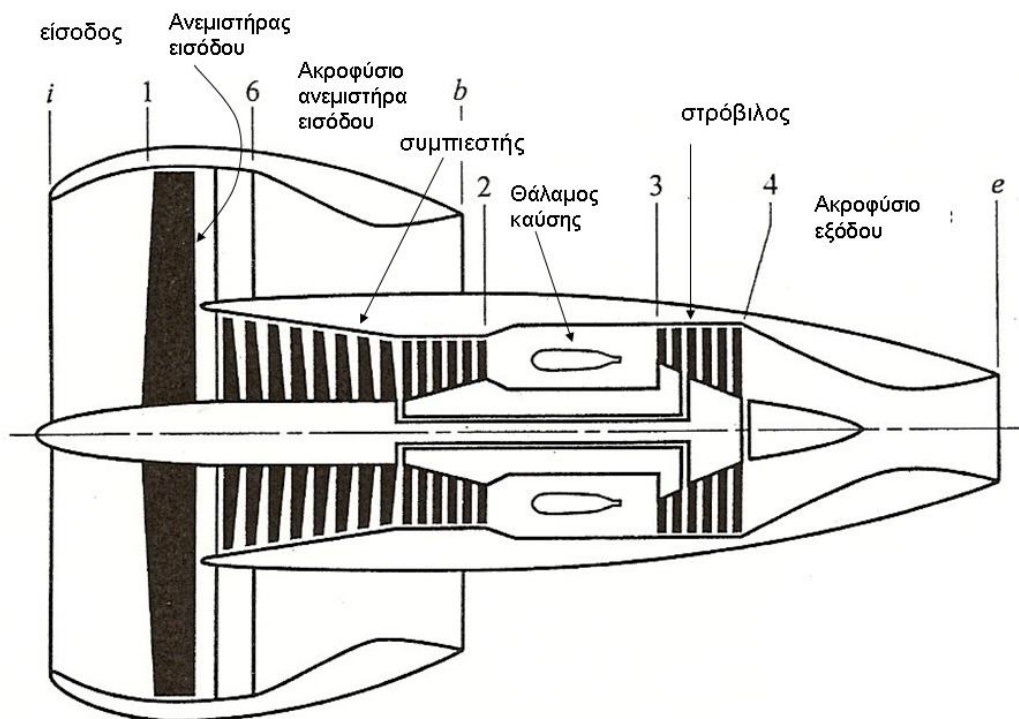
Παρόμοια η ώση μη εγκαταστημένης μηχανής με μετάκαυση υπολογίζεται από

$$\frac{F}{\dot{m}} = \sqrt{\gamma R T_\infty} \left( M_e \sqrt{\frac{T_e}{T_\infty}} - M_\infty \right) \quad (1.7.6)$$

## 1.8. Μηχανές Turbofan

Όπως δείξαμε στην εισαγωγή η ώση που αναπτύσσει ένα προωθητικό σύστημα μπορεί να αυξηθεί είτε με την αύξηση του ρυθμού ροής που περνάει μέσα από αυτό ή με την αύξηση της διαφοράς ταχυτήτων. Επί πλέον όμως, η μικρή μεταβολή ταχύτητας και μεγάλος ρυθμός ροής δίνουν μεγάλο συντελεστή απόδοσης, ενώ μεγάλη διαφορά ταχυτήτων με μικρό ρυθμό ροής έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερο λόγο ώσης ως προς το βάρος. Οι μηχανές turbofan αποτελούν μια συμβιβαστική λύση

μεταξύ προπελών (μεγάλη ροή, μικρή αύξηση ταχύτητας, μεγάλος συντελεστής απόδοσης) και turbojet (μικρή ροή, μεγάλη αύξηση ταχύτητας, μικρή απόδοση αλλά μεγάλος λόγος ώσης ως προς βάρος). Οι μηχανές turbofan έχουν διάμετρο και ρυθμό ροής σχετικά πιο μικρό από τις προπέλες αλλά μεγαλύτερο από turbojet μηχανές με την ίδια περίπου ισχύ. Οι μηχανές turbofan χρησιμοποιούνται συνήθως σε υποηχητικά αεροπλάνα που απαιτούν υψηλή απόδοση για πτήσεις μεγάλης διάρκειας. Οι μηχανές turbofan χρησιμοποιούνται ακόμη και σε μαχητικά αεροσκάφη όταν είναι σημαντικό να διατηρηθεί ο λόγος ώσης ως προς βάρος σε χαμηλά επίπεδα ενώ απαιτείται μεγάλη ταχύτητα και είναι αποδεκτό να έχουμε πιο μικρή απόδοση σε σύγκριση με προπέλες.



Σχήμα 1.8.1 Turbofan μηχανή και τα βασικά της μέρη.

Η μηχανή turbofan όπως δείχνεται στο Σχ. 1.8.1 έχει μεγαλύτερο στρόβιλο από μια μηχανή turbojet με την ίδια ισχύ. Τα προϊόντα της καύσης περνούν από μια μεγαλύτερη μηχανή, συνεπώς μπορεί να εξαχθεί μεγαλύτερη ενέργεια ενώ η ταχύτητα εξαγωγής είναι μικρότερη.

Η επί πλέον ισχύς που παράγεται από τον στρόβιλο χρησιμοποιείται για να περιστρέψει ένα ανεμιστήρα, που προσθέτει περισσότερη μάζα. Η αύξηση του ρυθμού ροής και η μείωση της ταχύτητας εξόδου μειώνει την ειδική ώση αλλά αυξάνει την απόδοση πρόωσης. Η ιδανική μηχανή turbofan έχει την ίδια θερμική απόδοση με



την μηχανή turbojet αλλά η μηχανή turbofan έχει βελτιωμένη απόδοση και μειωμένο λόγο ώσης ως προς βάρος.

Η ροή αέρα δια μέσου της μηχανής turbofan χαρακτηρίζεται από τον λόγο ανακυκλοφορίας (bypass) που είναι ο ρυθμός ροής που κατευθύνεται γύρω από την μηχανή  $\dot{m}_b$  (bypasses the core) ως προς τον ρυθμό ροής που περνάει από την μηχανή  $\dot{m}_c$  (directed through core)

λόγος ανακυκλοφορίας

$$\text{Bypass ratio} \quad R_b = \frac{\dot{m}_b}{\dot{m}_c} \quad (1.8.1)$$

Για την ανάλυση του θερμοδυναμικού κύκλου της μηχανής turbofan υποθέτουμε ισεντροπική ροή και πλήρη εκτόνωση στην ατμοσφαιρική πίεση. Με την υπόθεση της ισεντροπικής ροής έχουμε

$$T_{ob} = T_{06} = T_{01} \left( \frac{p_{06}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.8.2)$$

$$p_{ob} = p_{06} = p_{01} \frac{p_{06}}{p_{01}} \quad (1.8.3)$$

Εφαρμογή του πρώτου νόμου θερμοδυναμικής δίνει την θερμοκρασία ανακοπής (stagnation temperature) στην έξοδο του στροβίλου.

$$\dot{m}_c C_p (T_{04} - T_{01}) + \dot{m}_b C_p (T_{06} - T_{01}) = \dot{Q}_{2-3}$$

οπότε

$$T_{0e} = T_{04} = T_{01} - R_b (T_{06} - T_{01}) + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{\dot{m}_c C_p} \quad (1.8.4)$$

$$p_{0e} = p_{04} = p_{03} \left( \frac{T_{04}}{T_{03}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.8.5)$$

Ο αριθμός Mach και η θερμοκρασία στην έξοδο της μηχανής (e) και στην έξοδο του συμπιεστή (b) είναι

$$M_e^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p_{0e}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.8.6)$$

$$T_e = T_{oe} \left( \frac{p_\infty}{p_{0e}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.8.7)$$

$$M_b^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p_{0b}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.8.8)$$

$$T_b = T_{ob} \left( \frac{p_\infty}{p_{ob}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.8.9)$$

Ο ολικός ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας είναι

$$0.5 \left[ \dot{m}_c (V_e^2 - V_\infty^2) + \dot{m}_b (V_b^2 - V_\infty^2) \right] =$$

$$0.5 \left\{ \dot{m}_c \gamma R T_\infty \left[ M_e^2 \frac{T_e}{T_\infty} - M_\infty^2 + R_b \left( M_b^2 \frac{T_b}{T_\infty} - M_\infty^2 \right) \right] \right\}$$

Η μόνη πηγή ενέργειας είναι η καύση στον θάλαμο οπότε η θερμική απόδοση είναι

$$\eta_T = \frac{\dot{m}_c (V_e^2 - V_\infty^2) + \dot{m}_b (V_b^2 - V_\infty^2)}{2\dot{Q}_{2-3}} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{[M_e^2 T_e + R_b M_b^2 T_b - (1+R_b) M_\infty^2 T_\infty]}{[T_{04} + R_b T_{06} - (1+R_b) T_{01}]}$$

$$= 1 - \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1} \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.8.11)$$

που είναι ακριβώς η ίδια απόδοση που βρήκαμε για την μηχανή turbojet.

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η θερμική απόδοση της μηχανής turbofan δεν εξαρτάται από τον λόγο bypass  $R_b$  ή από την πίεση ανεμιστήρα.

Η ώση της μη-εγκαταστημένης turbofan μηχανής είναι :

$$F = \dot{m}_c (V_e - C_\infty) + \dot{m}_b (V_b - V_\infty) \quad (1.8.12)$$

$$= \dot{m}_c \sqrt{\gamma R T_\infty} \left[ M_e \sqrt{\frac{T_e}{T_\infty}} - M_\infty + R_b \left( M_b \sqrt{\frac{T_b}{T_\infty}} - M_\infty \right) \right]$$

και η ειδική ώση είναι

$$\frac{F}{\dot{m}_c + \dot{m}_b} = \frac{\sqrt{\gamma R T_\infty}}{1 + R_b} \left[ M_e \sqrt{\frac{T_e}{T_\infty}} - M_\infty + R_b \left( M_b \sqrt{\frac{T_b}{T_\infty}} - M_\infty \right) \right] \quad (1.8.13)$$

και η απόδοση πρόωσης βρίσκεται από

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{2FV_\infty}{\dot{m}_c (V_e^2 - V_\infty^2) + \dot{m}_b (V_b^2 - V_\infty^2)} = \\ &= \frac{2V_\infty [V_e - V_\infty + R_b (V_b - V_\infty)]}{V_e^2 - V_\infty^2 + R_b (V_b^2 - V_\infty^2)} \end{aligned} \quad (1.8.14)$$

Η θερμοκρασία εισόδου περιορίζεται από την θερμική αντοχή του υλικού, που σημαίνει ότι και η διαθέσιμη ενέργεια είναι περιορισμένη. Το ανώτατο όριο στην πίεση ανεμιστήρα που μπορεί να επιτευχθεί είναι εκείνο που κατά την εκτόνωση στον στρόβιλο καθιστά τον αριθμό Mach εξόδου μηδέν. Διότι όταν πληρούνται αυτή η συνθήκη τότε δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μεγαλύτερη ισχύς με την χρήση μεγαλύτερου στροβίλου ή ανεμιστήρα. Ο παραπάνω περιορισμός εκφράζεται από την Εξ. (1.8.6) ως  $M_e$  ή  $p_{o6} = p_\infty$ . Ενώ από τις Εξ. (1.9.2) – (1.9.5) βρίσκεται ότι το ανώτατο όριο για τον λόγο  $p_{o6} / p_{o1}$  είναι

$$\frac{p_{o6}}{p_{o1}} = \left[ \frac{1 + R_b - (p_{o2} / p_{o1})^{(\gamma-1)/\gamma}}{R_b} + \frac{T_{03}}{T_\infty} \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - (p_{o2} / p_{o1})^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.8.15)$$