4 Σχεδιασμός για στατική αντοχή

Όταν δυνάμεις επιδρούν επί ενός στοιχείου τότε αναπτύσσονται σ΄αυτό τάσεις που είναι μονοαξονικές, διαξονικές ή τριαξονικές. Η περίπτωση της μονοαξονικής καταπόνησης είναι φυσικά η πιο απλή. Αρκεί να προσδιοριστεί η τάση και να συγκριθεί με την επιτρεπόμενη τάση του υλικού. Στις περιπτώσεις όμως της διαξονικής ή ακόμα και της τριαξονικής εντατικής κατάστασης, ποια είναι εκείνη η ισοδύναμη μονοαξονική εντατική κατάσταση που φέρει το ίδιο εντατικό αποτέλεσμα με την πολυαξονική; Η εύρεση μιας τέτοιας ισοδύναμης τάσης διευκολύνει την επίλυση σύνθετων φορτίσεων. Στο ερώτημα αυτό απάντηση έρχονται να δώσουν οι διάφορες θεωρίες αστοχίας.

Θεωρίες αστοχίας

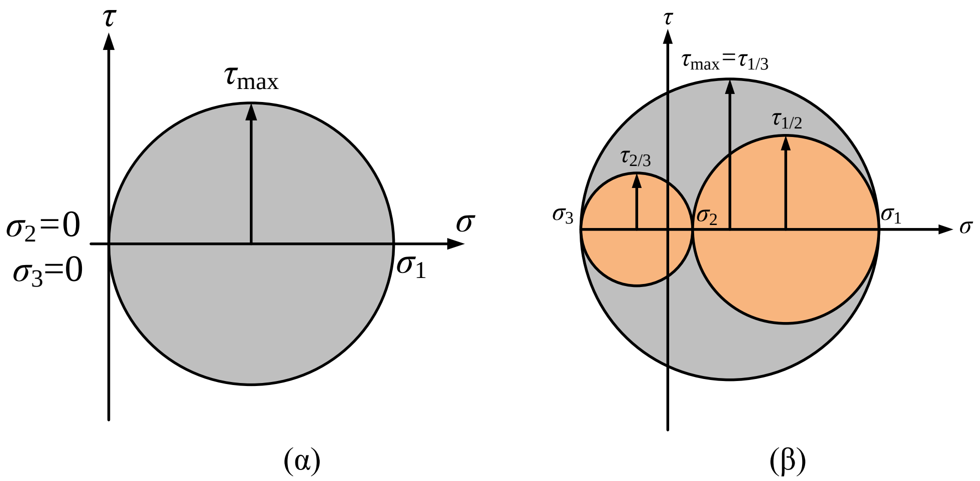
Οι θεωρίες αστοχίας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Αυτές που αφορούν όλκιμα υλικά
a. Θεωρία Μέγιστης Διατμητικής Τάσης (ΜΔΤ)
b. Θεωρία Έργου Παραμόρφωσης (ΘΕΠ)
2. Αυτές που αφορούν ψαθυρά υλικά
    a. Θεωρία Μέγιστης Ορθής Τάσης (ΜΟΤ)
    b. Θεωρία Coulomb-Mohr για ψαθυρά υλικά
    c. Τροποποιημένη θεωρία Coulomb-Mohr για ψαθυρά υλικά

4.1 Θεωρία Μέγιστης Διατμητικής Τάσης (ΜΔΤ)

Σύμφωνα με τη θεωρία της Μέγιστης Διατμητικής Τάσης (ΜΔΤ) αστοχία με την έννοια της διαρροής συμβαίνει όταν η μέγιστη διατμητική τάση για ένα συνδυασμό κύριων τάσεων ισούται ή ξεπερνάει την τιμή που λαμβάνεται για την διατμητική τάση κατά την πλαστική διαρροή στο πείραμα εφελκυσμού.

Στην μονοαξονική περίπτωση (δοκίμιο σε εφελκυσμό) υπάρχει μόνο η σ_1 (ενώ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) η οποία ισούται με S_y στην πλαστική διαρροή.



Σχήμα 4-1: Κύκλος Mohr για μονοαξονική και γενική εντατική κατάσταση

Επομένως από τον κύκλο του Mohr: $\tau_{\max} = \dfrac{1}{2}\sigma_1 = \dfrac{S_y}{2}$

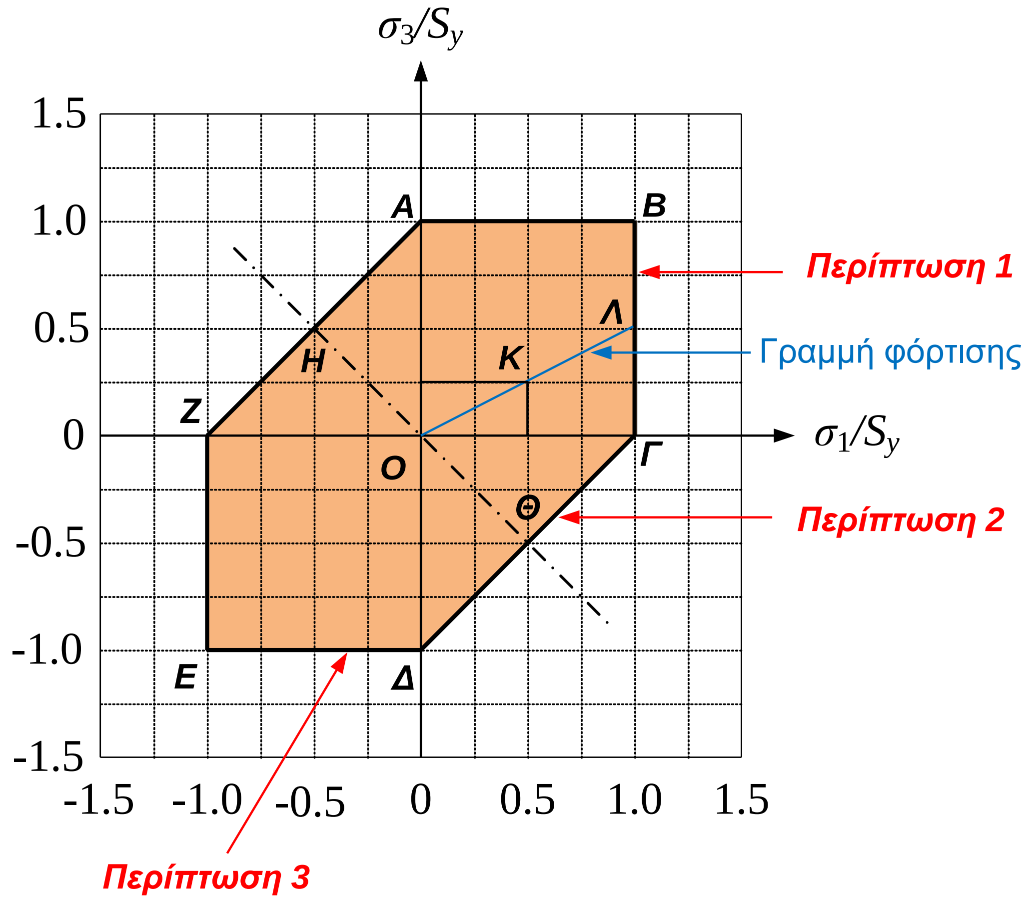
Σε μια γενική εντατική κατάσταση και αν $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ τότε η μέγιστη διατμητική τάση είναι:

$$\tau_{\max} = \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq S_{sy} = \frac{S_y}{2}$$

Πολύ συνηθισμένα είναι τα προβλήματα επίπεδης τάσης, όπου μια από τις τρεις κύριες τάσεις είναι μηδέν, έστω $\sigma_2 = 0$. Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις.

1. ***Περίπτωση 1η***: $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq 0$ (και οι δύο τάσεις θετικές). Ο δυσμενέστερος συνδυασμός είναι όταν $\sigma_3 = 0$. Αστοχία έχουμε εδώ όταν $\sigma_1 / S_y \geq 1$ (δεξιά από την ευθεία ΒΓ,). Βεβαίως αν η σ_3 είναι η μεγαλύτερη τότε αστοχία θα συμβεί πάνω από την ΑΒ.
2. ***Περίπτωση 2η***: $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3$ (μια θετική και μια αρνητική). Αστοχία συμβαίνει όταν $\sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y$ (δεξιά από την ευθεία ΓΔ).
3. ***Περίπτωση 3η***: $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$ (και οι δυο τάσεις αρνητικές). Εδώ έχουμε αστοχία αν $\sigma_3 \geq -S_y$ (κάτω από την ευθεία ΕΔ).

Να παρατηρήσουμε ότι η ευθεία *ΗΘ* αντιπροσωπεύει την περίπτωση της καθαρής διάτμησης. Τα σημεία *Η* και *Θ* αντιστοιχούν σε $S_y/2$, πάνω από την οποία έχουμε αστοχία λόγω καθαρής διάτμησης.

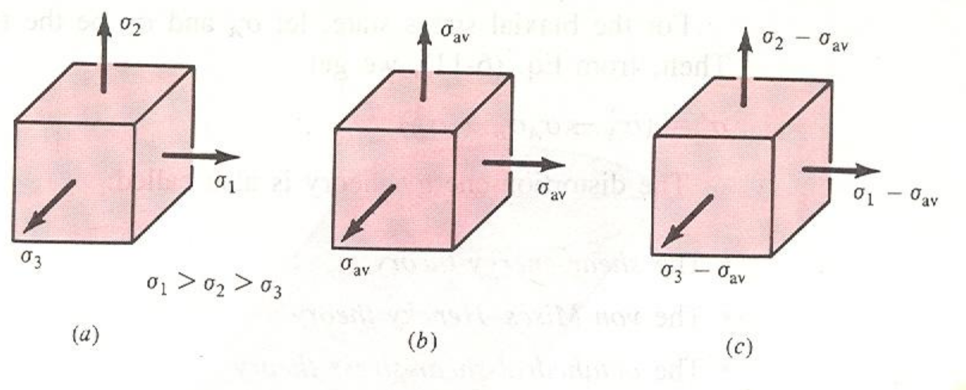


Έστω τώρα $K(\sigma_1/S_y, \sigma_3/S_y)$ το σημείο που αντιπροσωπεύει την εντατική κατάσταση του υπο εξέταση στοιχείου. Σε καθε περίπτωση ορίζεται ως συντελεστής ασφάλειας *N* ο αριθμός που εκφράζει την απόσταση του σημείου *K* από το σημείο αστοχίας *Λ* ($N = OΛ/OK$).

4.2 Θεωρία έργου παραμόρφωσης (ΘΕΠ)

Η θεωρία του έργου παραμόρφωσης προβλέπει ότι αστοχία σε διαρροή θα συμβεί, όταν η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου φθάσει ή ξεπεράσει την ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου που αντιστοιχεί σε τάση ίση με το όριο διαρροής, στο πείραμα του εφελκυσμού ή της θλίψης.

Η θεωρία του έργου παραμόρφωσης προέρχεται από την παρατήρηση ότι όλκιμα υλικά σε υδροστατική τάση εμφανίζουν αντοχή σε διαρροή πολύ μεγαλύτερη από τις τιμές που δίνονται για απλό εφελκυσμό. Έτσι θεωρήθηκε ως δεδομένο ότι η διαρροή υλικού δεν είναι απλά ένα φαινόμενο εφελκυσμού ή θλίψης, αλλά μάλλον συνδέεται κάπως με την γωνιακή παραμόρφωση του υπό τάση στοιχείου. Για να δείξουμε τη θεωρία ας θεωρήσουμε το Σχήμα 4-2(α), όπου φαίνεται ένα στοιχείο μοναδιαίου όγκου με τρείς κύριες τάσεις τέτοιες ώστε $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Η εντατική κατάσταση στο Σχήμα 4-2(b) είναι υδροστατικού τύπου, εφελκυστική λόγω των τάσεων $\sigma_{av} = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)/3$. Επομένως το στοιχείο (b) υφίσταται καθαρή μεταβολή όγκου, χωρίς γωνιακές παραμορφώσεις. Αν αφαιρέσουμε το (b) από το (α) θα λάβουμε το (c), το οποίο παρουσιάζει καθαρή γωνιακή παραμόρφωση, χωρίς αλλαγή στον όγκο του.



Σχήμα 4-2: (α) Μοναδιαίο στοιχείο με τρεις διαφορετικές κύριες τάσεις, (b) Το στοιχείο με ομοιόμορφη τάση (μέσον όρο των κυρίων τάσεων) υφίσταται μόνο μεταβολή όγκου, (γ) Στοιχείο με γωνική παραμόρφωση χωρίς μεταβολή όγκου

Η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης σε στοιχείο μοναδιαίου όγκου με τρεις κύριες τάσεις είναι:

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)$$

όπου

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right),\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_1\right),\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2\right)$$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε,

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

Άν θεωρήσουμε ότι το στοιχείο καταπονείται από

$$\sigma_{av} = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)/3$$

και σ_1-σ_{av}, σ_2-σ_{av}, σ_3-σ_{av}, αντίστοιχα τότε η ενέργεια λόγω μεταβολής όγκου είναι:

$$U_{av} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{av}^2 = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

Έτσι η ενέργεια που οφείλεται στη παραμόρφωση μόνο θα είναι:

$$U_d = U - U_{av} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right]$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης στο πείραμα του εφελκυσμού, όταν η τάση έχει φτάσει το όριο διαρροής S_y είναι:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των δύο τελευταίων εξισώσεων, και λαμβάνοντας υπ΄όψη ότι η ισοδύναμη τάση πρέπει να απέχει N φορές από το όριο διαρροής έχουμε:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \le \frac{S_y}{N}$$

(για τρισδιάστατη εντατική κατάσταση)

ή $$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}{2}} \le \frac{S_y}{N}$$

ή $$\sigma_{eq} = \sqrt{2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2} \leq \frac{S_y}{N}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \leq \frac{S_y}{N}$$

(για επίπεδη εντατική κατάσταση)

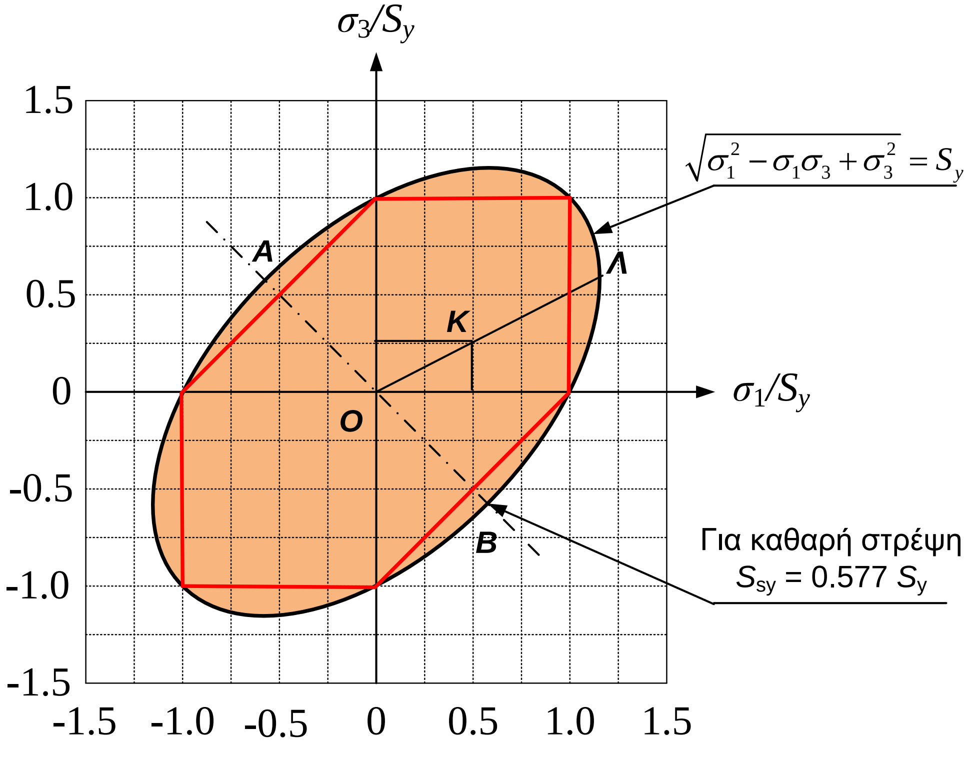
Χρησιμοποιώντας *xyz* συντεταγμένες η ισοδύναμη τάση μπορεί να γραφεί:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} \leq \frac{S_y}{N}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \frac{S_y}{N}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \frac{S_y}{N}$$

(για μονοαξονική εντατική κατάσταση)



Σχήμα 4-3: Θεωρία Έργου Παραμόρφωσης, σε επίπεδη εντατική κατάσταση (Η κόκκινη γραμμή παριστάνει την θεωρία Μέγιστης Διατμητικής Τάσης)

Στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης όπου $\sigma_x = \sigma_y = 0$, αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = S_y \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577S_y \Rightarrow$$

$$S_{sy} = 0.577S_y$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι σύμφωνα με την ΘΕΠ το όριο διαρροής σε διάτμηση είναι το 57.7% του ορίου διαρροής σε εφελκυσμό. Αυτό δείχνεται στο Σχήμα 4-3, στο σημείο Β, ενώ η αντίστοιχη τιμή της ΜΔΤ (πιο συντηρητική), είναι 50%.

4.3 Θεωρία Μέγιστης Ορθής Τάσης (ΜΟΤ)

Η θεωρία της μέγιστης ορθής τάσης προβλέπει αστοχία του υλικού όταν η μεγαλύτερη από τις κύριες τάσεις γίνει ίση με το όριο διαρροής S_y ή το όριο θραύσης S_u. Εφαρμόζεται κυρίως σε ψαθυρά υλικά οπότε σαν βάση λαμβάνεται συνήθως το όριο θραύσης S_u.

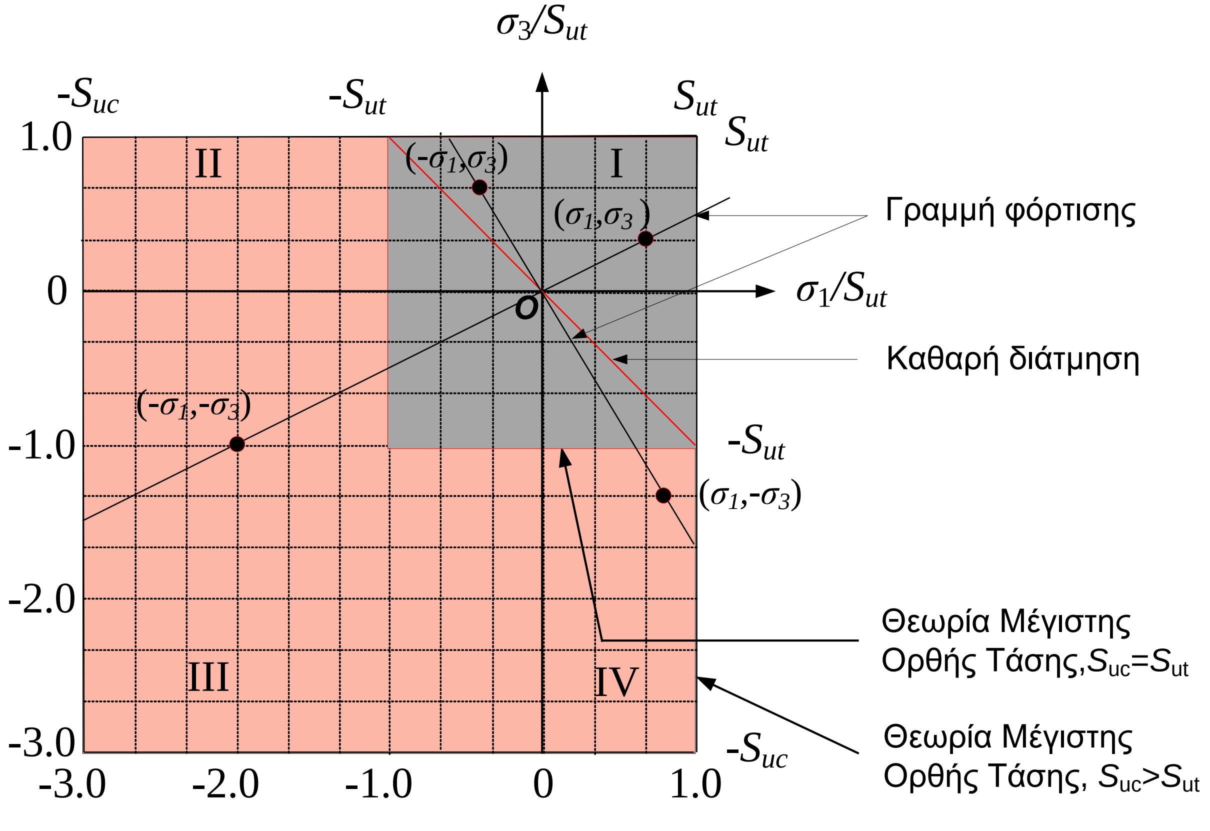
Αν η γραμμή φόρτισης βρίσκεται στο I ή III τεταρτημόριο, τότε αστοχία συμβαίνει όταν η μέγιστη θετική κύρια τάση υπερβεί το όριο αντοχής του υλικού σε εφελκυσμό, ή όταν η μέγιστη κατ΄απόλυτη τιμή αρνητική κύρια τάση υπερβεί την απόλυτη τιμή του ορίου αντοχής σε θλίψη:

$$\max(\sigma_1, \sigma_3) \geq S_{ut} \qquad \text{ή} \qquad \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \geq |S_{uc}|$$

Και επομένως αν N ο συντελεστής ασφαλείας, οι αντίστοιχες εξισώσεις σχεδιασμού είναι:

$$\max(\sigma_1, \sigma_3) \leq \frac{S_{ut}}{N} \qquad \text{ή} \qquad \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq \frac{|S_{uc}|}{N}$$

Αν η γραμμή φόρτισης βρίσκεται στο II ή στο IV τεταρτημόριο, όπου υπάρχει εφελκυσμός και θλίψη στις δύο κύριες διευθύνσεις τότε η θεωρία δεν είναι αξιόπιστη, διότι παρατηρείται αστοχία εντός της «ασφαλούς περιοχής». Για τον λόγο αυτό διατυπώθηκε η θεωρία Coulomb-Mohr.



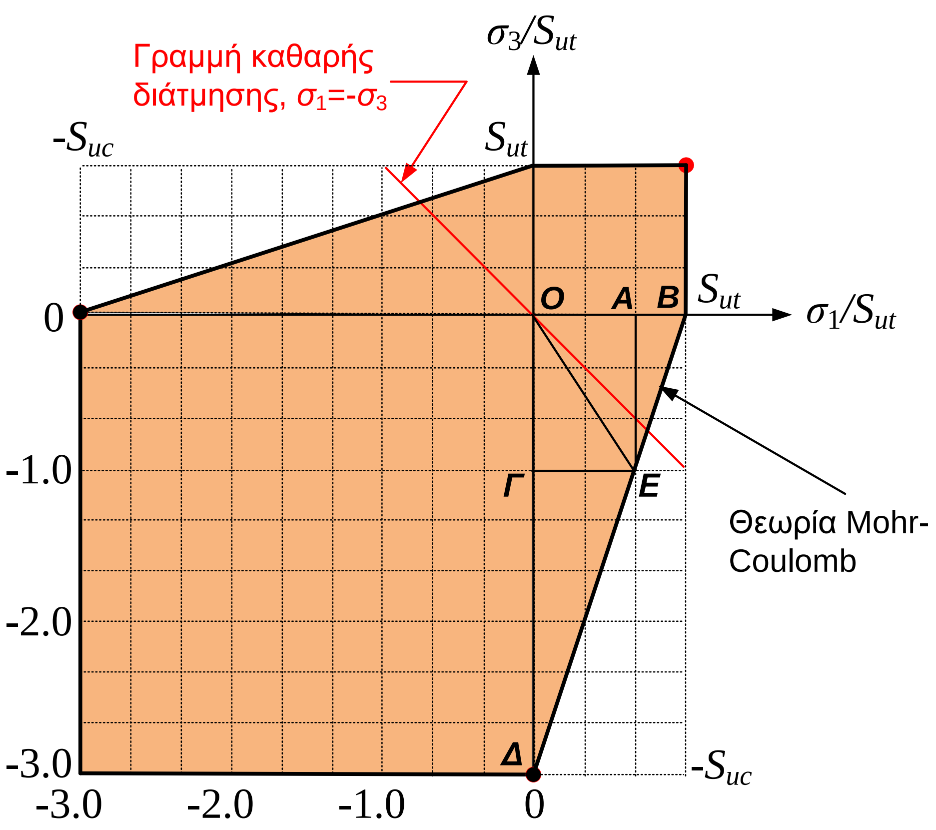
4.4 Θεωρία των Coulomb-Mohr

Στο Σχήμα 4-4 φαίνεται η περιοχή ασφαλούς φόρτισης σύμφωνα με τη θεωρία. Παρατηρούμε ότι οι διαφοροποιήσεις αφορούν τα τεταρτημόρια II και IV. Έστω ΟΓ η γραμμή φόρτισης. Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΟΒΔ έχουμε:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AE}{O\Delta} \Rightarrow \frac{S_{ut} - \sigma_1}{S_{ut}} = \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} + \frac{\sigma_3}{S_{uc}} = 1$$

Άρα αστοχία έχουμε όταν το άθροισμα των λόγων των κυρίων τάσεων προς τα αντίστοιχα όρια αστοχίας υπερβεί τη μονάδα.



Σχήμα 4-4: Θεωρία Coulomb-Mohr

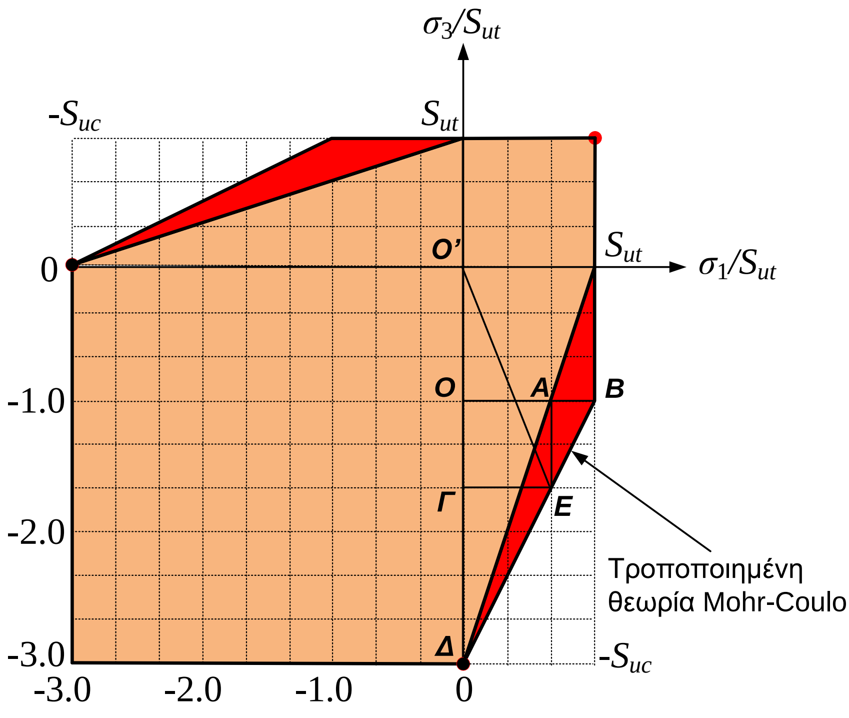
4.4 Τροποποιημένη θεωρία των Coulomb-Mohr

Η τροποποιημένη θεωρία των Mohr-Coulomb όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-5, προσθέτει στην ασφαλή περιοχή της θεωρίας των Mohr-Coulomb, δύο επί πλέον μικρές περιοχές (τα δύο κόκκινα τρίγωνα). Έστω *Ο'Ε* η γραμμή φόρτισης και $OA = \sigma_1$, και $O'\Gamma = \sigma_3$. Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων *ΑΒΕ* και *ΟΒΔ* έχουμε:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AE}{O\Delta} \Rightarrow \frac{S_{ut} - \sigma_1}{S_{ut}} = \frac{\sigma_3 - S_{ut}}{S_{uc} - S_{ut}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} + \frac{\sigma_3}{S_{uc} - S_{ut}} = \frac{S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} = \lambda$$

Έτσι βάσει της ανωτέρω σχέσης αστοχία έχουμε όταν το άθροισμα των λόγων των τάσεων προς τις αντίστοιχες τιμές των αντοχών ξεπεράσει το λόγο ανομοιομορφίας των αντοχών θλίψης και εφελκυσμού *λ*.



Σχήμα 4-5: Τροποποιημένη θεωρία Mohr