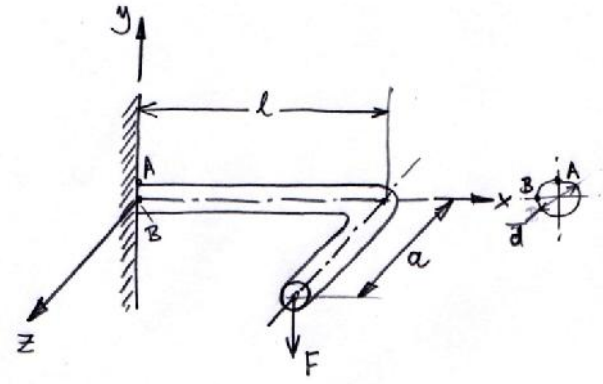
4.6 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.6.1 Θεωρίες αστοχίας όλκιμου υλικού

Η κατασκευή του Σχήματος 4-8 φορτίζεται με δύναμη $F = 4540\ N$. Το υλικό είναι χάλυβας με όριο διαρροής S_y = 330 MPa, η διατομή είναι κυκλική με διάμετρο d = 37.5 mm, και οι αποστάσεις είναι $\ell = 150 mm$, και a = 200 mm. Ζητείται να βρεθεί ο συντελεστής ασφαλείας σύμφωνα με την θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης και σύμφωνα με την θεωρία του έργου παραμόρφωσης ή Von Mises.



Σχήμα 4-8: Πακτωμένη γωνιακή δοκός

ΛΥΣΗ:

Οι αντιδράσεις στην πάκτωση είναι μια στρεπτική ροπή $M_x = Fa$, μια καμπτική ροπή $M_z = F\ell$, και μια διατμητική δύναμη. Άρα η διατομή καταπονείται σε στρέψη λόγω M_x, κάμψη λόγω M_z και διάτμηση λόγω F.

Η καμπτική τάση στην πάκτωση είναι,

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I}\frac{d}{2} = \frac{F\ell}{I}\frac{d}{2} = \frac{64F\ell}{\pi d^4}\times\frac{d}{2} = \frac{32F\ell}{\pi d^3} = \frac{32\times 4540\times 150}{\pi\times 37.5^3} = 131.5 MPa$$

Η στρεπτική τάση είναι,

$$\tau_{xy} = \frac{M_z r}{J_p} = \frac{32Fa}{\pi d^4}\times\frac{d}{2} = \frac{16Fa}{\pi d^3} = \frac{16\times 4540\times 200}{\pi\times 37.5^3} = 87.7 MPa$$

Η μέση διατμητική τάση είναι της τάξεως των

$$\bar{\tau} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4\times 4540}{\pi\times 37.5^2} = 4.1 MPa$$

και κατόπιν τούτου θα αγνοηθεί στον παρόντα υπολογισμό.

Οι κύριες τάσεις στο σημείο A της διατομής της πάκτωσης είναι,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{131.5 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{131.5 - 0}{2}\right)^2 + 87.7^2} = 175.35 MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{131.5 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{131.5 - 0}{2}\right)^2 + 87.7^2} = -43.85 MPa$$

Η μέγιστη διατμητική τάση είναι:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{131.5 - 0}{2}\right)^2 + 87.7^2} = 109.6MPa$$

Η ισοδύναμη τάση κατά την θεωρία του έργου παραμόρφωσης ή Von Mises είναι,

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{175.35^2 - 175.35\times(-43.85) + (-43.85)^2} = 200.9MPa$$

Ο συντελεστής ασφαλείας κατά την θεωρία του έργου παραμόρφωσης ή Von Mises είναι,

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{330}{200.9} = 1.64$$

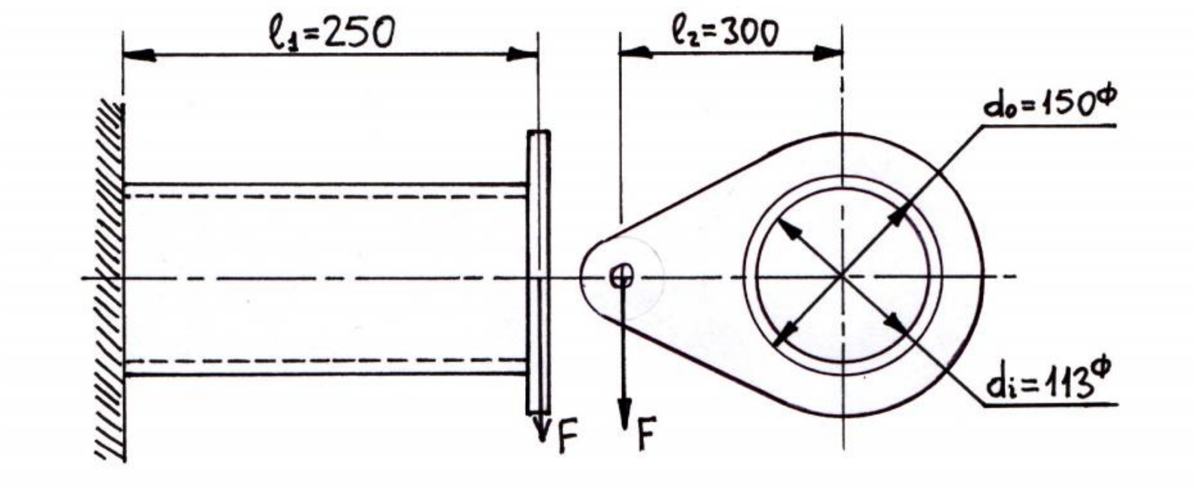
Ο συντελεστής ασφαλείας κατά την θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης είναι,

$$N = \frac{S_{sy}}{\tau_{max}} = \frac{S_y}{2\tau_{max}} = \frac{330}{2\times109.6} = 1.51$$

4.6.2 Θεωρίες αστοχίας ψαθυρού υλικού

Ο κύλινδρος του σχήματος είναι πακτωμένος αριστερά και φέρει το έκκεντρο φορτίο F = 10000 N στο δεξί του άκρο. Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στην πάκτωση είναι 3.

1. Να βρήτε τον συντελεστή ασφάλειας αν το υλικό του σωλήνα είναι χυτοσίδηρος με S_{ut} = 172 MPa και S_{uc} = 690 MPa, σύμφωνα α) με την θεωρία της μέγιστης ορθής τάσης, β) με την θεωρία Coulomb-Mohr και γ) με την τροποποιημένη θεωρία του Mohr.
2. Να βρήτε τον συντελεστή ασφάλειας αν το υλικό του σωλήνα είναι συνεκτικός χάλυβας με S_y = 345 MPa, σύμφωνα με την θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης και του έργου παραμόρφωσης (Von Mises).
3. Γιατί οι τρείς θεωρίες του ερωτήματος 1) δεν εφαρμόζονται στα συνεκτικά υλικά και γιατί οι θεωρίες της μέγιστης διατμητικής τάσης και του έργου παραμόρφωσης δεν είναι κατάλληλες για ψαθυρά υλικά;



Σχήμα 4-9: Έκκεντρη φόρτιση δοκού

ΛΥΣΗ:

Ο κύλινδρος στην πάκτωση καταπονείται σε κάμψη και στρέψη (αγνοούμε την διάτμηση). Η μέγιστη καμπτική τάση είναι:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y_{\max} = \frac{F\ell_1}{\frac{\pi}{64}\left(d_o^4 - d_i^4\right)} \frac{d_o}{2} = \frac{10000N \times 250mm}{\frac{\pi}{64}\left(150^4 - 113^4\right)mm^4} \frac{150mm}{2} = 11.13MPa$$

Η μέγιστη διατμητική λόγω στρέψης τάση,

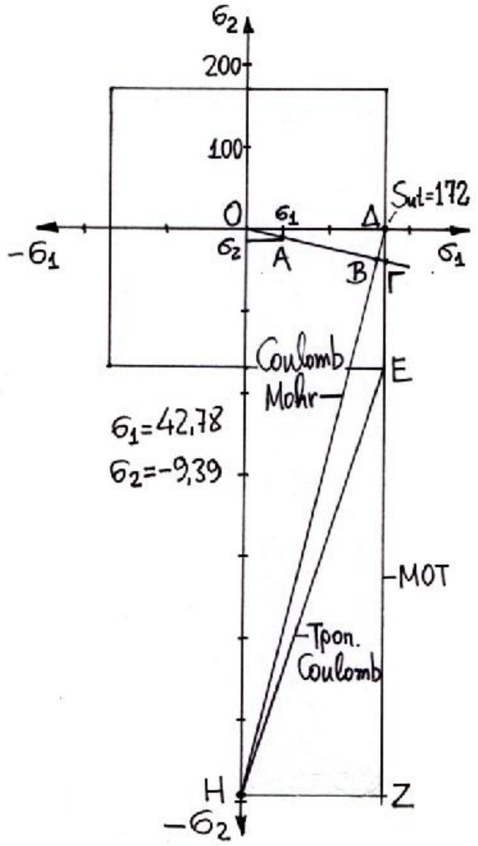
$$\tau_{xy} = \frac{T}{J} r = \frac{F\ell_2}{\frac{\pi}{32}\left(d_o^4 - d_i^4\right)} \frac{d_o}{2} = \frac{10000N \times 300mm}{\frac{\pi}{32}\left(150^4 - 113^4\right)mm^4} \frac{150mm}{2} = 6.68MPa$$

Οι κύριες τάσεις είναι:

$$\sigma'_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{11.13 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11.13 - 0}{2}\right)^2 + 6.68^2} = \begin{cases} +14.26 \\ -3.13 \end{cases}$$

Λόγω της συγκέντρωσης τάσεων οι κύριες τάσεις στη πάκτωση είναι



Σχήμα 4-10: Εφαρμογή των θεωριών αστοχίας

$$\pm_1 = k_t \pm_1' = 3 \times 14.26 = 42.78 MPa$$
$$\pm_3 = k_t \pm_3' = -3 \times 3.13 = -9.39 MPa$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα των κύριων ορθών τάσεων. Το σημείο A είναι αυτό που αντιστοιχεί στην εντατική μας κατάσταση. Δηλαδή $OA' = \pm_1$ και $OA'' = |\pm_3|$. Φέρουμε την OA και προεκτείνουμε μέχρις ότου τμήσει τις ΔΗ στο Β και ΔΖ στο Γ. Η γραμμή ΔΖΗ αντιστοιχεί στη θεωρία της MOT, η γραμμή ΔΗ αντιστοιχεί στη θεωρία των Coulomb-Mohr, ενώ η γραμμή ΔΕΗ αντιστοιχεί στην τροποποιημένη θεωρία του Coulomb. Οι συντελεστές ασφάλειας σύμφωνα με τις τρεις ζητούμενες θεωρίες είναι,

$$N_{MOT} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{S_{ut}}{\pm_1} = \frac{172}{42.78} = 4.0$$

Γραφικά: Μετρούμε στο διάγραμμα και βρίσκουμε ότι περίπου *OB'* = 162 οπότε:

$$N_{Co-Mo} = \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB'}{\pm_1} = \frac{162}{42.78} = 3.78$$

Αναλυτικά:

$$\frac{1}{N_{Co-Mo}} = \frac{\pm_1}{S_{ut}} + \frac{\pm_3}{S_{uc}} = \frac{42.78}{172} + \frac{9.39}{690} = 0.2623 \Rightarrow N_{Co-Mo} = 3.81$$

Παρατηρώ μια μικρή απόκλιση ανάμεσα στη γραφική και την αναλυτική λύση που οφείλεται στο σφάλμα ανάγνωσης του διαγράμματος. Και τέλος,

$$N_{T^\circ - Co} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{172}{42.78} = 4.0$$

2. Αν έχουμε συνεκτικό χάλυβα τότε σύμφωνα με την θεωρία του Von Mises (ΘΕΠ):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{14.26^2 - 14.26 \times (-3.13) + 3.13^2} = 16.05 MPa$$

και ο συντελεστής ασφάλειας είναι:

$$N_{\text{ΘΕΠ}} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} = \frac{345}{16.05} = 21.5$$

ενώ σύμφωνα με την θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης είναι

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{11.13}{2}\right)^2 + 6.68^2} = 8.69 MPa$$

και ο συντελεστής ασφάλειας είναι:

$$N_{M\Delta\text{Τ}} = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{345/2}{8.69} = 19.8$$

Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων δεν λαμβάνεται υπ΄όψη σε όλκιμα ή συνεκτικά υλικά.

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και με τις σχέσεις που αντιστοιχούν στη ΘΕΠ και στη θεωρία της ΜΔΤ:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{11.13^2 + 3 \times 6.68^2} = 16.05 MPa$$

$$N_{\text{ΘΕΠ}} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} = \frac{345}{16.05} = 21.5$$

Και,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sqrt{11.13^2 + 4 \times 6.68^2} = 17.38 MPa$$

$$N_{M\Delta\text{Τ}} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} = \frac{345}{17.38} = 19.8$$