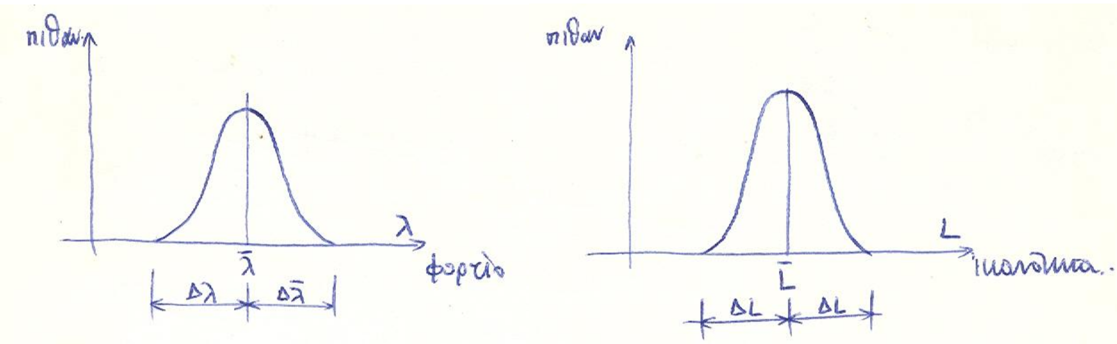
Στατιστικός συντελεστής ασφάλειας

Έστω ότι η τάση λ ενός στοιχείου εκφράζεται στατιστικά από τη μέση τιμή $\bar{\lambda}$ και από την διακύμανση $\Delta\lambda$ του φορτίου.
Έστω επίσης ότι η αντοχή του υλικού του εν λόγω στοιχείου επίσης εκφράζεται από την μέση τιμή $\bar{L}$ και από την διακύμανση ΔL της αντοχής.

ΦΟΡΤΙΟ ΑΝΤΟΧΗ

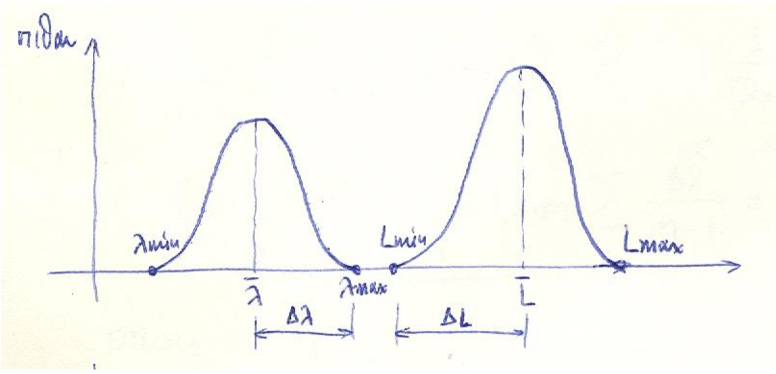


$\lambda = \bar{\lambda} \pm \Delta\lambda$ $L = \bar{L} \pm \Delta L$

Σχήμα 6-1: Κανονική κατανομή φορτίου και αντοχής υλικού

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των δύο κατανομών τότε μπορούμε να ορίσουμε σαν μέσο συντελεστή ασφαλείας το λόγο της μέσης τιμής της αντοχής προς την μέση τιμή του φορτίου:

$$\bar{N} = \frac{\bar{L}}{\bar{\lambda}}$$

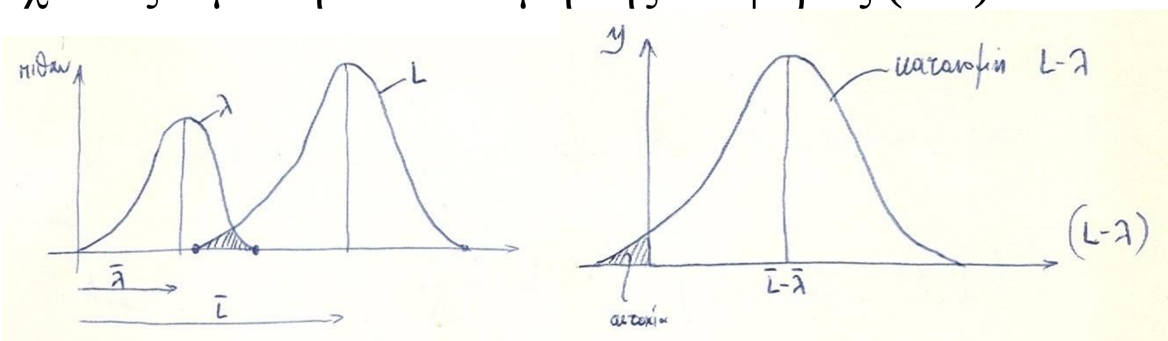


Σχήμα 6-2: Μη επικαλυπτόμενες κατανομές φορτίου και αντοχής

Είναι προφανές ότι:

$$N_{\max} = \frac{L_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad \text{και} \quad N_{\min} = \frac{L_{\min}}{\lambda_{\max}}$$

Αν τώρα υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των κανονικών κατανομών τότε σχεδιάζουμε την κατανομή της διαφοράς (L-λ).



Σχήμα 6-3: Επικαλυπτόμενες κατανομές φορτίου και αντοχής

Παρατηρούμε ότι αστοχία έχουμε όταν (L-λ) < 0. Η επιφάνεια της διαγραμμισμένης περιοχής μας δίνει την πιθανότητα αστοχίας.

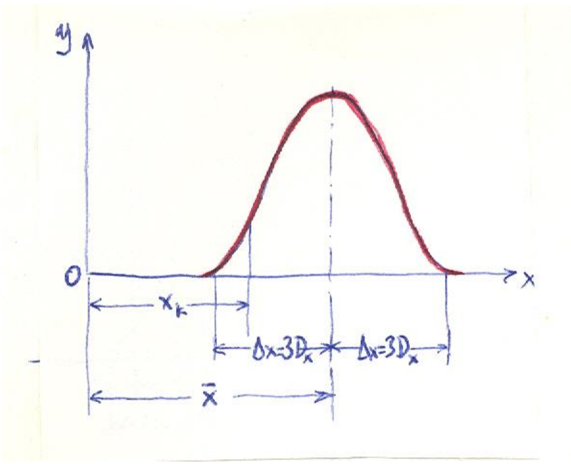
Κανονική κατανομή Gauss

Έστω τώρα ότι η κατανομή L-λ ακολουθεί την γνωστή κανονική κατανομή Gauss η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση,

$$y_x = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/\left(2D_x^2\right)}$$

όπου η μέση τιμή και η κανονική απόκλιση αντίστοιχα είναι,

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}, \qquad D_x^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{n-1}$$



Σχήμα 6-4: Κανονική κατανομή Gauss

Έστω η κανονική τιμή της στατιστικής μεταβλητής,

$$t = \frac{x - \overline{x}}{D_x}$$

για την οποία ισχύει:

$$\overline{t} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k - \overline{x}}{nD_x} = \frac{1}{D_x}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{x}}{n}\right) = 0$$

$$D_t^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(t_k - \overline{t}\right)^2}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k{}^2}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k - \overline{x}\right)^2}{D_x^2\left(n-1\right)} = 1$$

οπότε

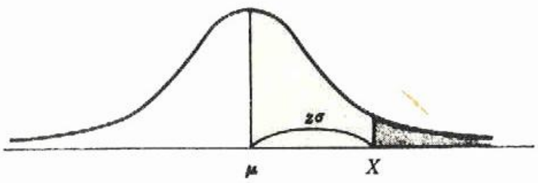
$$y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται η μεταβλητή t μεταξύ -∞ και $-t$ είναι,

$$A_{-\infty}^{-t} = \int_{-\infty}^{-t} y_t dt = \int_{-\infty}^{-t}\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ισχύει $A_{-\infty}^{-t} = A_t^{\infty}$. Η τιμή του ολοκληρώματος δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας πιθανοτήτων κανονικής κατανομής Gauss



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1579
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

Στον ανωτέρω πίνακα για τη τιμή πχ. 2.56 της κανονικής μεταβλητής, πάμε στη γραμμή που αντιστοιχεί στο 2.5 και στη στήλη που αντιστοιχεί στο 0.06 και βρίσκουμε την πιθανότητα (δηλαδή το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας ίσο με A = 0.0052 ή 0.52%.Προσεγγιστικά ισχύει η ακόλουθη σχέση που συνδέει την πιθανότητα με την τιμή της κανονικής μεταβλητής,

$$t_f = \frac{1.29}{\left(A_{-\infty}^{-t_f}\right)^{0.128}}$$

Αστοχία μηχανολογικών συστημάτων

Έστω η τυπική απόκλιση της διαφοράς

$$D_{L-\lambda}^2 = D_L^2 + D_\lambda^2$$

της μέσης τιμής

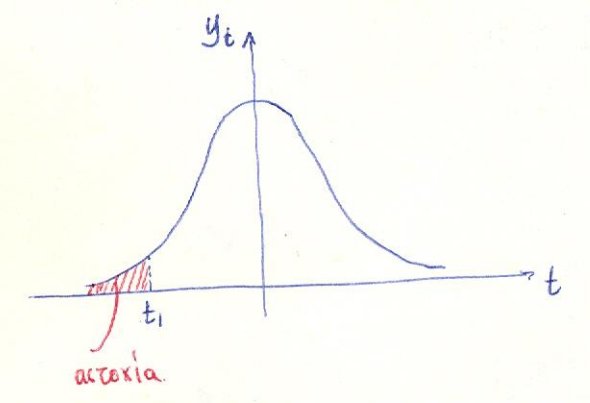
$$\overline{L-\lambda} = \bar{L} - \bar{\lambda}$$

και η κανονική τιμή της στατιστικής μεταβλητής

$$t = \frac{(L-\lambda)-(\bar{L}-\bar{\lambda})}{D_{L-\lambda}}$$

Αστοχία υπάρχει όταν $L-\lambda = 0$ ή $t_1 = \dfrac{0-(\bar{L}-\bar{\lambda})}{D_{L-\lambda}} = -\dfrac{\bar{L}-\bar{\lambda}}{D_{L-\lambda}}$

και η πιθανότητα αστοχίας είναι $A_{-\infty}^{t_1}$



Αν ορίσουμε με N τον στατιστικό συντελεστή ασφάλειας, και με $\bar{N} = \bar{L}/\bar{\lambda}$ τον μέσο συντελεστή ασφάλειας έχουμε,

$$t_1 = \frac{\bar{L}-N\bar{\lambda}}{D_{L-\lambda}} = \frac{\bar{L}-N\bar{\lambda}}{\sqrt{D_\lambda^2 + D_L^2}} = \frac{3(\bar{L}-N\bar{\lambda})}{\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta L^2}} = \frac{3(\bar{N}-N)}{\sqrt{(\Delta\lambda/\bar{\lambda})^2 + (\Delta L/\bar{L})^2}}$$

και επιλύοντας ως προς N έχουμε για τον στατιστικό συντελεστή ασφάλειας,

$$N = \bar{N} - \frac{t_1}{3}\sqrt{(\Delta\lambda/\bar{\lambda})^2 + \bar{N}^2(\Delta L/\bar{L})^2}$$

Προσεγγιστικά μπορούμε να πάρουμε την εξής σχέση για τον στατιστικό συντελεστή ασφάλειας αν απαλείψουμε την μεταβλητή t_1.

$$t_1 = \frac{\bar{L} - N\bar{\lambda}}{D_{L-\lambda}} = \frac{1.29}{\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}} \Rightarrow$$

$$\bar{L} - N\bar{\lambda} = \frac{1.29 D_{L-\lambda}}{\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}} \Rightarrow$$

$$N\bar{\lambda} = \bar{L} - \frac{1.29 D_{L-\lambda}}{\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}} \Rightarrow$$

$$N = \bar{N} - \frac{1.29\sqrt{D_\lambda^2 + D_L^2}}{\bar{\lambda}\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}}$$

$\textit{και επειδη } D_\lambda = \Delta\lambda / 3 \textit{ και } D_L = \Delta L / 3$

$$N = \bar{N} - \frac{0.43\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta L^2}}{\bar{\lambda}\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}} \Rightarrow$$

$$N = \bar{N} - \frac{0.43\sqrt{\left(\Delta\lambda / \bar{\lambda}\right)^2 + \left(\Delta L / \bar{L}\right)^2 \ \bar{N}^2}}{\left(A_{-\infty}^{-t_1}\right)^{0.128}}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Στατιστική επεξεργασία δείγματος

Σε μια παρτίδα από 250 ράβδους η αντοχή εφελκυσμού S_y βρέθηκε 3200 kp/cm^2 με μια κανονική απόκλιση 300 kp/cm^2. Αν υποθέσουμε ότι η αντοχή ακολουθεί την κανονική κατανομή,

(α) Πόσες ράβδοι έχουν αντοχή μικρότερη από 2900 kp/cm^2;

(β) Πόσες ράβδοι έχουν αντοχή μεταξύ 2900 και 4000 kp/cm^2;

ΛΥΣΗ:

(α) $\bar{x} = \bar{L} = 3200,\ D_x = 300$

Ζητείται ο αριθμός των κομματιών με αντοχή 2899 ή μικρότερη.

$$t_1 = \frac{x - \bar{x}}{D_x} = \frac{2899 - 3200}{300} = -1$$

Η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη κανονικής κατανομής αριστερά από t_1 = -1, είναι λόγω συμμετρίας όση και η επιφάνεια δεξιά από t_1 = 1. Από τον Πίνακα πιθανοτήτων κανονικής κατανομής Gauss, λαμβάνουμε,

$$A = 0.1587$$

Άρα 15.87% του δείγματος έχει αντοχή μικρότερη από 2900 kp/cm^2, ή

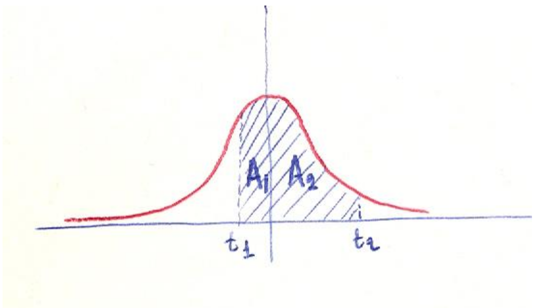
N = 250 x 0.1587 = 39.675 =40 ράβδοι.

(β) Όμοια

$$t_2 = \frac{x-\overline{x}}{D_x} = \frac{3999-3200}{300} = 2.66 \qquad \text{και}$$

$$t_1 = \frac{x-\overline{x}}{D_x} = \frac{2901-3200}{300} = -0.99$$

Αναζητούμε την επιφάνεια κάτω από την κανονική καμπύλη μεταξύ t_1 και t_2.



$$A_{t_1} = 0.1611 \Rightarrow A_1 = 0.5 - A_{t_1} = 0.3389$$

$$A_{t_2} = 0.0039 \Rightarrow A_2 = 0.5 - A_{t_2} = 0.4961$$

$$A = A_1 + A_2 = 0.3389 + 0.4961 = 0.8350$$

Άρα μεταξύ 2900 και 4000 βρίκεται η αντοχή, N = 250 x 0.8350 = 208.75 = 208 ράβδων.