

## μ - (Euler Johnson)

$$M_z = -Py(z)$$

$$EIy''(z) = -Py(z)$$

$$y''(z) + \frac{P}{EI}y(z) = 0 \quad \text{και αν} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y''(z) + k^2y(z) = 0$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης έχει την μορφή:

$$y(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$$

Αν οι οριακές συνθήκες είναι άρθρωση - άρθρωση τότε για τις μετατοπίσεις θα ισχύει

$$y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y(\ell) = 0$$

Άρα

$$y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(\ell) = C_1 \sin k\ell + C_2 \cos k\ell = 0 \Rightarrow C_1 \sin k\ell = 0 \Rightarrow \sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = nf$$

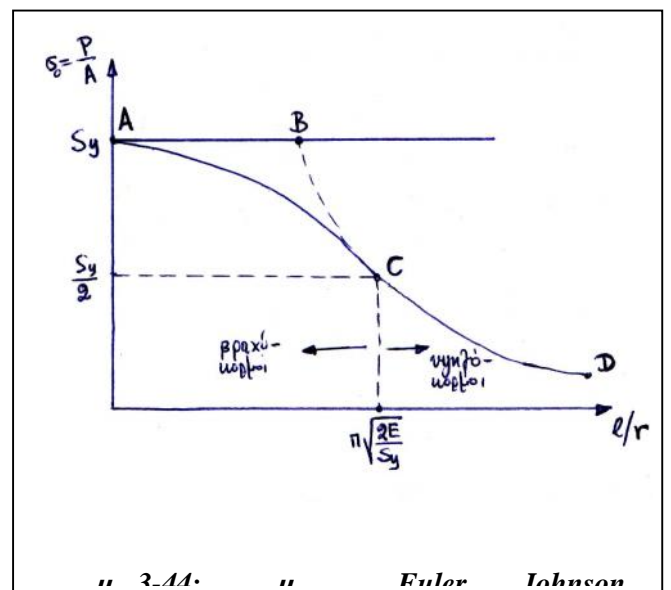
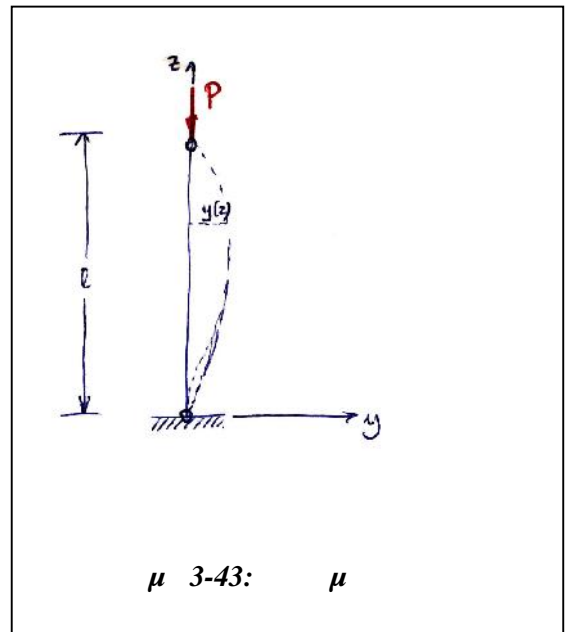
$$k\ell = nf \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = nf \Rightarrow P = \frac{n^2 f^2 EI}{\ell^2}$$

Για  $n = 1$  παίρνουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και αν η ακτίνα αδράνειας της διατομής ισούται με  $r_{Gu...} = \sqrt{I/A}$ , και ονομάσουμε το πηλίκο  $\ell/r_{Gu...}$ , βαθμό λυγηρότητας τότε,

$$P = \frac{f^2 EI}{\ell^2} \Rightarrow P = \frac{f^2 EAr^2}{\ell^2} \Rightarrow \dagger_{cr} = \frac{P}{A} = \frac{f^2 E}{(\ell/r)^2}$$

Εξίσωση Euler

Αν σχεδιάσουμε την τάση συναρτήσει του βαθμού λυγηρότητας τότε παίρνουμε την καμπύλη BCD. Το τμήμα της καμπύλης CD είναι ακριβές. Το τμήμα όμως CB δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα. Ο Johnson παρατήρησε ότι για περιοχές τάσεων από το μισό όριο διαρροής ( $S_y/2$ ) μέχρι το όριο διαρροής ( $S_y$ ) η σχέση του Euler δεν ισχύει. Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί σε μικρούς βαθμούς λυγηρότητας. Η σχέση λοιπόν που διατύπωσε περιγράφει μαθηματικά την καμπύλη CA ως εξής,



$$\dagger_{cr} = S_y \left[ 1 - \frac{S_y (\ell/r)^2}{4f^2 E} \right]$$

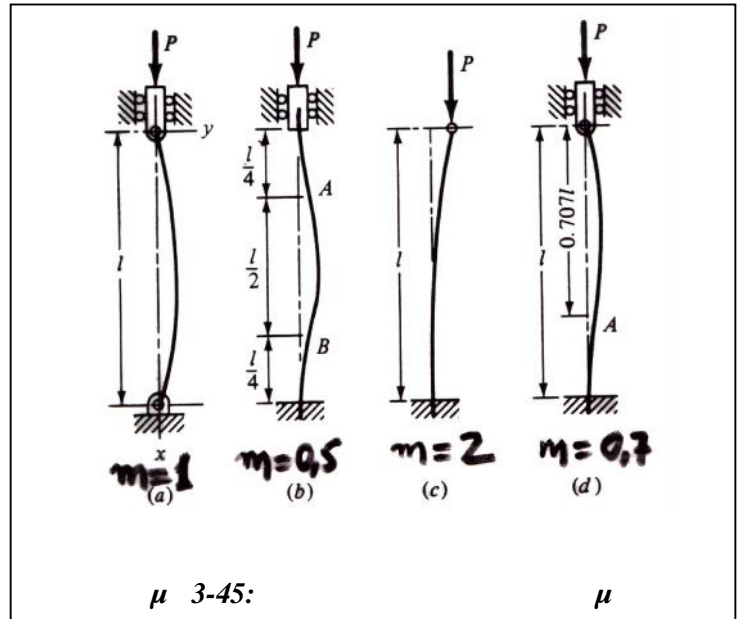
Εξίσωση Johnson

Αν θέσουμε και στις δύο εξισώσεις  $\sigma_{cr} = S_y / 2$  τότε βρίσκουμε το βαθμό λυγηρότητας που αντιστοιχεί στο σημείο C, δηλαδή  $\} _C = f \sqrt{\frac{2E}{S_y}}$ . Τιμές βαθμού λυγηρότητας  $\lambda$  μικρότερες από  $\lambda_C$  αντιστοιχούν σε βραχύκορμες ράβδους

και αντιμετωπίζονται με την θεωρία του Johnson, ενώ τιμές βαθμού λυγηρότητας  $\lambda$  μεγαλύτερες από  $\lambda_C$  αντιστοιχούν σε υψίκορμες ράβδους και αντιμετωπίζονται με την θεωρία του Euler.

$$\} = m \frac{\ell}{r}$$

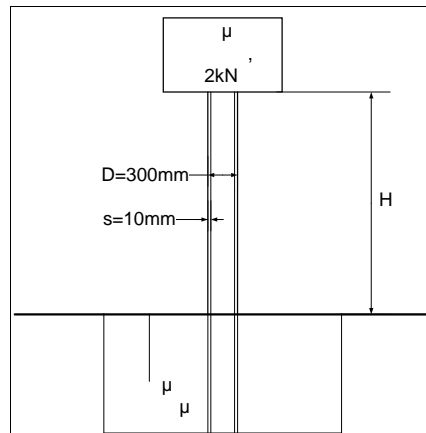
όπου  $m$  είναι ένας αριθμός που εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που επικρατούν στα άκρα της θλιβόμενης ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Επομένως η διαδικασία ελέγχου σε λυγισμό περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα.**

1. Προσδιορίζουμε το κρίσιμο βαθμό λυγηρότητας  $\} _C = f \sqrt{\frac{2E}{S_y}}$ .
2. Προσδιορίζουμε τον ισοδύναμο βαθμό λυγηρότητας της υπό εξέταση ράβδου  $\} = m \frac{\ell}{r}$ .
3. Αν  $\} \geq \} _C$  τότε χρησιμοποιούμε την εξίσωση Euler και  $P_{cr} = \frac{f^2 EA}{\}^2$
4. Αν  $\} \leq \} _C$  τότε χρησιμοποιούμε την εξίσωση Johnson και  $P_{cr} = AS_y \left[ 1 - \frac{S_y \}^2}{4f^2 E} \right]$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Ένας χαλύβδινος σωλήνας εξωτερικής διαμέτρου  $D=300\text{ mm}$  και πάχους  $s=10\text{ mm}$  χρησιμοποιείται για την στήριξη σε ύψος  $H$  μιας δεξαμενής ύδατος βάρους  $B = 20\text{ kN}$  όταν είναι γεμάτη. Ο σωλήνας πακτώνεται κατακόρυφα σε μια βαρειά και στιβαρή βάση σπλισμένου σκυροδέματος. Το υλικό του σωλήνα είναι χάλυβας AISI 1030 ψυχρής εξέλασης. Βρείτε το μέγιστο ασφαλές ύψος  $H$  της δεξαμενής ώστε ο συντελεστής ασφαλείας έναντι λυγισμού να είναι  $N=4.0$ .



:

μ

$$d = D - 2 \times s = 0.300 - 2 \times 0.010 = 0.280\text{ m}$$

μ

$$A = \frac{f}{4} (D^2 - d^2) = \frac{f}{4} (0.300^2 - 0.280^2) = 9.11 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

μ

$$I = \frac{f}{64} (D^4 - d^4) = \frac{f}{64} (0.300^4 - 0.280^4) = 9.59 \times 10^{-5}\text{ m}^4$$

μ

$$r_{\text{Euler}} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{9.59 \times 10^{-5}}{9.11 \times 10^{-3}}} = 1.03 \times 10^{-1}\text{ m}$$

μ μ  
μ :

$$NB = \frac{f^2 EI}{H^2} \Rightarrow H = f \sqrt{\frac{EI}{NB}} = f \sqrt{\frac{2.1 \times 10^{11} \times 9.59 \times 10^{-5}}{4 \times 20000}} \cong 50\text{ m}$$

:

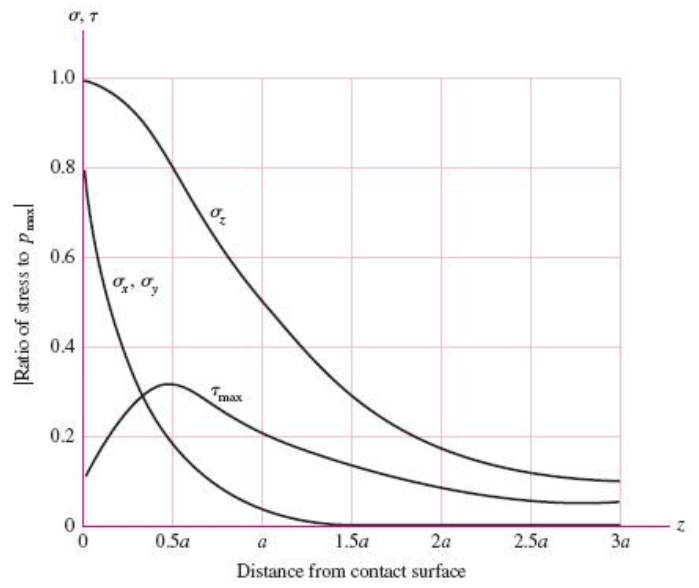
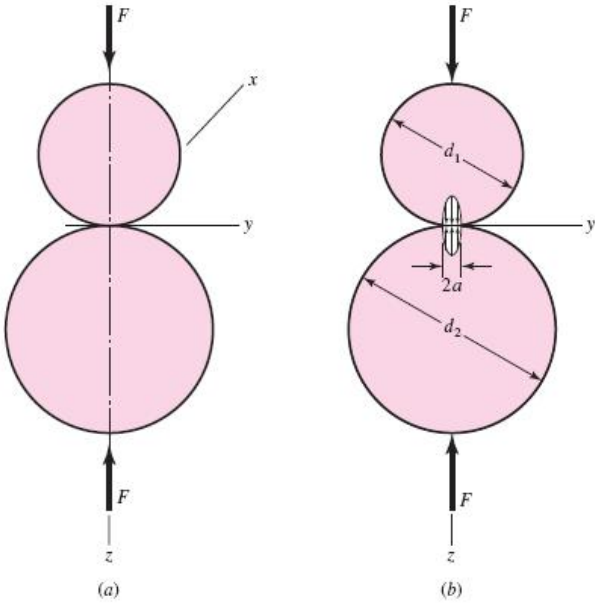
1. Επειδή για AISI-1030  $S_y = 440\text{ MPa}$ , ο κρίσιμος βαθμός λυγηρότητας είναι,:

$$\lambda_c = f \sqrt{\frac{2E}{S_y}} = f \sqrt{\frac{2 \times 2.1 \times 10^{11}}{440 \times 10^6}} = 97.1$$

2. Προσδιορίζουμε τον ισοδύναμο βαθμό λυγηρότητας της υπό εξέταση ράβδου

$$\lambda = m \frac{H}{r_{\text{Euler}}} = 2 \frac{49.85}{1.03 \times 10^{-1}} = 972$$

3. Παρατηρούμε ότι  $\lambda \geq \lambda_c$ , άρα καλώς χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Euler



$$a = \sqrt[3]{\frac{3FC_E K_D}{8}}$$

$$C_E = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$$K_D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{1}{1/d_1 + 1/d_2}$$

$\mu$  :

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{a^2} = \frac{3}{2} p_{\text{avg}}$$

$\mu$   $\mu$   $x, y$   $z$   $z$ .

$$\tau_x = \tau_1 = \tau_y = \tau_2 = -p_{\max} \left[ (1+\epsilon) \left( 1 - \frac{z}{a} \tan^{-1} \frac{a}{z} \right) - \frac{1}{2(1+z^2/a^2)} \right]$$

$$\tau_z = \tau_3 = -p_{\max} \left[ \frac{1}{(1+z^2/a^2)} \right]$$

$\mu$   $\mu$  :

$$|\tau_1| = |\tau_2| = \tau_{\max} = \left| \frac{\tau_1 - \tau_3}{2} \right|$$

:

1.  $(d_1 \quad d_2)$

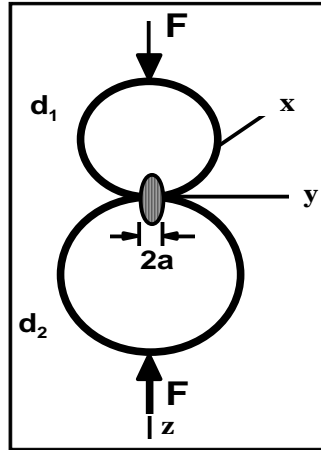
2.  $(d = \quad )$

3.  $\mu$   $(d = \quad )$

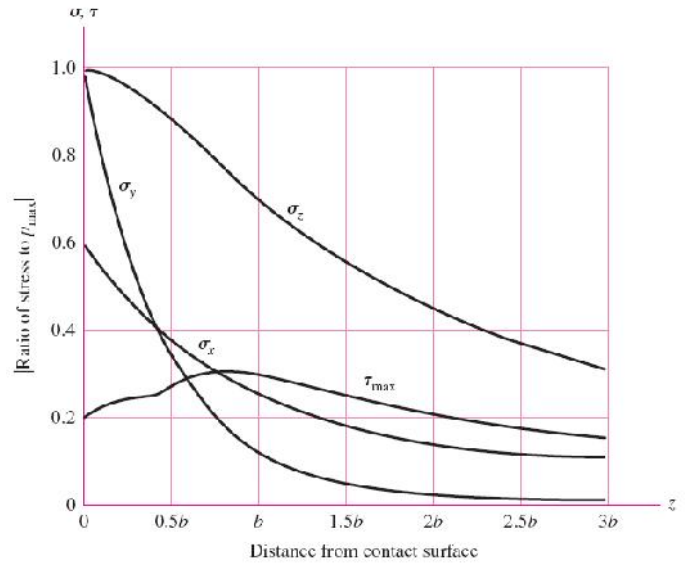
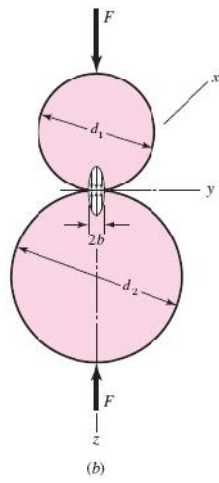
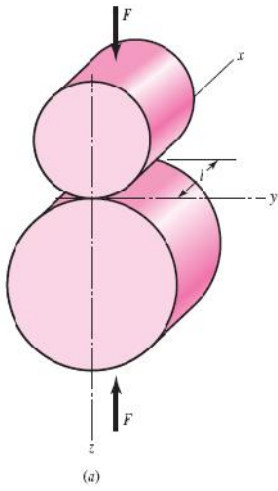
:

$$u = 1.04 \sqrt[3]{\frac{F^2 C_E^2}{K_D}}$$

$\mu$



$F =$	10	N	$\mu$	$\mu$
$1/d_1 =$	20	meter <sup>-1</sup>	$\mu$	#1
$1/d_2 =$	20	meter <sup>-1</sup>	$\mu$	#2
$E_1 =$	2,07E+11	Pa		#1
$E_2 =$	2,07E+11	Pa		#2
$\nu_1 =$	0,30			Poisson #1
$\nu_2 =$	0,30			Poisson #2
$K_D =$	0,025	meters	$\mu$	$\mu$
$C_E =$	8,7923E-12	Pa <sup>-1</sup>	$\mu$	$\mu$
$\delta =$	<b>9,38E-05</b>	meters		
$\sigma_{max} =$	<b>-543</b>	MPa		
$\delta_{max} =$	<b>7,03E-07</b>	meters		
:			$1/d = 0.$	
:		$\mu$	$1/d$	$\mu$



$$b = \sqrt{\frac{2FC_E K_D}{f \ell}}$$

$$C_E = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$$K_D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{1}{1/d_1 + 1/d_2}$$

$\mu$  :

$$p_{\max} = \frac{2}{f} \frac{F}{b \ell} = \frac{2}{f} p_{\text{avg}}$$

$\mu$   $\mu$   $x, y, z$   $z$

$$\dagger_x = \dagger_1 = -2\epsilon p_{\max} \left[ \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} - \frac{|z|}{b} \right]$$

$$\dagger_y = \dagger_2 = -p_{\max} \left[ \left( 2 - \frac{1}{1 + z^2/b^2} \right) \sqrt{\frac{z^2}{b^2} + 1} - 2 \frac{|z|}{b} \right]$$

$$\dagger_z = \dagger_3 = -p_{\max} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/b^2}} \right]$$

$\mu$   $\mu$  :

$$|\ddagger_1| = \left| \frac{\dagger_2 - \dagger_3}{2} \right| \quad |\ddagger_2| = \left| \frac{\dagger_1 - \dagger_3}{2} \right| \quad |\ddagger_3| = \left| \frac{\dagger_1 - \dagger_2}{2} \right|$$

:

1.  $(d_1 \quad d_2)$

2.  $(d = \quad )$

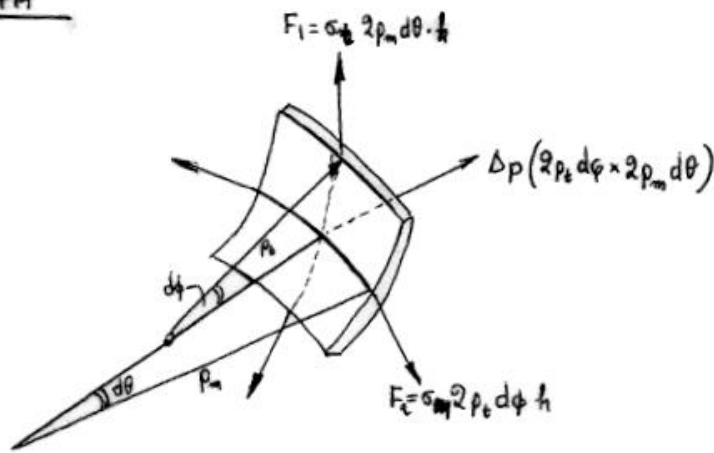
3.  $(d = \quad )$

# ΠΛΑΚΕΣ - ΚΕΛΥΦΗ



Figure 4.7 Surface structures

ΚΕΛΥΦΗ



$h = r_t \sin \alpha$

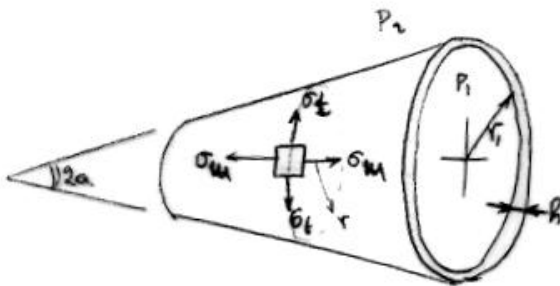
Ισορροπία:  $\Delta p (2r_t d\phi \cdot 2r_m d\theta) - 2F_1 \sin d\phi - 2F_2 \sin d\theta = 0$   
 $\Delta p 2r_t d\phi 2r_m d\theta - 2\sigma_t 2r_m d\theta h d\phi - 2\sigma_m 2r_t d\phi h d\theta = 0$   
 $\Delta p r_t r_m - \sigma_t r_m h - \sigma_m r_t h = 0$

$$\frac{\Delta p}{h} = \frac{\sigma_t}{r_t} + \frac{\sigma_m}{r_m}$$

Εξίσωση Laplace.

ΚΩΝΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ

$\Delta p = p_i - p_e$



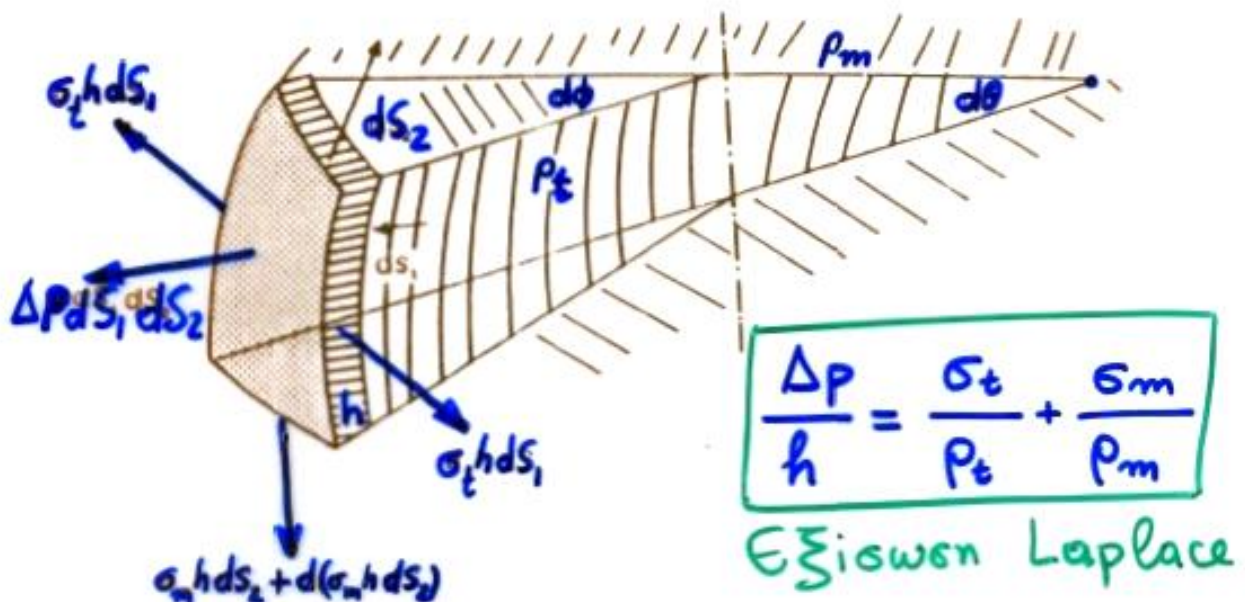
$\frac{\Delta p}{h} = \frac{\sigma_t}{r} + \frac{\sigma_m}{\infty} \Rightarrow$

$$\sigma_t = \Delta p \frac{r}{h \cos \alpha}$$

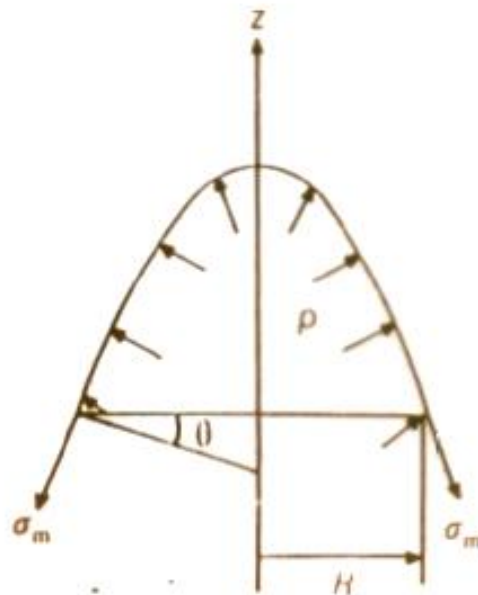
$\Delta p r \cos \alpha = \sigma_m 2r + h \cos \alpha$

$$\sigma_m = \Delta p \frac{r}{2h \cos \alpha}$$



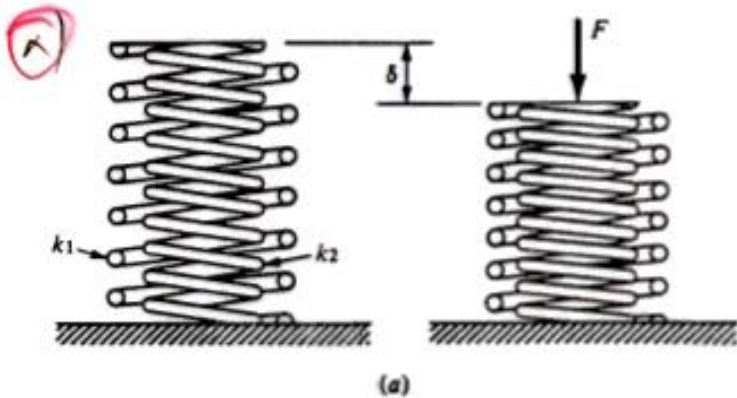


**Figure 4.8** Equilibrium at a membrane element



**Figure 4.9** Membrane equilibrium along the axis of symmetry

# ΣΤΑΤΙΚΑ ΑΟΡΙΖΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



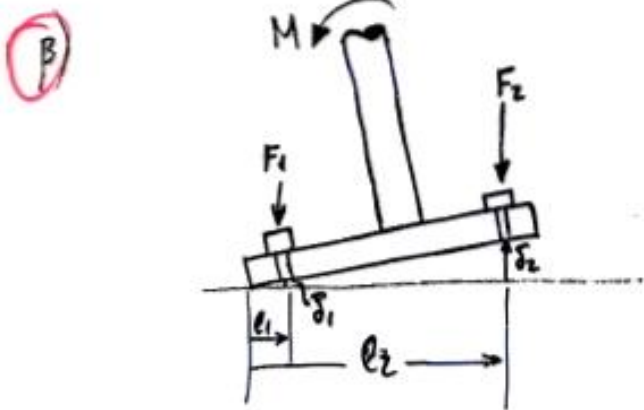
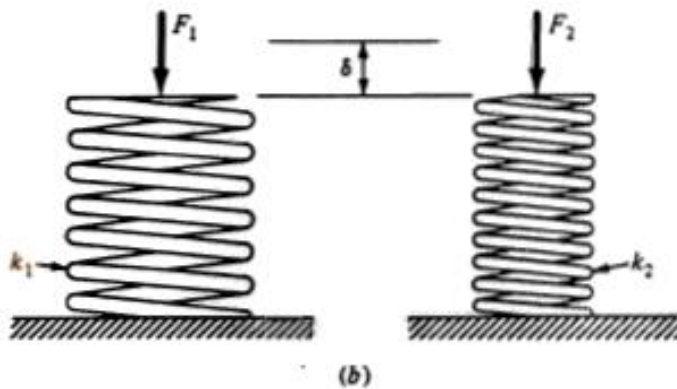
$$\sum F = F - F_1 - F_2 = 0$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta \quad \text{εξίσωση συμπιέσεως παραμορφώσεων}$$

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2}$$

$$F_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} F$$

$$F_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} F$$



$$\sum M = M - F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$

$$\frac{\delta_1}{l_1} = \frac{\delta_2}{l_2} \quad \text{εξίσωση συμπιέσεως παραμορφώσεων}$$

$$\frac{F_1}{k_1 l_1} = \frac{F_2}{k_2 l_2}$$

$$F_2 = \frac{k_2 l_2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} M$$

$$F_1 = \frac{k_1 l_1}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} M$$