Ράβδος ελάχιστου βάρους-δοσμένης αντοχής

Να επιλεγεί **υλικό** για ράβδο μήκους *L* (**γεωμετρική προδιαγραφή**), με εφελκυστικό φορτίο *F* (**λειτουργική προδιαγραφή**) και συντελεστή ασφάλειας *N*, ώστε το βάρος της ράβδου να είναι ελάχιστο (**αντικειμενική)**

Λύση:

Μάζα ράβδου: $m = \rho V = \rho A L$ (1)

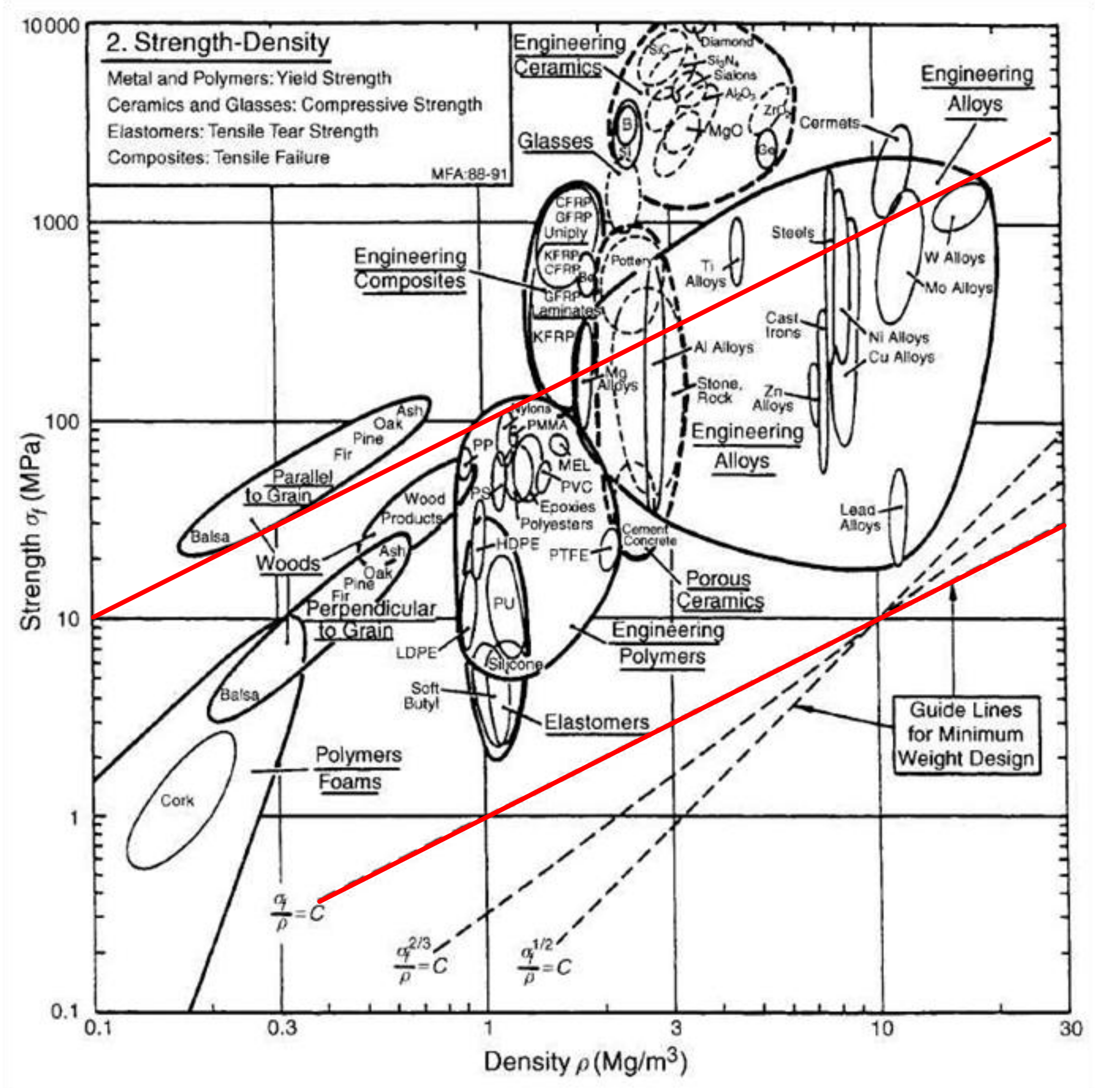
Επιφάνεια ικανή να φέρει το φορτίο: $\frac{F}{A} = \frac{S_y}{N}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $A = \frac{FN}{S_y} = \frac{m}{\rho L}$

$$m = \underbrace{(FN)}_{\substack{\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\iota\kappa\varepsilon\varsigma \\ \pi\rho o\delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\phi\varepsilon\varsigma}} \underbrace{(L)}_{\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha} \underbrace{\left(\frac{\rho}{S_y}\right)}_{\upsilon\lambda\iota\kappa o} \quad (3)$$

Η μάζα ελαχιστοποιείται μεγιστοποιώντας τον συντελεστή συμπεριφοράς υλικού *M*:

$$M = \frac{S_y}{\rho}$$



Βρίσκω το διάγραμμα του Ashby που περιέχει τη θέση κάθε κατηγορίας υλικού ανάλογα με την αντοχή και την πυκνότητα. Εντοπίζω την οδηγό γραμμή του M = Sy /ρ (κάτω κόκκινη γραμμή), και την μετακινώ παράλληλα προς τα επάνω περιορίζοντας τις ομάδες των υλικών. Εδώ η πάνω κόκκινη γραμμή υποδεικνύει εκείνες τις ομάδες υλικών που έχουν σε σχέση με άλλες υψηλότερο λόγο M. Από αυτά τα υλικά θα επιλέξουμε ή αυτά τα υλικά θα τα κατατάξουμε ως προς την καταλληλότητά τους με κάποιο άλλο κριτήριο (πχ. κόστος)

Κολώνα ελάχιστου βάρους σε λυγισμό

Να επιλεγεί **υλικό** για κολώνα ύψους *L*(**γεωμετρική προδιαγραφή**), με θλιπτικό φορτίο *F* στο ελεύθερο άκρο της (**λειτουργική προδιαγραφή**), ώστε να αντέχει σε λυγισμό (**περιορισμός**), ενώ η μάζα της δοκού να είναι η ελάχιστη δυνατή (**αντικειμενική συνάρτηση**).

ΛΥΣΗ: $$F \le \frac{F_{cr}}{N} = \frac{\pi^2 EI}{NL^2} = \frac{\pi^2 E}{NL^2}\frac{\pi d^4}{64}$$

(1)

Η μάζα είναι: $m = AL\rho = \frac{\pi d^2}{4} L\rho$

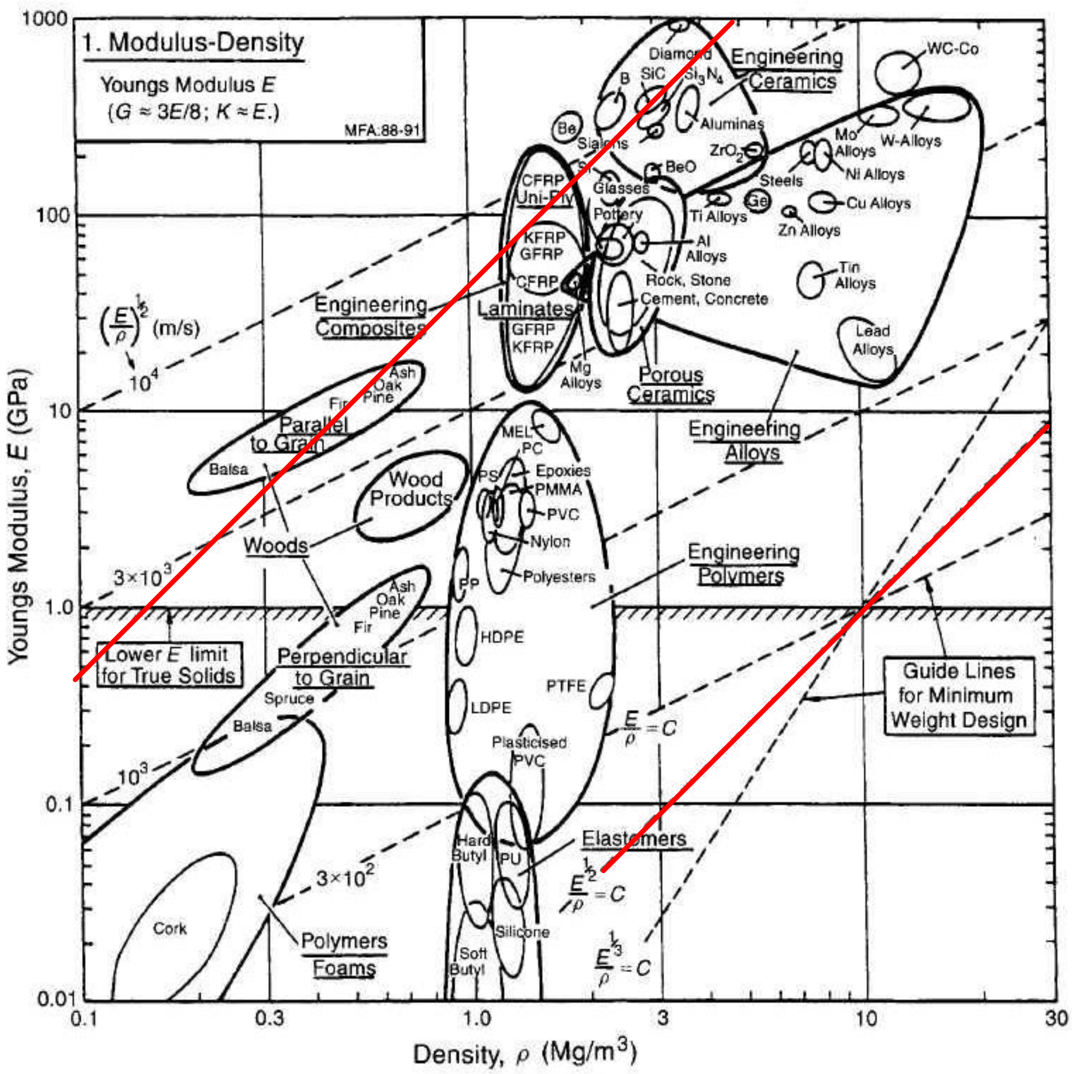
(2)

Λύνοντας την (1) ως προς τη διάμετρο και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$m = \underbrace{\sqrt{\frac{NF}{\pi}}}_{\substack{\lambda\epsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\iota\kappa\epsilon\varsigma \\ \pi\rho o\delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\phi\epsilon\varsigma}} \underbrace{\left(2L^2\right)}_{\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha} \underbrace{\left(\frac{\rho}{\sqrt{E}}\right)}_{\upsilon\lambda\iota\kappa o}$$

Η μάζα ελαχιστοποιείται όταν μεγιστοποιηθεί ο συντελεστής συμπεριφοράς του υλικού *M:*

$$M = \frac{\sqrt{E}}{\rho}$$



Βρίσκω το διάγραμμα του Ashby που περιέχει τη θέση κάθε κατηγορίας υλικού ανάλογα με το Μέτρο Ελαστικότητας και την πυκνότητα. Εντοπίζω την οδηγό γραμμή του $M = E^{1/2}/\rho$ (κάτω κόκκινη γραμμή), και την μετακινώ παράλληλα προς τα επάνω περιορίζοντας τις ομάδες των υλικών. Εδώ πάνω από την πάνω κόκκινη γραμμή εντοπίζονται όλα εκείνα τα υλικά που έχουν σε σχέση με άλλα (κάτω από τη πάνω κόκκινη γραμμή) υψηλότερο λόγο M. Από αυτά τα υλικά θα επιλέξουμε ή αυτά τα υλικά θα τα κατατάξουμε ως προς την καταλληλότητά τους με κάποιο άλλο κριτήριο (πχ. κόστος)

Δοκός ελάχιστου βάρους-δοσμένης δυσκαμψίας

Να επιλεγεί **υλικό** για πρόβολη δοκό διατομής *b* x *b* (**γεωμετρική προδιαγραφή**), μήκους *L*(**γεωμετρική προδιαγραφή**), με φορτίο *F* στο ελεύθερο άκρο της (**λειτουργική προδιαγραφή**), ώστε η μετατόπισή της να μην είναι μεγαλύτερη από *δ* (**περιορισμός**), ενώ η μάζα της δοκού να είναι η ελάχιστη δυνατή (**αντικειμενική συνάρτηση**).

Λύση: Η μετατόπιση της δοκού είναι: $\delta = \dfrac{F}{k}$ (1)

Η σταθερά ελατηρίου της δοκού είναι:

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε: $\delta = \dfrac{FL^3}{3EI}$ (3)

Επειδή $I = b^4/12 = A^2/12$:

$$\delta = \frac{FL^3}{3E\left(A^2/12\right)} = \frac{4FL^3}{EA^2} \quad (4)$$

Η μάζα της δοκού είναι: $m = \rho V = \rho A L \Rightarrow A = \dfrac{m}{\rho L}$

(5)

$$\delta = \frac{4FL^3}{E\left(m/\rho L\right)^2} \Rightarrow \delta = \frac{4FL^3\rho^2 L^2}{Em^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{\sqrt{4F}\,L^{5/2}\rho}{\sqrt{E}\sqrt{\delta}} = \underbrace{\left(\sqrt{\frac{4k}{L}}\right)}_{\substack{\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\iota\kappa\varepsilon\varsigma \\ \pi\rho o\delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\varphi\varepsilon\varsigma}} \underset{\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha}{\left(L^3\right)} \underbrace{\left(\frac{\rho}{\sqrt{E}}\right)}_{\upsilon\lambda\iota\kappa o} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{E}}{\rho} \to \max$$

Table 5.7 Examples of material indices

Function, Objective and Constraint	*Index*
Tie, minimum weight, stiffness prescribed	$\dfrac{E}{\rho}$
Beam, minimum weight, stiffness prescribed	$\dfrac{E^{1/2}}{\rho}$
Beam, minimum weight, strength prescribed	$\dfrac{\sigma_y^{2/3}}{\rho}$
Beam, minimum cost, stiffness prescribed	$\dfrac{E^{1/2}}{C_m\rho}$
Beam, minimum cost, strength prescribed	$\dfrac{\sigma_y^{2/3}}{C_m\rho}$
Column, minimum cost, buckling load prescribed	$\dfrac{E^{1/2}}{C_m\rho}$
Spring, minimum weight for given energy storage	$\dfrac{\sigma_y^2}{E\rho}$
Thermal insulation, minimum cost, heat flux prescribed	$\dfrac{1}{\lambda C_m\rho}$
Electromagnet, maximum field, temperature rise prescribed	$\kappa C_p\rho$

(ρ = density; E = Young's modulus; σ_y = elastic limit; C_m = cost/kg; λ = thermal conductivity; κ = electrical conductivity; C_p = specific heat)