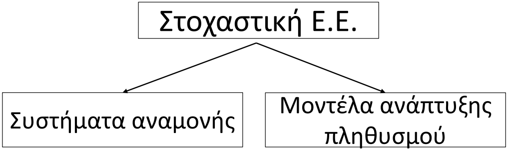
Ουρές αναμονής I

Ιωάννης Δημητρίου

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών,
idimit@math.upatras.gr

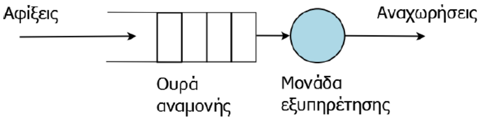
Περιεχόμενα

- Η στοχαστική επιχειρησιακή έρευνα αποτελεί ένα σύνολο μαθηματικών τεχνικών για την μοντελοποίηση, μελέτη και βελτιστοποίηση «συστημάτων».
- Οι βασικές παράμετροι των «συστημάτων» είναι τυχαίες μεταβλητές.
- Τα υπό μελέτη χαρακτηριστικά των εν λόγω συστημάτων μοντελοποιούνται με την εισαγωγή **στοχαστικών διαδικασιών**.
- Πολλά από τα προβλήματα που εμφανίζονται στον εν λόγω κλάδο, μοντελοποιούνται και αναλύονται με την βοήθεια διαφορικών εξισώσεων διαφορών.



Συστήματα αναμονής

- Θ.Σ.Α. παρέχει μαθηματικά πρότυπα-μοντέλα που περιγράφουν την συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων που παρέχουν **εξυπηρέτηση** σε ζητήσεις που εμφανίζονται «**τυχαία**».
- Μελέτη προβλημάτων συνωστισμού
- Ένας πληθυσμός από οντότητες «(πελάτες»)) θέλει να λάβει εξυπηρέτηση απο έναν σταθμό (service system) με πεπερασμένη χωρητικότητα και απόδοση.
- Εφαρμογές: Καθημερινότητα (τράπεζες, ταχυδρομεία, cinema, super-market, Μ.Μ.Μ.), Συγκοινωνιακά συστήματα, Τηλεπικοινωνίες, Ασύρματα δίκτυα, Δίκτυα Η/Υ, Βιομηχανία...



άφιξη πελατών⇔άφιξη πακέτων πληροφορίας, εργασιών

υπάλληλοι⇔κανάλια μετάδοσης, επεξεργαστής CPU

Βασικός συμβολισμός

$$X^{[Y]}/Z^{[W]}/n/K \text{ πειθαρχία ουράς.}$$

όπου

$$\begin{aligned} X &: \text{ αφορά την κατανομή αφίξεων.} \\ Y &: \text{ αφορά την κατανομή του αριθμού πελατών ανά άφιξη.} \\ Z &: \text{ αφορά την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.} \\ W &: \text{ αφορά την κατανομή του αριθμού πελατών ανά εξυπηρέτηση.} \\ n &: \text{ αριθμός υπαλλήλων.} \\ K &: \text{ χωρητικότητα συστήματος.} \end{aligned}$$

Μέτρα απόδοσης: 1. Κατανομή πιθανότητας αριθμού πελατών στο σύστημα, 2. Waiting time, 3. Busy period.

- Ασχολείται με την μελέτη συστημάτων φαινομένων που εξελίσονται στον χρόνο σύμφωνα με πιθανοθεωρητικούς νόμους.
- Είναι μια συλλογή τ.μ. $\{X(t),\ t \in T\}$.
- T : παραμετρικός χώρος (εκφράζει χρόνο).
- E : Χώρος καταστάσεων (τιμές της $X(t)$).
- Στόχος: Η κατανόηση της συμπεριφοράς της $X(t),\ t \in T$ με απότερο σκοπό την πρόβλεψη και τον έλεγχο της μελλοντικής της συμπεριφοράς $\Longrightarrow$
  Εύρεση της κατανομής πιθανότητας της $\{X(t),\ t \in T\}$.
- Θα ασχοληθούμε με στ. δ. **συνεχούς χρόνου** με **διακριτό χώρο καταστάσεων**.

Παρέχει πληροφορίες για την **αποτίμηση της απόδοσης**

1. συστημάτων παροχής εξυπηρέτησης,
2. τηλεπικοινωνιακών δικτύων,
3. δικτύων Η/Υ,
4. στον έλεγχο αποθεμάτων,
5. στον έλεγχο και αντικατάσταση εξαρτημάτων
6. προβλήματα ανάπτυξης πληθυσμού,
7. Προβλήματα οικολογικών αντιπαραθέσεων

Διαδικασία εφαρμογής

1. Δεδομένου του **δυναμικού** συστήματος, όρισε μια στ.δ. που θα περιγράφει επαρκώς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει.
2. Δοθείσης της στ.δ. εξάγουμε αποτελέσματα σχετικά με το σύστημα:
    1. Προσομοίωση
    2. Με χρήση κατάλληλων μαθηματικών τεχνικών

Μαρκοβιανές διαδικασίες: Έστω $\{X(t),\ t\in T\}$ στ.δ. με χώρο καταστάσεων $E=\{0,1,\dots\}$. $\{X(t),\ t\in T\}$ είναι Μαρκοβιανή αν

$$P(X(t+s)=j|X(s)=i,X(u),0\le u<s)=P(X(t+s)=j|X(s)=i).$$

Θα είναι **χρονικά ομογενής** αν-ν

$$P(X(t+s)=j|X(s)=i)=P(X(t)=j|X(0)=i)=p_{ij}(t),\ i,j\in E.$$

Chapman-Kolmogorov εξισώσεις

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h) &= \textstyle\sum_{k\in E} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \iff\\
p_{ij}(t+h) &= \textstyle\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)+p_{ii}(h)p_{ij}(t) \iff\\
\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} &= \textstyle\sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)\quad h\to 0\\
p'_{ij}(t) &= \textstyle\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t) \iff\\
\mathcal{P}'(t) &= \mathcal{P}(t)\mathcal{Q} \iff\\
\mathcal{P}(t) &= e^{\mathcal{Q}t},\ (\mathcal{P}(0)=\mathcal{I}).
\end{aligned}$$

Αν $t \to \infty$,

$$\mathcal{P}'(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{Q} \Longleftrightarrow \bar{\pi}\mathcal{Q} = \bar{0}$$

όπου $\bar{\pi} = (\pi_0, \pi_1 \ldots)$, με

$$\bar{\pi}\bar{1} = 1.$$

ΒΑΣΙΚΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ

- Η $\{X(t)\}$ παραμένει σε μια κατάσταση i για χρονικό διάστημα που ακολουθεί εκθετική κατανομή και ακολούθως, με δεδομένη πιθανότητα, μεταβαίνει σε μια μια άλλη κατάσταση j, $j \neq i$ (q_{ij}).
- $\mathcal{Q} = (q_{ij})$, πίνακας ρυθμών μετάβασης.

- Η απλούστερη Μαρκ. διαδικασία.
- Διαδικασία απαρίθμησης: Μετρά αριθμό συμβάντων στο $(0, t]$: Έστω $\{X(t),\ t \geq 0\}$, $X(0) = 0$.
- Γεγονότα που συμβαίνουν σε μη-επικαλυπτόμενα χρ. διαστήματα είναι ανεξάρτητα,
- χρονικά ομογενής προσαυξήσεις
- $P(X(t+h) = n+1|X(t) = n) = \lambda h + o(h)$,
  $P(X(t+h) = n|X(t) = n) = 1 - \lambda h + o(h)$,
  $P(X(t+h) = n+m|X(t) = n) = o(h),\ m > 1$.
- $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Θα δείξουμε ότι

$$P(X(t) = j) = p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Απο $C-K$, για $j>0$

$$\begin{aligned}
p_j(t+h) = {} & p_j(t)P(no\ arrival\ in\ (t,t+h)) \\
& + p_{j-1}(t)P(1\ arrival\ in\ (t,t+h)) \\
= {} & p_j(t)(1-\lambda h+o(h)) + p_{j-1}(t)(\lambda h + 0(h)) \\
\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} = {} & -p_j(t)\lambda + p_{j-1}(t)\lambda + \frac{o(h)}{h}
\end{aligned}$$

Για $j=0$

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) = {} & p_0(t)P(no\ arrival\ in\ (t,t+h)) \\
= {} & p_0(t)(1-\lambda h+o(h)) \\
\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = {} & -p_0(t)\lambda + \frac{o(h)}{h}
\end{aligned}$$

Αν $h \to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t), \\ \frac{dp_j(t)}{dt} &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t),\ j > 0. \end{aligned}$$

με $p_0(0) = 1,\ p_j(0) = 0,\ j > 0$.

Α) Αναδρομική επίλυση του συστήματος δ.ε. Για $j = 0$

$$p_0(t) = p_0(0)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Αντικαθιστώ την παραπάνω στην 2η για $j = 1$ και έχουμε

$$p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow$$

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}[p_1(0) + \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda x}}{1} dx] = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω και αντικαθιστώντας στην 2η για $j = 2$:

$$p_2'(t) + \lambda p_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow p_2(t) = \ldots = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}.$$

Ομοίως $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$.

B) Γεννήτριες συναρτήσεις

Έστω,

$$G(z,t) = \sum_{j\geq 0} p_j(t) z^j, \; |z| \leq 1.$$

Εφαρμόζοντας στο σύστημα δ.ε.δ. θα έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} z^0 &= -\lambda p_0(t) z^0, \\ \frac{dp_j(t)}{dt} z^j &= -\lambda z^j p_j(t) + \lambda z p_{j-1}(t) z^{j-1}, \; j > 0. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z,t) + \lambda(1-z) G(z,t) = 0.$$

Άρα

$$G(z,t) = G(z,0) \exp[-\int_0^t \frac{\lambda(1-z)}{1} dx] = e^{\lambda(z-1)} t, \; (G(z,0) = 1).$$

Όμως

$$G(z,t) = e^{\lambda(z-1)}t = e^{-\lambda t} e^{z\lambda} = \sum_{j\geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} z^j,$$

και επομένως

$$p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Έστω μια $CTMC$ $\{X(t)\, t \geq 0\}$ με στατικές πιθανότητες μετάβασης

$$p_{in}(t) = P(X(t+s) = n | X(s) = i) = p_n(t).$$

Οι αλλαγές των καταστάσεων στο $(t, t+h)$ γίνονται ως εξής:

1. $p_{n,n+1}(h) = \lambda_n h + o(h)$,
2. $p_{n,n-1}(h) = \mu_n h + o(h)$,
3. $p_{n,n}(h) = 1 - (\lambda_n + \mu_n)h + o(h)$,
4. $p_{n,j}(h) = o(h)$, $j \neq n, n-1, n+1$.

Απο $C-K$ για $n>0$

$$\begin{aligned}
p_n(t+h) = &\; p_n(t)p_{n,n}(h)+p_{n-1}(t)p_{n-1,n}(h) \\
&+p_{n+1}(t)p_{n+1,n}(h) \\
= &\; p_n(t)[1-(\lambda_n+\mu_n)h+o(h)] \\
&+p_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}h+o(h)]+p_{n+1}(t)[\mu_{n+1}h+o(h)] \\
&\Longleftrightarrow \\
\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = &\; -p_n(t)(\lambda_n+\mu_n)+p_{n-1}(t)\lambda_{n-1} \\
&+p_{n+1}(t)\mu_{n+1}+\frac{o(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Για $n=0$,

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) = &\; p_0(t)p_{0,0}(h)+p_1(t)p_{1,0}(h) \\
= &\; p_0(t)[1-\lambda_0 h+o(h)]+p_1(t)[\mu_1 h+o(h)] \\
&\Longleftrightarrow \\
\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = &\; -p_0(t)\lambda_0+p_1(t)\mu_1+\frac{o(h)}{h},
\end{aligned}$$

Όταν $h \to 0$, έχουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t),\ n > 0.
\end{aligned}$$

Όταν $t \to \infty$, $\frac{dp_n(t)}{dt} \to 0$, $p_n(t) \to \pi_n$ και άρα,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1, \\
(\lambda_n + \mu_n)\pi_n &= \mu_{n+1}\pi_{n+1} + \lambda_{n-1}\pi_{n-1},\ n > 0.
\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ε.δ. αναδρομικά

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0.$$

Αντικαθιστώντας στην 2η για $n = 1$...

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0.$$

Συνεχίζοντας,

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi_0, \; n \geq 1.$$

Όμως πρέπει

$$1 = \sum_n \pi_n = \pi_0 [1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}].$$

Αν η σειρά

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty,$$

τότε

$$\pi_0 = [1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}]^{-1}.$$

1. **Αφίξεις**: Poisson, $\lambda > 0$,
2. **Εξυπηρετήσεις**: *exp*(μ), $\mu > 0$.
3. Απειρος χώρος αναμονής.
4. Διαδικασίες αφίξεων-εξυπηρετήσεων ανεξαρτητες.
5. Πειθαρχία ουράς: FIFO (First In First Out).

Κατανομή του αριθμού των πελατών

Έστω $\{N(t), 0 \leq t < \infty\}$, στοχαστική διαδικασία που παριστά τον αριθμό των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, με χώρο καταστάσεων $E = \{0, 1, 2, ...\}$.

$$p_n(t) = P(N(t) = n | N(0) = 0),\ n \geq 0.$$

Το σύστημα αλλάζει κατάσταση:

1. όταν έρθει πελάτης,
2. όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση ενός πελάτη και αυτόω αναχωρήσει.

Προφανώς η $\{N(t), 0 \leq t < \infty\}$ είναι Μαρκοβιανή και χρονικά ομογενής (Γιατί;).
Όμως $p_0(0) = 1$ $(p_n(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots)$.

- Ενδιαφερόμαστε για αλλαγές των καταστάσεων στο χρονικό διάστημα $(t, t + dt)$ (Chapman-Kolmogorov).
- Λόγω των ιδιοτήτων της διαδικασίας Poisson και της εκθετικής κατανομής θα έχουμε τις ακόλουθες μεταβάσεις στο $(t, t + dt)$:
    1. $P(1 \text{ άφιξη στο } (t, t + dt)) = \lambda dt + o(dt)$,
    2. $P(\text{καμία άφιξη στο } (t, t + dt)) = 1 - \lambda dt + o(dt)$,
    3. $P(\text{περισσότερες από μια αφίξεις στο } (t, t + dt)) = o(dt)$.

    1. $P(1 \text{ αναχώρηση στο } (t, t + dt)) = \mu dt + o(dt)$,
    2. $P(\text{καμία αναχώρηση στο } (t, t + dt)) = 1 - \mu dt + o(dt)$,
    3. $P(\text{περισσότερες από μια αναχωρήσεις στο } (t, t + dt)) = o(dt)$.
- $\lim_{dt \to 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$.

Chapman-Kolmogorov Εξισώσεις:

1. $n > 0$

$$
\begin{aligned}
p_n(t+dt) &= p_n(t)p_{n,n}(dt) + p_{n-1}(t)p_{n-1,n}(dt) \\
&\quad + p_{n+1}(t)p_{n+1,n}(dt) \\
&= p_n(t)[1-(\lambda+\mu)dt + o(dt)] \\
&\quad + p_{n-1}(t)[\lambda dt + o(dt)] + p_{n+1}(t)[\mu dt + o(dt)] \\
&\iff \\
\frac{p_n(t+dt)-p_n(t)}{dt} &= -p_n(t)(\lambda+\mu) + p_{n-1}(t)\lambda + p_{n+1}(t)\mu + \frac{o(dt)}{dt}
\end{aligned}
$$

2. $n = 0$

$$
\begin{aligned}
p_0(t+dt) &= p_0(t)p_{0,0}(dt) + p_1(t)p_{1,0}(dt) \\
&= p_0(t)[1-\lambda dt + o(dt)] + p_1(t)[\mu dt + o(dt)] \\
&\iff \\
\frac{p_0(t+dt)-p_0(t)}{dt} &= -p_0(t)\lambda + p_1(t)\mu + \frac{o(dt)}{dt}.
\end{aligned}
$$

Όταν $dt \to 0$, έχουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t),\ n > 0.\end{aligned}$$

1. Difference-equation method.
2. z-transform method.

Το $M/M/1$ είναι ειδική περίπτωση διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων με

$$\lambda_n = \lambda,\ n \geq 0,\ \mu_n = \mu,\ n \geq 1.$$

Difference-equation method

Έστω $\pi_n(s) = \mathcal{L}(p_n(t)) = \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)dt,\ Re(s) > 0.$
Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\mathcal{L}(\frac{dp_n(t)}{dt}) = s\mathcal{L}(p_n(t)) - p_n(0),$$

έχουμε

$$\begin{aligned} (s+\lambda)\pi_0(s) =& \quad 1 + \mu\pi_1(s), \\ (s+\lambda+\mu)\pi_n(s) =& \quad \mu\pi_{n+1}(s) + \lambda\pi_{n-1}(s),\ n > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Η δευτερη είναι εξίσωση διαφορών 2ης τάξης με γενική λύση

$$\pi_n(s) = Ax_+(s)^n + Bx_-(s)^n,\ n \geq 1,$$

όπου A, B σταθερές και $x_\pm(s)$ οι λυσεις της χαρακτηριστική εξίσωσης,

$$\mu x^2 - (s+\lambda+\mu)x + \lambda = 0,$$

όπου

$$x_{\pm}(s) = \frac{(s+\lambda+\mu)\pm\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\mu},$$

$$x_+(s) + x_-(s) = \frac{s+\lambda+\mu}{\mu},\ x_+(s)x_-(s) = \frac{\lambda}{\mu},\ |x_+(s)| > |x_-(s)|.$$

Θεώρημα 1

(Θεωρημα Rouché) Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις μέσα και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C, και αν $|g(x)| < |f(x)|$, $x \in C$, τότε η $f(x)$ και η $f(x) + g(x)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών εντός της C.

Στην περίπτωση μας θεωρούμε ως C, τον μοναδιαίο κύκλο $|x| = 1$, $f(x) = -(s+\lambda+\mu)x$, $g(x) = \lambda + \mu x^2$, $Re(s) > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} |f(x)| = &\ |(s+\lambda+\mu)x| = |s+\lambda+\mu| \\ \geq &\ |\lambda+\mu| = \lambda+\mu \\ \geq &\ |\lambda+\mu x^2| = |g(x)|. \end{aligned}$$

Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση

$$f(x) + g(x) = \mu x^2 - (s + \lambda + \mu)x + \lambda = 0,$$

έχει ακριβώς μια ρίζα εντός του μοναδιαίου κύκλου C. Δηλ. $|x_-(s)| < 1 < |x_+(s)|$. Όμως

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(s) = 1/s, \; Re(s) > 0.$$

Αρα $\sum \pi_n(s) = \sum (Ax_+(s)^n + Bx_-(s)^n)$ πρέπει να συγκλίνει και μιας και $|x_+(s)| > 1$, $A = 0$ και

$$\pi_n(s) = Bx_-(s)^n.$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{1}{s}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n(s)=B\sum_{n=0}^{\infty}x_-(s)^n=\frac{B}{1-x_-(s)}\Longleftrightarrow B=\frac{1-x_-(s)}{s}.$$

Επομένως

$$\pi_n(s)=\frac{(1-x_-(s))x_-(s)^n}{s}, n\geq 0,\ \ Re(s)>0. \qquad (2)$$

Όμως $p_n(t)=\mathcal{L}^{-1}(\pi_n(s))$. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}(x_+(s)-1)(1-x_-(s)) = & \ x_+(s)+x_-(s)-x_+(s)x_-(s)+1=\tfrac{s}{\mu}\\ \Leftrightarrow & \ 1-x_-(s)=\tfrac{s}{\mu(x_+(s)-1)}.\end{aligned}$$

Άρα, μιας και $x_+(s)x_-(s)=\frac{\lambda}{\mu}=\rho$,

$$\pi_n(s)=\frac{x_-(s)^n}{\mu(x_+(s)-1)}=\frac{\rho^n/\mu}{(x_+(s)-1)x_+^n(s)}=\frac{\rho^n}{\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{x_+(s)^{m+n+1}}. \qquad (3)$$

Είναι γνωστό ότι

$$\mathcal{L}(e^{-(\lambda+\mu)t}\frac{n}{t}(2\sqrt{\lambda\mu})^{-n}I_n(2t\sqrt{\lambda\mu})) = \frac{1}{x^n},$$

όπου

$$x = s + \lambda + \mu + \sqrt{(s+\lambda+\mu)^2 - 4\lambda\mu}$$

και $I_n(s)$ η modified συνάρτηση Bessel n-τύπου,

$$I_n(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!},$$

και η αντιστροφή της $\pi_n(s)$ δίνεται από

$$p_n(t) = \frac{\rho^n e^{-(\lambda+\mu)t}}{\mu t} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n+1)\rho^{-(m+n+1)/2} I_{m+n+1}(2t\sqrt{\lambda\mu}).$$

The z-transform method

Έστω για $|z| < 1$, $Re(s) > 0$

$$P(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \quad \Pi(z,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(z,t) dt.$$

Χρησιμοποιώντας το συστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n &= -(\lambda+\mu)\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) + \mu p_0(t) \\
&\quad +\lambda z \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) z^{n-1} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(t) z^n \Longleftrightarrow \\
\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu)P(z,t) + \mu p_0(t) + \lambda z P(z,t) \\
&\quad + \frac{\mu}{z}(P(z,t) - p_0(t)) \Longleftrightarrow \\
z\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} &= (\lambda z^2 - (\lambda+\mu)z + \mu)P(z,t) - \mu(1-z)p_0(t).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας Laplace transform στην παραπάνω εξίσωση $(\mathcal{L}(\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}) = s\Pi(z,s) - P(z,0))$ καταλήγουμε στην,

$$\Pi(z,s) = \frac{\mu(1-z)\pi_0(s) - zP(z,0)}{\lambda z^2 - (s+\lambda+\mu)z + \mu}.$$

Δυο άγνωστοι: $\pi_0(s)$ και $P(z,0)$.
Αφου $p_0(0) = 1$, τότε $P(z,0) = 1$ και

$$\Pi(z,s) = \frac{\mu(1-z)\pi_0(s) - z}{\lambda z^2 - (s+\lambda+\mu)z + \mu}.$$

Απο θεώρημα Rouché, ο παρονομαστής έχει 2 ρίζες, $z_1(s)$, $z_2(s)$ με $z_1(s) = \frac{1}{x_+(s)}$, $z_2(s) = \frac{1}{x_-(s)}$. Άρα,

$$|z_1(s)| < 1 < |z_2(s)|.$$

Η $P(z,s)$ είναι αναλυτική εντός του μοναδιαίου κύκλου και επομένως η μόνη ρίζα του παρονομαστή (εντός του $|z| < 1$) θα είναι και ρίζα του αριθμητή. Άρα,

$$\pi_0(s) = \frac{z_1(s)}{\mu(1 - z_1(s))}.$$

Τότε,

$$
\begin{aligned}
\Pi(z,s) &= \frac{\frac{1}{x_+(s)}-z}{\lambda(z-\frac{1}{x_+(s)})(z-\frac{1}{x_-(s)})(1-\frac{1}{x_+(s)})} \\
&= \frac{x_+(s)x_-(s)}{\lambda(x_+(s)-1)(1-zx_-(s))} \\
&= \frac{x_+(s)x_-(s)}{\lambda(x_+(s)-1)} \sum_{n=0}^{\infty}(zx_-(s))^n \\
&= \frac{x_+(s)x_-(s)(1-x_-(s))}{\lambda(x_+(s)-1)(1-x_-(s))} \sum_{n=0}^{\infty}(zx_-(s))^n \\
& \quad (since\ (x_+(s)-1)(1-x_-(s)) = \frac{s}{\mu}) \\
&= \frac{x_+(s)x_-(s)(1-x_-(s))}{\lambda\frac{s}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty}(zx_-(s))^n \\
&= \frac{(1-x_-(s))}{s} \sum_{n=0}^{\infty}(zx_-(s))^n \, (since\ x_+(s)x_-(s) = \frac{\lambda}{\mu}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x_-(s))x_-(s)^n}{s} z^n,
\end{aligned}
$$

και επομένως

$$\pi_n(s) = \frac{(1-x_-(s))x_-(s)^n}{s}.$$

Έστω ˙οτι $t \to \infty$. Ενδιαφερόμαστε για

$$\pi_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t).$$

A) Γνωρίζουμε ότι,

$$\pi_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t) = \lim_{s\to 0} s\pi_n(s) = \lim_{s\to 0}(1 - x_-(s))x_-(s)^n.$$

Όμως

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} x_-(s) = & \lim_{s\to 0} \frac{s+\lambda+\mu-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\mu} \\ = & \begin{cases} \rho, & \lambda < \mu, \\ 1, & \lambda \geq \mu. \end{cases}\end{aligned}$$

B) (Αναδρομική επίλυση) Μιας και $\lim_{t\to\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda\pi_0 = & \mu\pi_1, \\ (\lambda+\mu)\pi_n = & \mu\pi_{n+1} + \lambda\pi_{n-1},\ n > 0.\end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη έξουμε

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0.$$

Θέτοντας $n = 1$ στην 2η και χρησιμοποιώντας την παραπάνω,

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = (\frac{\lambda}{\mu})^2\pi_0 = \rho^2\pi_0.$$

Ομοίως

$$\pi_n = \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} = \ldots = (\frac{\lambda}{\mu})^n\pi_0 = \rho^n\pi_0,\ n \geq 0.$$

Όμως

$$\sum_{n\geq 0}\pi_n = 1 \iff 1 = \pi_0\sum_{n\geq 0}\rho^n.$$

Πρέπει $\rho < 1$ για να συγκλίνει η σειρά. Άρα όταν $\rho < 1$ (συνθήκη στατιστικής ισορροπίας)

$$1 = \pi_0\frac{1}{1-\rho} \iff \pi_0 = 1-\rho \iff \pi_n = (1-\rho)\rho^n.$$

Γ) (Direct approach)

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1,$$
$$(\lambda+\mu)\pi_n = \mu\pi_{n+1} + \lambda\pi_{n-1},\ n > 0.$$

Η 2η είναι εξίσωση διαφορών 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική της λύση είναι

$$\pi_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

όπου x_1, x_2 είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\mu x^2 - (\lambda+\mu) + \lambda = 0,$$

και έξει 2 λύσεις $x_1 = 1$, $x_2 = \lambda/\mu = \rho$. Άρα

$$\pi_n = c_1 + c_2\rho^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Προσδιορισμός c_1, c_2: Απο την 1η,

$$\lambda(c_1 + c_2) = \mu(c_1 + c_2\rho) \iff c_1 = c_1\rho \iff c_1 = 0.$$

Άρα $\pi_n = c_2\rho^n$ και αφού $\sum_n \pi_n = 1$

$$c_2 \sum_n \rho^n = 1 \iff c_2 \frac{1}{1-\rho} = 1 \iff c_2 = 1-\rho \iff \pi_n = (1-\rho)\rho^n.$$

Δ) (Generating function approach)

Έστω $\Pi(z) = \sum_{n\geq 0} \pi_n z^n$, $|z| < 1$.

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 z^0 = & \quad \mu\pi_1 z^0, \\ (\lambda+\mu)\pi_n z^n = & \quad \mu\pi_{n+1}z^n + \lambda\pi_{n-1}z^n,\ n > 0. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατ΄ά μέλη καταλήγουμε στην

$$\Pi(z)[(z-1)(1-\rho z)] = \pi_0(z-1) \iff \Pi(z) = \frac{\pi_0}{1-z\rho}.$$

Όμως $\Pi(1) = 1$ και επομένως $\pi_0 = 1-\rho$. Άρα

$$\Pi(z) = \frac{1-\rho}{1-z\rho} = (1-\rho)\sum_n \rho^n z^n = \sum_n (1-\rho)\rho^n z^n.$$

Επομένως $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$,

1. Αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα.

$$E(N) = \sum_n n\pi_n = \frac{d}{dz}\Pi(z)|_{z=1} = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{4}$$

2. Αναμενόμενος αριθμός πελατών στην ουρά: έστω $\bar{\pi}_0 = \pi_0 + \pi_1$, $\bar{\pi}_n = \pi_n$

$$E(N_q) = \sum_n n\bar{\pi}_n = \ldots = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{5}$$

3. Αναμενόμενος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα: Από νόμο του Little

$$E(W) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{6}$$

Ορισμός: Η χρονική περίοδος (BP : busy period) από την στιγμή που το σύστημα ήταν άδειο και ένας πελάτης φθάνει, μέχρι τη στιγμή που το σύστημα μένει άδειο πάλι για πρώτη φορά.

- $C_{n:}$ Ο χρόνος μέχρι να αδειάσει το σύστημα όταν υπάρχουν n πελάτες.
- Άρα $BP = C_1$. Ψαχνω την κατανομή της C_1, $c_1(t)$.

Τότε για $n > 0$

$$C_n = X + \begin{cases} C_{n+1}, & \textit{with prob. } \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \\ C_{n-1}, & \textit{with prob. } \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \end{cases}$$

με $X \equiv$ Χρόνος παραμονής στην κατάσταση n και $X \sim \exp(\lambda + \mu)$. Αν

$$c_n^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} c_n(t)dt, \; f_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t)dt = \frac{\lambda+\mu}{s+\lambda+\mu}.$$

Απο ιδιότητες *Laplace* μετασχηματισμών

$$\begin{aligned} c_n^*(s) = &\ \frac{\lambda+\mu}{s+\lambda+\mu}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}c_{n+1}^*(s) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}c_{n-1}^*(s)\right] \Longleftrightarrow \\ (s+\lambda+\mu)c_n^*(s) = &\ \lambda c_{n+1}^*(s) + \mu c_{n-1}^*(s). \end{aligned}$$

με γενική λύση

$$c_n^*(s) = d_1 x_1^n(s) + d_2 x_2^n(s),$$

όπου τα $x_{1,2}(s)$ με $x_1(s) \leq 1 < x_2(s)$, λύσεις της

$$\lambda x^2 - (s+\lambda+\mu)x + \mu = 0.$$

Αφού $0 \leq c_n^*(s) \leq 1$ πρέπει $d_2 = 0$. Επιπλέον μιας και $C_0 = 0$, τότε $c_0^*(s) = 1$. Επομένως $c_n(s) = x_1^n(s)$. Άρα,

$$\begin{aligned} c_1^*(s) = &\ x_1(s) = \frac{s+\lambda+\mu-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}, \\ E(BP) = &\ -\frac{d}{ds}c_1^*(s)|_{s=0} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας τον $c_1^*(s)$ θα έχουμε την κατανομή του χρόνου συνεχούς απασχόλησης

$$f_{BP}(t) = \frac{1}{t\sqrt{\rho}} e^{-(\lambda+\mu)t} I_1(2t\sqrt{\lambda\mu}), \ t > 0,$$

όπου I_1 η modified συνάρτηση Bessel 1ου τύπου,

$$I_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s/2)^{1+2m}}{m!(m+1)!}.$$

- Συστήματα επαναλαμβανόμενων αφίξεων: Εφαρμογές σε μοντελοποίηση τηλεφωνικών κέντρων, δικτύων Η/Υ, ασύρματων δικτύων...
- Αφίξεις: $Poisson(\lambda)$, Εξυπηρετήσεις: $\exp(\nu)$, Επαναλαμβανόμενες αφίξεις: $\exp(\mu)$.
- $N(t)$: Αριθμός πελατών στο retrial box την χ.στ. t.
- $C(t)$: Κατάσταση του server την χ.στ. t.
- Η $\{(C(t), N(t)), t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή διαδικασία, $E = \{0,1\} \times \{0,1,2,...\}$.
- $p_{i,n} = \lim_{t\to\infty} P(C(t) = i, N(t) = n)$.

Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\begin{aligned} p_{0,n}(\lambda + n\mu) &= \nu p_{1,n}, \\ p_{1,n}(\lambda + \nu) &= \lambda p_{0,n} + (n+1)\mu p_{0,n+1} + \lambda p_{1,n-1}. \end{aligned}$$

Πως θα λυθεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων διαφορών;

Έστω

$$P_0(z) = \sum_{n\geq 0} p_{0,n} z^n,\ P_1(z) = \sum_{n\geq 0} p_{1,n} z^n.$$

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} P_0(z)\lambda + P_0'(z)\mu z = &\ \nu P_1(z), \\ P_1(z)(\lambda - \lambda z + \nu) = &\ \lambda P_0(z) + \mu P_0'(z). \end{aligned}$$

Λύνοντας την 2η ως προς $P_1(z)$ και αντικαθιστώντας στην 1η θα έχουμε την ακόλουθη δ.ε. (χωριζομένων μεταβλητών)

$$P_0'(z) = \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho z)} P_0(z).$$

Άρα,

$$P_0(z) = \frac{const}{\mu(1-\rho z)^{\frac{\lambda}{\mu}}}.$$

Αντικαθιστώντας στην 1η,

$$\begin{aligned} P_1(z) = &\ P_0(z)\rho + P_0'(z)\frac{\mu z}{\nu} = P_0(z)\rho + P_0(z)\frac{\rho^2 z}{1-\rho z} = \frac{P_0(z)\rho}{1-\rho z} \\ = &\ \frac{\rho \times const}{\mu(1-\rho z)^{\frac{\lambda}{\mu}+1}}. \end{aligned}$$

const?

$$\sum_{n\geq 0}(p_{0,n}+p_{1,n}) = P_0(1)+P_1(1) = 1 \iff \frac{const}{\mu(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left[1+\frac{\rho}{1-\rho}\right] = 1$$

$$\iff const = \frac{const}{\mu(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\mu}+1}}.$$