Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Διγραμμικές και Τετραγωνικές μορφές

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 5

Διγραμμικές και Τετραγωνικές μορφές

5.1 Διγραμμικές μορφές

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια ειδική κατηγορία γραμμικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Ορισμός 5.1. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$. Μια συνάρτηση $H : V \times V \to \mathbb{F}$ ονομάζεται διγραμμική μορφή (bilinear form) εάν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή όταν η άλλη μεταβλητή διατηρείται σταθερή. Ισχύει δηλαδή:*

$$a)\ H(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda H(x_1, y) + H(x_2, y),\ x_1, x_2, y \in V, \lambda \in \mathbb{F}$$

$$b)\ H(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda H(x, y_1) + H(x, y_2),\ x, y_1, y_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(V)$ το σύνολο όλων των διγραμμικών μορφών επί του V.

Παράδειγμα 5.1. *Το εσωτερικό γινόμενο σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο είναι μια διγραμμική μορφή.*

Παράδειγμα 5.2. *Η συνάρτηση $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με*

$$H\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = 3a_1b_1 + 4a_1b_2 + 7a_2b_1 - a_2b_2$$

είναι μια διγραμμική μορφή.
Αν θέσουμε $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, *τότε η H γράφεται ως* $H = x^t \,\mathrm{A}\, y$.

Το άθροισμα και το βαθμωτό γινόμενο διγραμμικών μορφών στο σύνολο $\mathcal{B}(V)$ ορίζεται ως εξής:

$$(H_1 + H_2)(x, y) = H_1(x, y) + H_2(x, y)$$

$$(\lambda H_1)(x, y) = \lambda H_1(x, y),\ H_1, H_2 \in \mathcal{B}(V), \lambda \in \mathbb{F}.$$

Με τις πράξεις αυτές το σύνολο $\mathcal{B}(V)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

Στη συνέχεια θα δούμε την αναπαράσταση μιας διγραμμικής μορφής μέσω πίνακα. Έστω $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του διανυσματικού χώρου V και $H \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$. Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία $\mathrm{A}_{ij} = H(v_i, v_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Ορισμός 5.2. *Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται ο πίνακας της διγραμμικής μορφής H ως προς τη διατεταγμένη βάση B και συμβολίζεται με $[H]_B$.*

Παράδειγμα 5.3. *Έστω $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η διγραμμική μορφή*

$$H\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

και έστω $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^2$. Ο πίνακας A της H ως προς τη βάση B έχει στοιχεία $\mathrm{A}_{ij} = H(e_i, e_j)$. Είναι

$$\mathrm{A}_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathrm{A}_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathrm{A}_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \mathrm{A}_{22} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

άρα $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Παρατηρείστε ότι, όπως είδαμε, $H(x, y) = x^t \, \mathrm{A} \, y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2$.

5.2 Συμμετρικές διγραμμικές μορφές

Ορισμός 5.3. *Μια διγραμμική μορφή H επί ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται συμμετρική εάν $H(x, y) = H(y, x)$ για κάθε $x, y \in V$.*

Πρόταση 5.1. *Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $H \in \mathcal{B}(V)$, τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*
1) H είναι συμμετρική.
2) Για κάθε βάση B του V ο πίνακας $[H]_B$ είναι συμμετρικός.
3) Υπάρχει βάση B του V τέτοια ώστε ο πίνακας $[H]_B$ να είναι συμμετρικός.

Πόρισμα 5.1. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $H \in \mathcal{B}(V)$' Εάν η H είναι διαγωνιοποιήσιμη (δηλαδή υπάρχει βάση B του V τέτοια ώστε ο πίνακας $[H]_B$ να είναι διαγώνιος) τότε η H είναι συμμετρική.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Το πρόβλημα έγγυται στο σώμα $\mathbb{F}$.

Θεώρημα 5.1. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ χαρακτηριστικής[1] διάφορης του 2 (π.χ. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Τότε κάθε συμμετρική διγραμμική μορφή επί του V είναι διαγωνιοποιήσιμη.*

5.3 Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός 5.4. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$. Μια συνάρτηση $K : V \to \mathbb{F}$ ονομάζεται τετραγωνική μορφή εάν υπάρχει μια συμμετρική διγραμμική μορφή $H \in \mathcal{B}(V)$ τέτοια ώστε $K(x) = H(x, x)$ για κάθε $x \in V$.*

Εάν η χαρακτηριστική του σώματος $\mathbb{F}$ είναι διάφορη του 2 τότε υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ συμμετρικών διγραμμικών μορφών και τετραγωνικών μορφών. Πράγματι, αν $K(x) = H(x, x)$ για κάποια συμμετρική διγραμμική μορφή, τότε η H δίνεται ως

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\left[K(x + y) - K(x) - K(y)\right]$$

για κάθε $x, y \in V$.

Παράδειγμα 5.4. *(Ομογενή πολυώνυμα δευτέρου βαθμού πολλών μεταβλητών). Θεωρούμε μεταβλητές $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{F}$ όπου $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και αριθμούς a_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$. Ορίζουμε το πολυώνυμο*

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} t_i t_j.$$

Έστω $K : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ η τετραγωνική μορφή

$$K(c_1, c_2, \ldots, c_n) = f(c_1, c_2, \ldots c_n).$$

[1] Η χαρακτηριστική ενός σώματος $\mathbb{F}$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος n για τον οποίο ισχύει $n \cdot 1 = 0$, όπου 1 είναι η μονάδα του $\mathbb{F}$.

Αν B είναι η κανονική βάση του $\mathbb{F}^n$, τότε η συμμετρική διγραμμική μορφή που αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή K είναι η H με πίνακα $[H]_B = \mathrm{A}$ όπου

$$\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ \frac{1}{2}a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

Ας δούμε μια περίπτωση τριών μεταβλητών.
Έστω $f(t_1, t_2, t_3) = 3t_1^2 - t_2^2 + 8t_1t_2 - 6t_2t_3$ επί του $\mathbb{R}$.

$$\text{Έστω } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Θέτοντας}$$

$$H(x, y) = x^t \,\mathrm{A}\, y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

βλέπουμε ότι

$$f(t_1, t_2, t_3) = (t_1, t_2, t_3)\,\mathrm{A} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \qquad (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Ισχύει το εξής θεώρημα διαγωνιοποίησης συμμετρικών διγραμμικών μορφών.

Θεώρημα 5.2. *Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης, και έστω H μια συμμετρική διγραμμική μορφή επί του V. Τότε υπάρχε ορθοκανονική βάση B του V τέτοια ώστε ο πίνακας $[H]_B$ να είναι διαγώνιος.*

Πόρισμα 5.2. *Έστω K μια τετραγωνική μορφή επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του V και αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (όχι απαραίτητα διαφορετικοί) τέτοιοι ώστε αν*

$$V \ni x = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i, \quad s_i \in \mathbb{R}$$

τότε

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2.$$

Επιπλέον, αν H είναι η συμμετρική διγραμμική μορφή που καθορίζεται από την K, τότε ως B μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του V ώστε ο πίνακας $[H]_B$ να είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα 5.5. *Θεωρούμε το ομογενές πολυώνυμο βαθμού 2 επί του* $\mathbb{R}$

$$f(t_1, t_2) = 5t_1^2 + 2t_2^2 + 4t_1t_2.$$

Θα βρούμε μια βάση $B = \{x_1, x_2\}$ *του* $\mathbb{R}^2$ *και αριθμούς* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *τέτοιους ώστε αν* $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *και* $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = s_1x_1 + s_2x_2$*, τότε* $f(t_1, t_2) = \lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2$.
Έστω H *η συμμετρική διγραμμική μορφή που αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή* $f(t_1, t_2)$.
Αν Γ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^2$*, τότε* $[H]_\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$. *Θα βρούμε ορθογώνιο πίνακα* Q *τέτοιον ώστε ο* $\mathrm{Q}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{Q}$ *να είναι διαγώνιος.*
Πρώτα θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του A.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι* $f(t) = (t-6)(t-1)$ *με ιδιοτιμές* $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ *πολλαπλότητας 1.*
Βρίσκουμε ότι το $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *είναι ιδιοδιανύσματα μήκους 1.*
Επειδή τα x_1, x_2 *είναι κάθετα, η* $B = \{x_1, x_2\}$ *είναι μια ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^2$.
Θέτουμε $\mathrm{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Ο πίνακας* Q *είναι ορθογώνιος και* $\mathrm{Q}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *και επιπλέον είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης, συνεπώς*

$$[H]_B = \mathrm{Q}^t\,[H]_\Gamma\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα, για κάθε $x = s_1x_1 + s_2x_2 \in \mathbb{R}^2$ *είναι* $K(x) = 6s_1^2 + s_2^2$.
Συμπερασματικά, το πολυώνυμο $f(t_1, t_2)$ *ως προς την κανονική βάση* Γ *μετασχηματίζεται στο* $K(x) = K(s_1, s_2)$ *ως προς τη νέα βάση* $B = \{x_1, x_2\}$.

Άσκηση 5.1. *θεωρούμε την επιφάνεια* S *του* $\mathbb{R}^3$ *που ορίζεται από την εξίσωση*

$$3t_1^2 + 8t_1t_2 + 5t_2^2 - 2t_2t_3 + 2t_3^2 + 7t_1 - 2t_2 - t_3 + 10 = 0.$$

Η έκφραση αυτή είναι ως προς την κανονική βάση Γ *του* $\mathbb{R}^3$. *Να βρεθεί μια νέα ορθοκανονική βάση* B *του* $\mathbb{R}^3$ *τέτοια ώστε η επιφάνεια να περιγραφεί από απλούστερη εξίσωση.*

5.4 Ασκήσεις

Άσκηση 5.2. *Πιστοποιήστε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι διγραμμικές μορφές. Στη συνέχεια, υπολογίστε τον αντίστοιχο πίνακα της* H *ως προς τη δοθείσα βάση.*

a) $H = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = a_1b_1 - 2a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_3$ *με βάση*

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

b)Έστω $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *με βάση*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

και ορίζουμε $H : V \times V \to \mathbb{R}$ *με* $H(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{tr}(\mathrm{B})$.

Άσκηση 5.3. *Για τις ακόλουθες τεραγωνικές μορφές* K *επί του πραγματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο* V, *βρείτε μια συμμετρική διγραμμική μορφή* H *τέτοια ώστε* $K(x) = H(x, x)$ *για κάθε* $x \in V$. *Στη συνέχεια, βρείτε μια ορθοκανονική βάση* B *του* V *τέτοια ώστε ο πίνακας* $[H]_B$ *να είναι διαγώνιος.*

a) $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με* $K \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = -2t_1^2 + 4t_1t_2 + t_2^2.$

b) $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *με* $K \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 3t_1^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_1t_3.$

Βιβλιογραφία

[1] S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition Springer, 1997.

[2] S. H. Friedberg - A. J. Insel - L. E. Spence: *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, 2003.

[3] Y. Katznelson - Y. R, Katznelson: *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2008.

[4] S. Lipschutz - M. Lipson: *Linear Algebra*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, 2003.

[5] H. E. Rose: *Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach*, Birkhauser, 2002.

[6] F. Zhang: *Linear Algebra. Challenging Problems for Students*, 2nd Edition, The Johns Hopkings University Press, 2009.