Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Σ.Δ.Ε. Euler

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4.4 Επιλύσιμες μορφές γραμμικών Σ.Δ.Ε. με μη σταθερούς συντελεστές

4.4.1 $y^{(n)}(x) = g(x), \quad n \geq 1$

Αυτή η μορφή των Σ.Δ.Ε. επειδή είναι με σταθερούς συντελεστές μπορεί να αντιμετωπισθεί με την θεωρία που αναφέρεται σ' αυτήν την κατηγορία των Σ.Δ.Ε. Όμως, λύνεται και με n διαδοχικές ολοκληρώσεις, γιατί στηριζόμαστε στο γεγονός ότι $y^{(k)}(x) = \left(y^{(k-1)}(x)\right)'$, $k = 1, 2, ..., n$.

Παράδειγμα 24 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y'''(x) = 24x + cosx$.

Λύση $y'''(x) = 24x + cosx \Rightarrow \left(y''(x)\right)' = 24x + cosx$,

$y''(x) = \int (24x + cosx)dx + c_1 \Rightarrow y''(x) = 12x^2 + sinx + c_1$,

$\left(y'(x)\right)' = 12x^2 + sinx + c_1 \Rightarrow y'(x) = \int (12x^2 + sinx + c_1)dx + c_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = 4x^3 - cosx + c_1x + c_2, y(x) = \int (4x^3 - cosx + c_1x + c_2) + c_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = x^4 - sinx + c_1x^2 + c_2x + c_3$

4.4.2 Σ.Δ.Ε.Euler

Η Σ.Δ.Ε. Euler έχει την μορφή:

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(ax+b)y'(x) + a_0y(x) = g(x) \tag{4.26}$$

με $ax + b \neq 0$ και $a_k, k = 0, 1, ..., n-1$ σταθερές. Η ανωτέρω Σ.Δ.Ε. είναι με μη σταθερούς συντελεστές, αλλά μπορούμε πάντα να βρούμε την γενική λύση, ανεξάρτητα με την τάξη της, κάνοντας ένα κατάλληλο μετασχηματισμό. Έτσι, θέτουμε:

$$ax + b = e^{at} \Rightarrow adx = ae^{at}dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^{at}} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{ax+b} \tag{4.27}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (4.27) θα βρούμε τις παραγώγους του $y(x)$. Έτσι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{ax+b}\frac{d\tilde{y}}{dt}, \quad (ax+b)\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax+b}\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)=-\frac{a}{(ax+b)^2}\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{1}{ax+b}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\frac{dt}{dx}=$$

$$=-\frac{a}{(ax+b)^2}\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{1}{(ax+b)^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2},\quad (ax+b)^2\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{(ax+b)^2}\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{1}{(ax+b)^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\right)=$$

$$=\frac{2a^2}{(ax+b)^3}\frac{d\tilde{y}}{dt}-\frac{a}{(ax+b)^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{2a}{(ax+b)^3}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}+\frac{1}{(ax+b)^2}\frac{d^3\tilde{y}}{dt^3}\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{2a^2}{(ax+b)^3}\frac{d\tilde{y}}{dt}-\frac{3a}{(ax+b)^3}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}+\frac{1}{(ax+b)^3}\frac{d^3\tilde{y}}{dt^3},$$

$$(ax+b)^3\frac{d^3y}{dx^3}=2a^2\frac{d\tilde{y}}{dt}-3a\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}+\frac{d^3\tilde{y}}{dt^3}$$

$\vdots$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο τις παραγωγίσεις, αντικαθιστούμε στην δοθείσα μη ομογενή Σ.Δ.Ε. και την μετασχηματίζουμε σε μη ομογενή, ίδιας τάξης αλλά με σταθερούς συντελεστές, οπότε μπορούμε να βρούμε την γενική της λύση κατά τα γνωστά. Στην γενική λύση της προκύπτουσας δ.ε. θέτουμε λόγω της (4.27)

$$t=\frac{1}{a}ln(ax+b),$$

και έχουμε την γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. Euler.

Παράδειγμα 25 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$(x+2)^2y''(x)-(x+2)y'(x)+y(x)=3x+4$

Λύση
Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι Euler,οπότε θέτουμε:

$$x+2=e^t\Rightarrow dx=e^tdt\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{e^t}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x+2}$$

Υπολογίζουμε τις δύο πρώτες παραγώγους της $y(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\tilde{y}}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x+2}\frac{d\tilde{y}}{dt},\quad (x+2)\frac{dy}{dx}=\frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+2}\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)=-\frac{1}{(x+2)^2}\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{1}{x+2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\frac{dt}{dx}=$$

$$=-\frac{1}{(x+2)^2}\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{1}{(x+2)^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2},\quad (x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d\tilde{y}}{dt}+\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}$$

και αντικαθιστούμε στην δοθείσα Σ.Δ.Ε., οπότε έχουμε:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-\frac{d\tilde{y}}{dt}-\frac{d\tilde{y}}{dt}+\tilde{y}(t)=3e^t-2\Rightarrow\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-2\frac{d\tilde{y}}{dt}+\tilde{y}(t)=3e^t-2$$

Η ανωτέρω Σ.Δ.Ε. είναι με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Για να βρούμε την γενική της λύση, λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-2\frac{d\tilde{y}}{dt}+\tilde{y}(t)=0$$

Θέτουμε $\tilde{y}(t)=e^{rt}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$r^2-2r+1=0\Rightarrow(r-1)^2=0\Rightarrow\{r_1=r_2=1\}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι: $\tilde{y}_1(t)=e^t$ και $\tilde{y}_2(t)=te^t$ και η γενική λύση αυτής είναι:

$$\tilde{y}_0(t)=c_1e^t+c_2te^t.$$

Την μερική λύση της μη ομογενούς, θα την βρούμε με την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών, θεωρώντας ότι η μερική λύση θα είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των δύο Σ.Δ.Ε.:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-2\frac{d\tilde{y}}{dt}+\tilde{y}(t)=3e^t \text{ και } \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}-2\frac{d\tilde{y}}{dt}+\tilde{y}(t)=-2.$$

Επειδή $3e^t=e^{1t}[3cos(0t)+0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $1+0i=1$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας 2, η πρώτη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$\tilde{y}_{\mu 1}(t)=At^2e^t$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε., οπότε:

$$\tilde{y}'_{\mu 1}(t) = 2Ate^t + At^2e^t$$

$$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2e^t$$

$$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 1}(t) + \tilde{y}_{\mu 1}(t) = 3e^t \Rightarrow$$

$$2Ae^t + 4Ate^t + At^2e^t - 2(2Ate^t + At^2e^t) + At^2e^t = 3e^t \Rightarrow 2Ae^t = 3e^t \Rightarrow$$

$$A = \frac{3}{2}, \quad \tilde{y}_{\mu 1}(t) = \frac{3}{2}t^2e^t$$

Επίσης, επειδή $-2 = e^{0t}[-2cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $0 + 0i = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 0 και η δεύτερη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$\tilde{y}_{\mu 2}(t) = A$$

Οπότε:

$$\tilde{y}'_{\mu 2}(t) = 0 = \tilde{y}''_{\mu 2}(t)$$

$$\tilde{y}''_{\mu 2}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 2}(t) + \tilde{y}_{\mu 2}(t) = -2 \Rightarrow A = -2, \quad \tilde{y}_{\mu 2}(t) = -2$$

Η μερική λύση θα είναι το άθροισμα των δύο μερικών λύσεων:

$$\tilde{y}_{\mu}(t) = \frac{3}{2}t^2e^t - 2$$

Η γενική λύση:

$$\tilde{y}(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{3}{2}t^2e^t - 2 \xRightarrow{t=ln(x+2)}$$

$$y(x) = c_1(x+2) + c_2(x+2)ln(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)ln^2(x+2) - 2$$

Παράδειγμα 26 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.
$x^3y'''(x) - 3x^2y''(x) + 6xy'(x) - 6y(x) = 0$

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής Euler και για την λύση της θα θέσουμε:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

και

$$y'(x) = \frac{1}{x}\tilde{y}'(t) \Rightarrow xy'(x) = \tilde{y}'(t)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}\tilde{y}'(t) + \frac{1}{x^2}\tilde{y}''(t) \Rightarrow x^2y''(x) = \tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t)$$

$$y'''(x) = \frac{2}{x^3}\tilde{y}'(t) - \frac{3}{x^3}\tilde{y}''(t) + \frac{1}{x^3}\tilde{y}'''(t) \Rightarrow x^3y'''(x) = \tilde{y}'''(t) - 3\tilde{y}''(t) + 2\tilde{y}'(t)$$

Αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$\tilde{y}'''(t) - 3\tilde{y}''(t) + 2\tilde{y}'(t) - 3(\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t)) + 6\tilde{y}'(t) - 6\tilde{y}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'''(t) - 6\tilde{y}''(t) + 11\tilde{y}'(t) - 6\tilde{y}(t) = 0$$

Η προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. είναι με σταθερούς συντελεστές ομογενής και για να την λύσουμε θέτουμε: $\tilde{y}(t) = e^{rt}$, η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$r^3 + 6r^2 + 11r - 6 = 0 \Rightarrow \{r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3\}$$

Και η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$\tilde{y}(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \xRightarrow{t=lnx}$$

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

Παράδειγμα 27 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. $x^2y'' - xy' = -x + \dfrac{3}{x}$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής Euler και για την λύση της θα θέσουμε:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

και

$$y'(x) = \frac{1}{x}\tilde{y}'(t) \Rightarrow xy'(x) = \tilde{y}'(t)$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}\tilde{y}'(t) + \frac{1}{x^2}\tilde{y}''(t) \Rightarrow x^2y''(x) = \tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t)$$

Αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) = -e^t + 3e^{-t}$$

Η ανωτέρω Σ.Δ.Ε. είναι με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Για να βρούμε την γενική της λύση, λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή:

$$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) = 0$$

Θέτουμε $\tilde{y}(t) = e^{rt}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r(r-2) = 0 \Rightarrow \{r_1 = 0, r_2 = 2\}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι: $\tilde{y}_1(t) = 1$ και $\tilde{y}_2(t) = e^{2t}$ και η γενική λύση αυτής είναι:

$$\tilde{y}_0(t) = c_1 + c_2e^{2t}.$$

Την μερική λύση της μη ομογενούς, θα την βρούμε με την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών, θεωρώντας ότι η μερική λύση θα είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των δύο Σ.Δ.Ε.:

$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) = -e^t$ και $\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) = 3e^{-t}$.

Επειδή $-e^t = e^{1t}[(-1)cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $1 + 0i = 1$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 0 και η πρώτη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$\tilde{y}_{\mu 1}(t) = Ae^t$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε., οπότε:

$\tilde{y}'_{\mu 1}(t) = Ae^t$

$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) = Ae^t$

$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 1}(t) = -e^t \Rightarrow -Ae^t = -e^t \Rightarrow A = 1$

$\tilde{y}_{\mu 1}(t) = e^t$

Επίσης, επειδή $3e^{-t} = e^{-t}[3cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $-1 + 0i = -1$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 0 και η δεύτερη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$\tilde{y}_{\mu 2}(t) = Ae^{-t}$

Οπότε:

$\tilde{y}'_{\mu 2}(t) = -Ae^{-t}$

$\tilde{y}''_{\mu 2}(t) = Ae^{-t}$

$\tilde{y}''_{\mu 2}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 2}(t) = 3e^{-t} \Rightarrow 3Ae^{-t} = 3e^{-t} \Rightarrow A = 1$

$\tilde{y}_{\mu 2}(t) = e^{-t}$

Η μερική λύση θα είναι το άθροισμα των δύο μερικών λύσεων:

$\tilde{y}_{\mu}(t) = e^t + e^{-t}$

Η γενική λύση:

$\tilde{y}(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + e^t + e^{-t} \xRightarrow{t=lnx}$

$y(x) = c_1 + c_2 x^2 + x + \dfrac{1}{x}$

Παράδειγμα 28 Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. $x^2 y'' - xy' + y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής Euler και για την λύση της θα θέσουμε:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

και

$$y'(x) = \frac{1}{x}\tilde{y}'(t) \Rightarrow xy'(x) = \tilde{y}'(t)$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}\tilde{y}'(t) + \frac{1}{x^2}\tilde{y}''(t) \Rightarrow x^2y''(x) = \tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t)$$

Αντικαθιστούμε στην Σ.Δ.Ε. και έχουμε:

$$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = 2e^t + e^{-t} + 1$$

Η ανωτέρω Σ.Δ.Ε. είναι με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής. Για να βρούμε την γενική της λύση, λύνουμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή:

$$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = 0$$

Θέτουμε $\tilde{y}(t) = e^{rt}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow \{r_1 = r_2 = 1\}$$

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς είναι: $\tilde{y}_1(t) = e^t$ και $\tilde{y}_2(t) = te^t$ και η γενική λύση αυτής είναι:

$$\tilde{y}_0(t) = c_1e^t + c_2te^t.$$

Την μερική λύση της μη ομογενούς, θα την βρούμε με την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών, θεωρώντας ότι η μερική λύση θα είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των τριών Σ.Δ.Ε.:

$$\tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = 2e^t,\ \tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = e^{-t},\ \tilde{y}''(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = 1$$

Επειδή $2e^t = e^{1t}[2cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $1 + 0i = 1$ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 2 και η πρώτη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$$\tilde{y}_{\mu 1}(t) = At^2e^t$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, αντικαθιστούμε στην μη ομογενή Σ.Δ.Ε., απότε:

$\tilde{y}'_{\mu 1}(t) = 2Ate^t + At^2e^t$

$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2e^t$

$\tilde{y}''_{\mu 1}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 1}(t) + \tilde{y}_{\mu 1}(t) = 2e^t \Rightarrow A = 1$

$\tilde{y}_{\mu 1}(t) = t^2e^t$

Επίσης, επειδή $e^{-t} = e^{-t}[cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $-1 + 0i = -1$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 0 και η δεύτερη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$\tilde{y}_{\mu 2}(t) = Ae^{-t}$

Οπότε:

$\tilde{y}'_{\mu 2}(t) = -Ae^{-t}$

$\tilde{y}''_{\mu 2}(t) = Ae^{-t}$

$\tilde{y}''_{\mu 2}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 2}(t) + \tilde{y}_{\mu 2}(t) = e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$\tilde{y}_{\mu 2}(t) = \frac{1}{4}e^{-t}$

Επίσης, επειδή $1 = e^{0t}[cos(0t) + 0sin(0t)]$ και ο μιγαδικός αριθμός $0 + 0i = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η πολλαπλότητα θα είναι 0 και η τρίτη μερική λύση θα έχει την μορφή:

$\tilde{y}_{\mu 3}(t) = A$

Οπότε:

$\tilde{y}'_{\mu 3}(t) = 0$

$\tilde{y}''_{\mu 3}(t) = 0$

$\tilde{y}''_{\mu 3}(t) - 2\tilde{y}'_{\mu 3}(t) + \tilde{y}_{\mu 3}(t) = 1 \Rightarrow A = 1$

$\tilde{y}_{\mu 3}(t) = 1$

Η μερική λύση θα είναι το άθροισμα των δύο μερικών λύσεων:

$$\tilde{y}_{\mu}(t) = t^2 e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + 1$$

Η γενική λύση:

$$\tilde{y}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t^2 e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + 1 \xRightarrow{t=lnx}$$

$$y(x) = c_1 x + c_2 x lnx + x ln^2 x + \frac{1}{4x} + 1$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996