Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Βασικά θεωρήματα για τις γραμμικές Σ.Δ.Ε.

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4 Γραμμικές Σ.Δ.Ε. τάξης $n > 1$.

4.1 Γενικά θεωρήματα.

Οι γραμμικές Σ.Δ.Ε. τάξης $n > 1$ έχουν την μορφή:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (4.1)$$

όπου $a_i(x), i = 0, 1, ..., n$ και $g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $a_n(x) \neq 0$.

Οι συναρτήσεις $a_i(x), i = 0, 1, ..., n$ λέγονται **συντελεστές** και εάν έστω και μία από αυτές δεν είναι σταθερή συνάρτηση, η Σ.Δ.Ε. (4.1) λέγεται **γραμμική Σ.Δ.Ε. με μη σταθερούς συντελεστές**. Αν όλοι οι συντελεστές είναι σταθερές συναρτήσεις, τότε η Σ.Δ.Ε. (4.1) λέγεται **γραμμική Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές**. Αν η συνάρτηση $g(x)$ στην (4.1) είναι μηδέν, τότε η Σ.Δ.Ε. (4.1) λέγεται **ομογενής γραμμική Σ.Δ.Ε.** ενώ αν είναι διάφορη από το μηδέν, τότε λέγεται **μη ομογενής γραμμική Σ.Δ.Ε.** Η Σ.Δ.Ε. (4.1) με τις αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (4.2)$$

όπου $x_0 \in I$ και $y_i, i = 0, 1, ..., n-1$, δοσμένες σταθερές, αποτελεί ένα **Π.Α.Τ.**

Θεώρημα 4.1 Με τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει για την Σ.Δ.Ε. (4.1), για κάθε $x_0 \in I$, υπάρχει μια μοναδική λύση του Π.Α.Τ. (4.1),(4.2).

Ορισμός 4.1 Ένα σύνολο $S = \{f_1(x), ..., f_n(x)\}$, n συναρτήσεων, λέγεται **γραμμικώς ανεξάρτητο** σε κάποιο διάστημα I, αν από την ισότητα:
$c_1 f_1(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$ έπεται ότι $c_1 = ... = c_n = 0$. Αν όμως κάποιο από τα $c_i, i = 1, ..., n$ δεν είναι μηδέν, τότε το σύνολο S λέγεται **γραμμικώς εξαρτημένο**.

Ορισμός 4.2 Έστω ένα σύνολο n συναρτήσεων, $S = \{f_1(x), ..., f_n(x)\}$, που η κάθε μία εξ αυτών είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον $n-1$ φορές.
Ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων αυτών λέγεται η ορίζουσα:

$$W(f_1(x), ..., f_n(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Θεωρούμε την ομογενή Σ.Δ.Ε. (4.1), δηλαδή:

$$L(y(x)) = a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{4.3}$$

όπου $a_i(x), i = 0, 1, ..., n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $a_n(x) \neq 0$.

Θεώρημα 4.2 Αν οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1, ..., m$ είναι λύσεις της Σ.Δ.Ε. (4.3) και $c_i, i = 1, ..., m$ είναι αυθέρετες σταθερές, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός αυτών, δηλαδή η συνάρτηση $c_1y_1(x) + ... + c_my_m(x)$, είναι επίσης λύση της (4.3).

Απόδειξη. Επειδή οι συναρτήσεις είναι λύσεις της Σ.Δ.Ε. (4.3), θα ισχύει:

$$L(y_i(x)) = 0, i = 1, ..., m \tag{4.4}$$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή L, θα έχουμε:

$$L(c_1y_1(x)+...+c_my_m(x)) = c_1L(y_1(x))+...+c_mL(y_m(x)) = 0, \text{ λόγω της (4.4).}$$

Δηλαδή η συνάρτηση $c_1y_1(x) + ... + c_my_m(x)$ είναι λύση της (4.3). □

Θεώρημα 4.3 Έστω ότι οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1, ..., n$ είναι n λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3), για $x \in I \subset \mathbb{R}$. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν η ορίζουσα Wronski αυτών είναι διάφορη από το μηδέν για κάθε $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $W[y_1(x), ..., y_n(x)] \neq 0, \forall x \in I$. Θα δείξουμε ότι οι $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό αυτών ίσο με το μηδέν. Δηλαδή:

$$c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x) \tag{4.5}$$

Παραγωγίζοντας την (4.5) $n-1$ φορές, προκύπτει το κάτωθι ομογενές γραμμικό σύστημα, n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$c_1y_1(x) + ... + c_ny_n(x) = 0$$

$$c_1y_1'(x) + ... + c_ny_n'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$

Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι η ορίζουσα
Wronski $W[y_1(x), ..., y_n(x)] \neq 0, \forall x \in I$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική. Δηλαδή:

$$c_1 = ... = c_n = 0 \tag{4.6}$$

Η (4.5), σε συνδυασμό με την (4.6), δηλώνει ότι οι $y_i(x), i = 1, ..., n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
Αντίστροφα, έστω ότι οι $y_i(x), i = 1, ..., n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, θα δείξουμε ότι $W[y_1(x), ..., y_n(x)] \neq 0, \forall x \in I$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in I$, τέτοιο ώστε $W[y_1(x_0), ..., y_n(x_0)] = 0$. Σχηματίζουμε το κάτωθι γραμμικό σύστημα των n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + ... + c_n y_n(x_0) = 0 \\ &c_1 y_1'(x_0) + ... + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι ίση με μηδέν
$W[y_1(x_0), ..., y_n(x_0)] = 0$, το σύστημα έχει μια μη μηδενική λύση:
$(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0)$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{4.8}$$

η οποία είναι λύση της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3), αφού είναι γραμμικός συνδυασμός n λύσεων αυτής και επειδή ισχύουν οι συνθήκες (4,7), έπεται ότι η $y(x)$ όπως δίνεται από την (4.8) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0.$

Ως γνωστόν, η μοναδική λύση της ομογενούς γραμμικής Σ.Δ.Ε. με ομογενείς αρχικές συνθήκες είναι η μηδενική, άρα η $y(x)$ όπως δίνεται από την (4.8), είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή:

$c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) = 0$

και όλες οι σταθερές δεν είναι μηδέν. Επομένως οι συναρτήσεις $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες, άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Στο άτοπο καταλήξαμε επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει $x_0 \in I$, τέτοιο ώστε $W[y_1(x_0), ..., y_n(x_0)] = 0$. Άρα $W[y_1(x), ..., y_n(x)] \neq 0, \forall x \in I$. □

Παρατήρηση 4.1 Η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1, ..., n$ είναι λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3) χρησιμοποιήθηκε μόνο στην μία κατεύθυνση της απόδειξης του θεωρήματος. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεν είναι λύσεις της (4.3), αλλά τυχαίες γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις, δεν συνεπάγεται ότι $W[y_1(x), ..., y_n(x)] \neq 0$.

***Θεώρημα 4.4*(Θεώρημα του Liouville)** Έστω $x_0 \in I$ και $y_i(x), i = 1, ..., n$, n λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3). Τότε, ισχύει:

$$W[y_1(x), ..., y_n(x)] = W[y_1(x_0), ..., y_n(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt}, \quad \forall x \in I.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα πρώτα για την Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης:

$$L(y(x)) = a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{4.9}$$

Θεωρούμε την ορίζουσα Wronski δύο λύσεων $y_1(x), y_2(x)$ της (4.9)

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

και την παράγωγο αυτής:

$$W'[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

Η πρώτη ορίζουσα μηδενίζεται γιατί έχει δύο γραμμές ίδιες. Αφού οι $y_1(x), y_2(x)$ είναι λύσεις της (4.9), θα την ικανοποιούν, οπότε στην δεύτερη γραμμή της (4.10) αντικαθιστούμε τις δεύτερες παραγώγους από την (4.9):

$$W'[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1'(x) - \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1(x) & -\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2'(x) - \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}y_2(x) \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή της ανωτέρω ορίζουσας με $\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ και προσθέτουμε στην δεύτερη, οπότε η ορίζουσα μένει ίδια και προκύπτει:

$$W'[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \Rightarrow W'[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} W[y_1(x), y_2(x)]$$

Η Σ.Δ.Ε. στην οποία καταλήξαμε είναι χωριζομένων μεταβλητών, η λύση της οποίας μας δίνει:

$$(lnW[y_1(x), y_2(x)])_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt \Rightarrow W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1(x_0), y_2(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt}$$

Για την Σ.Δ.Ε. n-στης τάξης (4.3), εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο:

$$W(y_1(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$W'(y_1(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$W'(y_1(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Αντικαθιστούμε το κάθε στοιχείο της τελευταίας γραμμής της ορίζουσας από την Σ.Δ.Ε. (4.3), αφού είναι λύση της, με $-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y_k^{(i)}(x), k = 1, 2, ..., n,$ πολλαπλασιάζουμε κάθε γραμμή της προκύπτουσας ορίζουσας με κατάλληλη συνάρτηση και προσθέτουμε στην τελευταία γραμμή, οπότε επειδή η ορίζουσα μηδενίζεται όταν έχει δύο γραμμές ίδιες, προκύπτει:

$$W'(y_1(x),...,y_n(x)) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$W'(y_1(x),...,y_n(x)) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}W(y_1(x),...,y_n(x))$$

Η Σ.Δ.Ε. που καταλήξαμε είναι χωριζομένων μεταβλητών, ίδια με την προηγούμενη, άρα θα έχει την ζητούμενη σχέση για λύση:

$$W[y_1(x),...,y_n(x)] = W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt}. \qquad \square$$

Παρατήρηση 4.2 Από τον τύπο του Liouville προκύπτει ότι η ορίζουσα Wronski ή δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I, ή μηδενίζεται παντού στο I.

Παρατήρηση 4.3 Αν οι λύσεις $y_i(x), i = 1,...,n$ της (4.3) μηδενίζονται σε ένα σημείο $x_0 \in I$, δηλαδή $y_i(x_0) = 0, i = 1,...,n$, τότε $W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)] = 0$, οπότε $W[y_1(x),...,y_n(x)] = 0, \forall x \in I$, άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Παρατήρηση 4.4 Αν οι λύσεις $y_i(x), i = 1,...,n$ της (4.3) έχουν μηδενική κάποια παράγωγο, έστω την $k, k = 1,...,n-1$, σε ένα σημείο $x_0 \in I$, δηλαδή $y_i^{(k)}(x_0) = 0, i = 1,...,n$, τότε $W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)] = 0$, οπότε $W[y_1(x),...,y_n(x)] = 0, \forall x \in I$, άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Θεώρημα 4.5 Έστω $y_i(x), i = 1,...,n$, n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3) στο $I \subset \mathbb{R}$. Τότε κάθε άλλη λύση της ομογενούς (4.3) στο I, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των n αυτών λύσεων. (Δηλαδή οι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3) αποτελούν βάση στο σύνολο των λύσεων αυτής στο I και λέμε ότι αποτελούν **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3)).

Απόδειξη. Έστω $y(x)$ μια τυχαία λύση της (4.3) στο I και $x_0 \in I$ και

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Σχηματίζουμε το μη ομογενές γραμμικό σύστημα

$$c_1y_1(x_0) + ... + c_ny_n(x_0) = y_0$$

$$
\begin{aligned}
&c_1 y_1'(x_0) + ... + c_n y_n'(x_0) = y_1 \\
&\vdots \\
&c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Επειδή οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1, ..., n$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3), η ορίζουσα Wronski αυτών, που είναι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος, είναι διάφορη από το μηδέν, δηλαδή $W[y_1(x_0), ..., y_n(x_0)] \neq 0$, το σύστημα έχει μια μη μηδενική λύση: $(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0)$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι λύση της (4.3), αφού είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων αυτής και λόγω του (4.11) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$$u(x_0) = y_0, u'(x_0) = y_1, ..., u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

οπότε από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων, θα έχουμε:

$$y(x) = u(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

Άρα, αν $y_i(x), i = 1, ..., n$, είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Σ.Δ.Ε. (4.3) στο $I \subset \mathbb{R}$, τότε η γενική λύση αυτής είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών. $\square$

Παρατήρηση 4.5 Από το θεμελιώδες σύνολο λύσεων μιας Σ.Δ.Ε. μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη Σ.Δ.Ε. της οποίας είναι λύσεις, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα:

$$
\begin{vmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y(x) \\
y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y'(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x)
\end{vmatrix} = 0
$$

ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης.

Παράδειγμα 1 Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = 1$ και $y_2(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$, είναι λύσεις της Σ.Δ.Ε. $yy'' + (y')^2 = 0$. Δείξτε ακόμα ότι η $y_3(x) = c_1 + c_2\sqrt{x}$ δεν είναι πάντα λύση αυτής. Δικαιολογείστε.

Λύση: Επειδή $y_1(x) = 1, y_1'(x) = y_1''(x) = 0$, οπότε: $y_1y_1'' + (y_1')^2 = 0 + 0 = 0$, δηλαδή η $y_1(x) = 1$ είναι λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε.
Επίσης, επειδή $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}, y_2'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, y_2''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ και

$$y_2y_2'' + (y_2')^2 = x^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}x^{-1}\right) + \left(\frac{1}{4}x^{-1}\right) = 0$$

και η $y_2(x) = \sqrt{x}$ είναι λύση της Σ.Δ.Ε. Για την $y_3(x) = c_1 + c_2\sqrt{x}$, έχουμε:
$y_3'(x) = \dfrac{1}{2}c_2x^{-\frac{1}{2}}, y_3''(x) = -\dfrac{1}{4}c_2x^{-\frac{3}{2}}$, οπότε:

$$y_3y_3'' + (y_3')^2 = \left(c_1 + c_2x^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{c_2}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{c_2}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{c_1c_2}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{c_2^2}{4}x^{-1}\right) + \left(\frac{c_2^2}{4}x^{-1}\right) = -\frac{c_1c_2}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

που δεν είναι πάντα μηδέν.

Η συνάρτηση $y_3(x) = c_1 + c_2\sqrt{x}$, παρ' όλο, που είναι γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων της Σ.Δ.Ε. δεν είναι πάντα λύση της ίδιας Σ.Δ.Ε., διότι η Σ.Δ.Ε. αυτή δεν ειναι γραμμική.

Παράδειγμα 2 Να βρείτε την γραμμική Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης, που έχει για θεμελιώδες σύνολο λύσεων τις συναρτήσεις: $\{x, e^{2x}\}$.

Λύση:
(1ος τρόπος)
Για να βρούμε τη Σ.Δ.Ε. που ζητείται, αρκεί να αναπτύξουμε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x & e^{2x} & y(x) \\ 1 & 2e^{2x} & y'(x) \\ 0 & 4e^{2x} & y''(x) \end{vmatrix} = 0. \text{ Οπότε:}$$

$$y''(x)\begin{vmatrix} x & e^{2x} \\ 1 & 2e^{2x} \end{vmatrix} - y'(x)\begin{vmatrix} x & e^{2x} \\ 0 & 4e^{2x} \end{vmatrix} + y(x)\begin{vmatrix} 1 & 2e^{2x} \\ 0 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)e^{2x}y''(x) - 4xe^{2x}y'(x) + 4e^{2x}y(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(2x-1)y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 0$$

(2ος τρόπος)
Αφού οι συναρτήσεις $\{x, e^{2x}\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων, η γενική λύση της δ.ε. θα έχει τη μορφή $y = c_1x + c_2e^{2x}$. Παραγωγίζουμε δύο φορές:

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 e^{2x} \\ y' = c_1 + 2c_2 e^{2x} \\ y'' = 4c_2 e^{2x} \end{cases}$$
Απαλοίφοντας τις σταθερές από τις τρεις εξισώσεις προκύπτουν

$$\begin{cases} y = c_1 x + \dfrac{y''}{4} \\ y' = c_1 + \dfrac{y''}{2} \Rightarrow c_1 = y' - \dfrac{y''}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad y = (y' - \frac{y''}{2})x + \frac{y''}{4}$$
$\Rightarrow -2xy'' + y'' + 4xy' - 4y = 0 \Rightarrow (1-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$

Παράδειγμα 3 Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων των Σ.Δ.Ε :

$(i) \quad y''(x) - y(x) = 0, \quad y_1(x) = coshx, y_2(x) = sinhx$

$(ii) \quad x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0, \ x > 0, \quad y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-2}$

Λύση :

(i) Παρατηρούμε ότι $y_1''(x) - y_1(x) = coshx - coshx = 0$ και
$y_2''(x) - y_2(x) = sinhx - sinhx = 0$.
Δηλαδή οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε. $y''(x) - y(x) = 0$.
Επίσης : $\ y_1'(x) = sinhx, y_2'(x) = coshx$
Επειδή η ορίζουσα Wronski αυτών είναι :
$\begin{vmatrix} coshx & sinhx \\ sinhx & coshx \end{vmatrix} = cosh^2x - sinh^2x = 1 \neq 0$, είναι γραμμικές ανεξάρτητες, άρα αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της δ.ε.

(ii) Παρατηρούμε ότι $x^2y_1''(x) + xy_1'(x) - 4y_1(x) = 4x^2 - 4x^2 = 0$ και
$x^2y_2''(x) + xy_2'(x) - 4y_2(x) = 6x^{-2} - 2x^{-2} - 4x^{-2} = 0$.
Δηλαδή οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε.
$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0$.
Επίσης : $\ y_1'(x) = 2x, y_2'(x) = -2x^{-3}$
Επειδή η ορίζουσα Wronski αυτών είναι :
$\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1} - 2x^{-1} = -4x^{-1} \neq 0$, είναι γραμμικές ανεξάρτητες, άρα αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της δ.ε.

Παράδειγμα 4 Να δικαιολογείσετε αν το σύνολο $\{cosx, sin2x\}$, $x \in \mathbb{R}$ μπορεί να είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων μιας γραμμικής Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα Wronski αυτών είναι:
$\begin{vmatrix} cosx & sin2x \\ -sinx & 2cos2x \end{vmatrix} = 2cosxcos2x + sinxsin2x = 2cosx(cos^2x - sin^2x) + 2sin^2xcosx =$

$= 2cos^3x - 2cosxsin^2x + 2cosxsin^2x = 2cos^3x \neq 0$, για
$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}, k = 0, 1, 2, ...$
Άρα δεν μπορούν να είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων μιας γραμμικής Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης.

Παράδειγμα 5 Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε.:
$y''(x) + q(x)y(x) = 0$, όπου $q(x)$ συνεχής συνάρτηση για $x \in I \subset \mathbb{R}$, και $W[y_1, y_2](x)$ είναι η ορίζουσα Wronski αυτών, να δειχθεί ότι $W[y_1, y_2](x) = c$, c : σταθερά, $\forall x \in I$.

Λύση
(1ος τρόπος)
Οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ θα ικανοποιούν τη δοθείσα δ.ε. άρα:
$\begin{cases} y_1''(x) + q(x)y_1(x) = 0 \\ y_2''(x) + q(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$
Πολλαπλασιάζοντας με $y_2(x)$ την πρώτη και με $y_1(x)$ την δεύτερη προκύπτει:
$\begin{cases} y_1''(x)y_2(x) + q(x)y_1(x)y_2(x) = 0 \\ y_2''(x)y_1(x) + q(x)y_2(x)y_1(x) = 0 \end{cases}$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε:
$y_1''(x)y_2(x) - y_2''(x)y_1(x) = 0 \Rightarrow W'[y_1, y_2](x) = 0 \Rightarrow W[y_1, y_2](x) = c,$

(2ος τρόπος)
Η ορίζουσα Wronski αυτών είναι:
$W[y_1, y_2](x) = y_1y_2' - y_2y_1'$. Παραγωγίζοντας έχουμε:
$W'[y_1, y_2](x) = y_1y_2'' - y_1''y_2$. Αντικαθιστούμε την δεύτερη παράγωγο απ' τις δ.ε., οπότε:
$W'[y_1, y_2](x) = y_1(-q(x)y_2) - (-q(x)y_2)y_1 = -q(x)y_1y_2 + q(x)y_1y_2 = 0$
Άρα: $W'[y_1, y_2](x) = 0 \Rightarrow W[y_1, y_2](x) = c$.

Παράδειγμα 6 Δίνεται η Σ.Δ.Ε.: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \ (*)$

όπου $p(x), q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in I \subset \mathbb{R}$. Αν $y_1(x)$ είναι μια λύση αυτής να δείξετε ότι μια άλλη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση αυτής είναι:
$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$

Λύση

Η $y_1(x)$ είναι λύση της $(*)$ οπότε θα την ικανοποιεί δηλαδή:
$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0.$ (1)

Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι η $y_2(x)$ είναι λύση της $(*)$.
Παραγωγίζουμε 2 φορές ως προς x, οπότε προκύπτει:

$$y_2'(x) = y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + y_1(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}$$
$$y_2''(x) = y_1''(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + y_1'(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} - y_1'(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} - p(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)} \Rightarrow$$
$$y_2''(x) = y_1''(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx - p(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)}$$

Αντικαθιστούμε στο πρώτο μέλος της $(*)$, οπότε

$$y_1''(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx - p(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)} + p(x)y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + p(x) \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)} +$$
$+q(x)y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = 0$, λόγω της (1), δηλαδή η $y_2(x)$ είναι λύση της $(*)$. Επίσης, η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix} =$$
$$= y_1(x)y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + e^{-\int p(x)dx} - y_1(x)y_1'(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx =$$
$$= e^{-\int p(x)dx} \neq 0,$$
δηλαδή είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996