Τίτλος Μαθήματος: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Ενότητα: Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης ανώτερου βαθμού, ορθογώνιες τροχιές

Όνομα Καθηγητή: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

2.7 Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ανώτερου βαθμού

Η μορφή των δ.ε. πρώτης τάξης ανώτερου βαθμού, είναι $f(x,y,y')=0$ και θέτοντας $y'=p$ μπορούν να γραφούν ως

$$f(x,y,p)=0 \tag{2.39}$$

Θα αναφέρουμε κάποιους τρόπους εύρεσης λύσης της ανωτέρω Σ.Δ.Ε.

1) Αν η Σ.Δ.Ε. (2.39) επιλύεται ως προς p, τότε γράφεται στην μορφή:

$$\Big(p-f_1(x,y)\Big)\Big(p-f_2(x,y)\Big)...\Big(p-f_k(x,y)\Big)=0$$

και η λύση της ανάγεται στην επίλυση k Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού, που τις λύνουμε κατά τα γνωστά, και το γενικό ολοκλήρωμα της δοθείσας θα γράφεται:

$$\phi_1(x,y,c)\phi_2(x,y,c)...\phi_k(x,y,c)=0,$$

όπου $\phi_i(x,y,c), i=1,...,k$ είναι το γενικό ολοκλήρωμα της $(p-f_i(x,y))$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 48 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $(y')^2-x(x+y)y'+x^3y=0$

Λύση

Θέτουμε $y'=p$, οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$p^2-x(x+y)p+x^3y=0 \Rightarrow p_{1,2}=\frac{x(x+y)\pm\sqrt{x^2(x+y)^2-4x^3y}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2}=\frac{x(x+y)\pm x(x-y)}{2}\Rightarrow\begin{cases}p_1=x^2\\ p_2=xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=x^2\\ \dfrac{dy}{dx}=xy\end{cases}\overset{X.M.}{\Longrightarrow}\begin{cases}3y=x^3+c\\ y=ce^{\frac{x^2}{2}}\end{cases}$$

και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι: $(3y-x^3-c)(y-ce^{\frac{x^2}{2}})=0$.

Παράδειγμα 49 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0, \quad p=y'$.

Λύση

Εκτελώντας τις πράξεις στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνουμε:

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \Rightarrow$$
$$xp(yp + x) + x(yp + x) + y(yp + x) = 0 \Rightarrow$$
$$(yp + x)(xp + x + y) = 0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε δύο Σ.Δ.Ε.:

$$yp + x = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} + x = 0 \overset{X.M.}{\Longrightarrow} \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c$$

Και

$$xp + x + y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + x + y = 0 \Rightarrow xdy + (x + y)dx = 0,$$

η οποία είναι ακριβής, διότι $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial (x+y)}{\partial y}$, οπότε το γενικό της ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_0^x (t + y)dt = c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + xy = c \Rightarrow x^2 + 2xy = c$$

Το γενικό ολοκλήρωμα της δοθείσας Σ.Δ.Ε. θα δίνεται από το γινόμενο:

$$(x^2 + y^2 - c)(x^2 + 2xy - c) = 0.$$

Παράδειγμα 50 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $xy(y')^2 + (x + y)y' + 1 = 0, \quad p = y'$.

Λύση

Θέτουμε $y' = p$, οπότε η δοθείσα Σ.Δ.Ε. γίνεται:

$$xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-(x + y) \pm \sqrt{(x + y)^2 - 4xy}}{2xy} \Rightarrow$$

$$p_{1,2} = \frac{-(x + y) \pm (x - y)}{2xy} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{-2y}{2xy} = -\dfrac{1}{x} \\ p_2 = \dfrac{-2x}{2xy} = -\dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -lnx + c_1 \\ \dfrac{y^2}{2} = -x + c_2 \end{cases}$$

και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι: $\Big(y+lnx+c_1\Big)\Big(\dfrac{y^2}{2}+x+c_2\Big) = 0.$

Παράδειγμα 51 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $p^3 + p^2(3y - 2x) - 6pxy = 0, \quad p = y'$.

Λύση

Εκτελώντας τις πράξεις στην δοθείσα Σ.Δ.Ε. παίρνουμε:

$$p\Big[p^2 + (3y - 2x)p - 6xy\Big] = 0 \Rightarrow p\Big[p(p - 2x) + 3y(p - 2x)\Big] = 0 \Rightarrow$$

$$p(p - 2x)(p + 3y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 2x \\ p = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y' = 2x \\ y' = -3y \end{cases} \begin{cases} y = c \\ y = x^2 + c \\ y = ce^{-3x} \end{cases}$$

και η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. είναι: $(y-c)(y-x^2-c)(y-ce^{-3x}) = 0.$

2) Αν η Σ.Δ.Ε. (2.39) επιλύεται ως προς y και παίρνει τη μορφή:

$$y = x\phi(p) + g(p), \qquad p = y' \tag{2.40}$$

Η Σ.Δ.Ε. αυτής της μορφής λέγεται **Σ.Δ.Ε. Lagrange**. Για να την λύσουμε, την παραγωγίζουμε ως προς x και καταλήγουμε σε μια Σ.Δ.Ε. γραμμική ως προς $x(p)$, την οποία λύνουμε. Την τιμή του $x(p)$, που βρίσκουμε την βάζουμε στην (2.40) και έτσι παίρνουμε ένα ζευγάρι συναρτήσεων που αποτελούν την λύση σε παραμετρική μορφή. Αν μπορέσουμε να απαλείψουμε την παράμετρο p βρίσκουμε την λύση σε καρτεσιανή μορφή. Πράγματι:

$$p = \phi(p) + [x\phi'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx} \Rightarrow \phi(p) - p + [x\phi'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\phi(p) - p]\frac{dx}{dp} + x\phi'(p) = -g'(p)$$

Η τελευταία Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική, η οποία επιλύεται αν $\phi(p) - p \neq 0$. Οι τιμές του p τις οποίες παίρνουμε από την ισότητα $\phi(p) = p$, αν τις βάλουμε στην (2.40) μας δίνουν τις ιδιάζουσες λύσεις της Σ.Δ.Ε. .

Παράδειγμα 52 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε.: $y = x + 3p^2 - 2p^3, p = y'$.

Λύση

Παραγωγίζουμε τη δοθείσα ως προς x, και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι $p = y'$ έχουμε:

$$p = 1 + (6p - 6p^2)\frac{dp}{dx} \Rightarrow 1 - p + 6p(1-p)\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow (1-p)\left[1 + 6p\frac{dp}{dx}\right] = 0$$

Οπότε:

$$1 + 6p\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow dx + 6pdp = 0 \Rightarrow x = c - 3p^2 \quad (1)$$

Η δοθείσα λόγω της (1) γίνεται:

$$y = c - 2p^3 \quad (2)$$

Οι ισότητες (1) και (2) δίνουν την γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε. σε παραμετρική μορφή. Από την ισότητα

$$1 - p = 0 \Rightarrow p = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του p στην αρχική Σ.Δ.Ε. και παίρνουμε την $y = x + 1$, η οποία είναι ιδιάζουσα λύση αυτής.

Παράδειγμα 53 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $2yy' = x[(y')^2 + 4]$.

Λύση

Θέτουμε $y' = p$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$2yp = x(p^2 + 4) \Rightarrow y = \frac{x(p^2+4)}{2p} \Rightarrow y = x\left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p}\right)$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. της μορφής Lagrange με $f(p) = \dfrac{p^2+4}{2p}$ και $g(p) = 0$.

Παραγωγίζουμε λοιπόν ως προς x και έχουμε:

$$p=\frac{p}{2}+\frac{2}{p}+\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}\Rightarrow\frac{2}{p}-\frac{p}{2}+x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow$$
$$\frac{4-p^2}{2p}+x\frac{(p^2-4)}{2p^2}\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow\left(\frac{4-p^2}{2p}\right)\left(1-\frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right)=0$$

Η γενική λύση σε παραμετρική μορφή θα βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$1-\frac{x}{p}\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow\frac{dx}{x}-\frac{dp}{p}=0\Rightarrow ln|x|-ln|p|=c\Rightarrow x=pc$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική:

$$y=\frac{pc(p^2+4)}{2p}\Rightarrow y=\frac{c(p^2+4)}{2}$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις βρίσκουμε την γενική λύση σε καρτεσιανή μορφή, διότι αφού: $p=\dfrac{c}{x}$, παίρνουμε:

$$y=\frac{c\left(\dfrac{c^2}{x^2}+4\right)}{2}\Rightarrow 2x^2y=c(c^2+4x^2)$$

Η ιδιάζουσα λύση προκύπτει από την σχέση $p^2=4$, ή $f(p)=p$, δηλαδή

$$\frac{p^2+4}{2p}=p\Rightarrow 2p^2=p^2+4\Rightarrow p^2=4\Rightarrow p=\pm 2$$

και την αντικατάσταση στην αρχική:

$$y=\frac{8x}{\pm 4}\Rightarrow y=\pm 2x.$$

Παράδειγμα 54 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y=x(1+y')+(y')^2$.

Λύση

Θέτουμε $y'=p$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$y=x(1+p)+p^2$$

η οποία είναι Σ.Δ.Ε. της μορφής Lagrange με $f(p)=1+p$ και $g(p)=p^2$.

Παραγωγίζουμε λοιπόν ως προς x και έχουμε:

$p = 1 + p + (x + 2p)\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow dx + (x + 2p)dp = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ η οποία είναι γραμμική ως προς $x(p)$. Οπότε έχουμε:

$(e^p x)' = -2pe^p \Rightarrow e^p x = -2pe^p + 2e^p + c \Rightarrow x = 2 - 2p + ce^{-p}$

και αντικαθιστώντας στην αρχική:

$y = 2(1 + p)(1 - p) + ce^{-p}(1 + p) + p^2$

Οπότε η λύση σε παραμετρική μορφή είναι:

$$\begin{cases} x = 2 - 2p + ce^{-p} \\ y = 2 - p^2 + ce^{-p}(1 + p) \end{cases}$$

Παρατήρηση 1 Η Σ.Δ.Ε. της μορφής:

$$y = xp + g(p), \qquad p = y' \tag{2.41}$$

ονομάζεται **Σ.Δ.Ε. Clairaut**. Παρατηρούμε ότι ανήκει στη μορφή (2.40) για $\phi(p) = p$. Για να την λύσουμε, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία. Παραγωγίζουμε ως προς x, θέτουμε $y' = p$, οπότε προκύπτει:

$p = p + \left(x + g'(p)\right)\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \left(x + g'(p)\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$

Από την $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$, παίρνουμε τη γενική λύση της (2.41) η οποία είναι:

$y = xc + g(c)$

και οι ισότητες:

$x = -g'(p), \qquad y = -g'(p)p + g(p)$

δίνουν την ιδιάζουσα λύση της (2.41) σε παραμετρική μορφή. Αν μπορέσουμε να απαλείψουμε την παράμετρο p, παίρνουμε την ιδιάζουσα λύση σε καρτεσιανή μορφή.

Παράδειγμα 55 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $py - p^2 x = 1, \quad p = y'$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής Clairaut διότι γράφεται:

$$y = xp + \frac{1}{p} \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε:

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \\ x = \dfrac{1}{p^2}, y = \dfrac{2}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xc + \dfrac{1}{c} \\ x = \dfrac{y^2}{4} \end{cases} ,$$

που είναι η γενική λύση και η ιδιάζουσα λύση αντίστοιχα, της δοθείσας Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα 56 Να λυθεί η Σ.Δ.Ε. $y = xp + \dfrac{1}{4p}$.

Λύση

Η δοθείσα Σ.Δ.Ε. είναι της μορφής Clairaut οπότε έχουμε:

$$x = -\left(\frac{1}{4p}\right)' \Rightarrow x = \frac{1}{4p^2} \quad (1)$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική έχουμε:

$$y = \frac{1}{4p^2}p + \frac{1}{4p} = \frac{1}{2p} \Rightarrow y = \frac{1}{2p} \quad (2) \Rightarrow p = \frac{1}{2y}$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν την ιδιάζουσα λύση της αρχικής σε παραμετρική μορφή. Απαλείφοντας την παράμετρο p, παίρνουμε την λύση της αρχικής σε καρτεσιανή μορφή. Έτσι:

$$x = \frac{1}{4\dfrac{1}{4y^2}} \Rightarrow x = y^2.$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι: $y = xc + \dfrac{1}{4c}$.

2.8 Ορθογώνιες-ισογώνιες τροχιές

Έστω $\phi(x,y,c) = 0$ (c παράμετρος) μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών. **Ορθογώνιες τροχιές** της $\phi(x,y,c) = 0$ λέγονται οι καμπύλες που τέμνουν την δοθείσα οικογένεια κατά ορθή γωνία σ' ένα σημείο (x,y). [Ανάλογα, **ισογώνιες τροχιές** της $\phi(x,y,c) = 0$ λέγονται οι καμπύλες που τέμνουν την δοθείσα οικογένεια κατά σταθερή γωνία a].

Έστω $y' = tan\omega$ η κλίση της $y(x)$, τότε η κλίση Y' της κάθετης στην $y(x)$, θα είναι $Y' = -cot\omega$. Άρα, $y'Y' = -1 \Rightarrow Y' = -\dfrac{1}{y'}$. Έτσι, για να βρούμε τις ορθογώνιες τροχιές μιας δοθείσας οικογένειας καμπυλών που δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\phi(x,y,c) = 0$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

(α) Βρίσκουμε την Σ.Δ.Ε. που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την δοθείσα οικογένεια καμπυλών. Έστω $f(x,y,y') = 0$.

(β) Στην Σ.Δ.Ε. που βρήκαμε θέτουμε στην θέση του y' το $-\dfrac{1}{y'}$. Έτσι η Σ.Δ.Ε. $f(x,y,-\dfrac{1}{y'}) = 0$ είναι η Σ.Δ.Ε. που ικανοποιούν οι ορθογώνιες τροχιές.

(γ) Λύνουμε την προκύπτουσα Σ.Δ.Ε., οπότε το γενικό της ολοκλήρωμα είναι οι ζητούμενες ορθογώνιες τροχιές.

Παράδειγμα 57 Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπυλών:
$y^2 + 3x^2 - 2cx = 0.$

Λύση

Πρώτα θα βρούμε την Σ.Δ.Ε. που ικανοποιούν οι δοθείσες καμπύλες. Προς τούτο, παραγωγίζουμε ως προς x την δοθείσα σχέση και απαλείφουμε την σταθερά από τις δύο εξισώσεις:

$$y^2 + 3x^2 - 2cx = 0 \Rightarrow 2yy' + 6x - 2c = 0 \Rightarrow 2c = 2yy' + 6x.$$

Άρα:

$y^2 + 3x^2 - 2yy'x - 6x^2 = 0 \Rightarrow y^2 - 3x^2 - 2yy'x = 0 \xRightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}}$

$\Rightarrow y^2 - 3x^2 + 2\dfrac{yx}{y'} = 0 \Rightarrow (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

Η προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. είναι ομογενής και για να την λύσουμε θέτουμε:

$y = xu \Rightarrow dy = xdu + udx$, οπότε:

$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0 \Rightarrow (x^2u^2 - 3x^2)(xdu + udx) + 2x^2udx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u^2 - 3)xdu + (u^2 - 1)udx = 0 \Rightarrow \dfrac{u^2 - 3}{u(u^2 - 1)}du + \dfrac{dx}{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{3}{u} - \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)du + \dfrac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{u^3x}{u^2 - 1} = c \Rightarrow \dfrac{y^3}{y^2 - x^2} = c$

Οπότε οι ορθογώνιες τροχιές είναι: $\dfrac{y^3}{y^2 - x^2} = c$.

Παράδειγμα 58 Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας:

$\dfrac{x^2}{c} + \dfrac{y^2}{c-1} = 1. \quad (1)$

Λύση

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x: $\dfrac{2x}{c} + \dfrac{2yy'}{c-1} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{c} + \dfrac{yy'}{c-1} = 0 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) απαλείφουμε την σταθερά c. Από την (2) προκύπτει:

$\dfrac{x}{c} = -\dfrac{yy'}{c-1} \Rightarrow \dfrac{x}{yy'} = \dfrac{-c}{c-1} \Rightarrow \dfrac{x}{yy'} = \dfrac{c}{1-c} \Rightarrow \dfrac{x}{yy'+x} = c \quad (3)$

Η (1) εξ αιτίας της (3) γίνεται:

$\dfrac{x^2}{\dfrac{x}{x+yy'}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{x}{yy'+x} - 1} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2(x+yy')}{x} + \dfrac{y^2(x+yy')}{x - yy' - x} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+yy') - \dfrac{(x+yy')y}{y'} = 1 \Rightarrow (x+yy')(xy' - y) = y' \quad (4)$

Η (4) είναι η δ.ε. που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την (1).

Στην (4) βάζουμε όπου y' το $-\dfrac{1}{y'}$ για να βρούμε τη δ.ε. των ορθογωνίων τροχιών. Οπότε:

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)\left[x\left(-\frac{1}{y'}\right)-y\right]=-\frac{1}{y'}\Rightarrow (xy'-y)(-x-yy')=-y'$$

$$\Rightarrow (xy'-y)(x+yy')=y' \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι η δ.ε. (5) των ορθογωνίων τροχιών είναι ακριβώς ίδια με την (4). Άρα το γενικό ολοκλήρωμα της (5) θα είναι η οικογένεια (1).
Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια (1) είναι αυτοορθογώνιος, δηλαδή οι ορθογώνιες τροχιές της (1) είναι μέλη της ίδιας οικογενείας.

Παράδειγμα 59 Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπυλών:

$$x^2-\frac{1}{3}y^2=c^2. \quad (1)$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x: $2x-\frac{2}{3}y^2y'=0 \quad (2)$

Η (2) είναι η δ.ε. που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την (1).
Στην (2) βάζουμε όπου y' το $-\frac{1}{y'}$ για να βρούμε τη δ.ε. των ορθογωνίων τροχιών. Οπότε:

$$2x-\frac{2}{3}y^2y'=0\Rightarrow 2x+\frac{2}{3}y^2\frac{1}{y'}=0\Rightarrow y'=-\frac{2y}{6x}\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}\frac{y}{x}$$

Η προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών:

$\frac{dy}{y}=-\frac{1}{3}\frac{dx}{x}$, οπότε ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών:

$$\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+c_1\Rightarrow ln|y|=-\frac{1}{3}ln|x|+c_1\Rightarrow ln|yx^{\frac{1}{3}}|=c_1\Rightarrow$$

$$y(x)x^{\frac{1}{3}}=c\Rightarrow y(x)=cx^{-\frac{1}{3}}.$$

Παράδειγμα 60 Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπυλών:

$$x^k+y^k=c^k. \quad (1)$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x: $kx^{k-1} + ky^{k-1}y' = 0 \quad (2)$

Η (2) είναι η δ.ε. που έχει για γενικό ολοκλήρωμα την (1).
Στην (2) βάζουμε όπου y' το $-\dfrac{1}{y'}$ για να βρούμε τη δ.ε. των ορθογωνίων τροχιών. Οπότε:

$$kx^{k-1} + ky^{k-1}y' = 0 \Rightarrow kx^{k-1} - ky^{k-1}\frac{1}{y'} = 0 \Rightarrow \frac{ky^{k-1}}{y'} = kx^{k-1} \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{x^{k-1}} = \frac{dy}{y^{k-1}}$$

Η προκύπτουσα Σ.Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών οπότε ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών:

$$\int \frac{dy}{y^{k-1}} = \int \frac{dx}{x^{k-1}} + c$$

Για $k \neq 2$ έχουμε:

$$\frac{y^{-k+2}}{-k+2} = \frac{x^{-k+2}}{-k+2} + c \Rightarrow y^{-k+2} = x^{-k+2} + c$$

Για $k = 2$ έχουμε:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow y(x) = cx.$$

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1985

[2] Θ. Κυβεντίδης, Διαφορικές εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη, 1993

[3] Β. Μπαρμπάνης, Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Πάτρα, 1976

[4] Π. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι, Πάτρα, 2002

[5] Ν. Σταυρακάκης, ΣΔΕ : γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1997

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

[1] W. E. Boyce, R. C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems, N. Y. John Wiley & Sons, 1977

[2] M. Braun, Differential equations and their Applications, Springer-Verlag, 1993

[3] Abell and Braselton, Modern Differential equations, Theory, Application, Technology, Saunders College Publishing, 1996

[4] B. Rai and D. P. Choudhury, Ordinary Differential Equations, An introduction, Alpha Science, International Ltd, 2005

[5] Rice and Strange, Ordinary Differential Equations with Application, Brooks/Cole Publishing Company, 1996