Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Ρίζες των συναρτήσεων Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 8

11 Ρίζες των συναρτήσεων Bessel

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε κάποια θεωρήματα, που αφορούν στις ρίζες των συναρτήσεων Bessel $J_\nu(z)$, των παραγώγων $J'_\nu(z)$ και των μικτών $AJ_\nu(z)+BzJ'_\nu(z), \quad B \neq 0$.

Θεώρημα 11.1: Όλες οι ρίζες της $J_\nu(z)$, εκτός ίσως απ' το μηδέν, είναι απλές.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \neq 0$ μια ρίζα της $J_\nu(z)$ με πολλαπλότητα, τουλάχιστον δύο. Τότε θα ισχύουν: $J_\nu(z_0) = 0$ και $J'_\nu(z_0) = 0$. Η δ.ε. Bessel είναι γραμμική, ομογενής 2ης τάξης, με συνεχείς συντελεστές ($z \neq 0$) και ικανοποιεί και τις ομογενείς αρχικές συνθήκες. Βάσει του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας του Π.Α.Τ., θα έχει μια μοναδική λύση, την μηδενική. Άρα $J_\nu(z) = 0$, άτοπο. Οπότε, δεν μπορεί η ρίζα z_0 να έχει πολλαπλότητα. □

Σημείωση 11.1: Απ' το Θεώρημα 11.1 έπεται ότι οι συναρτήσεις $J_\nu(z)$ και $J'_\nu(z)$ δεν μπορεί να έχουν κοινή ρίζα.

Θεώρημα 11.2: Όλες οι ρίζες της $J'_\nu(z)$, είναι απλές, εκτός ίσως απ' το $z = 0$ ή $z = \pm\nu$.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \neq 0$ μια ρίζα της $J'_\nu(z)$ με πολλαπλότητα, τουλάχιστον δύο. Τότε: $J'_\nu(z_0) = 0$ και $J''_\nu(z_0) = 0$. Από τη δ.ε. Bessel για $z = z_0$ παίρνουμε:
$z_0^2 J''_\nu(z_0) + zJ'_\nu(z_0) + (z_0^2 - \nu^2)J_\nu(z_0) = 0$. Αφού $z \neq \pm\nu$ τότε αναγκαστικά $J_\nu(z_0) = 0$, οπότε από το Θεώρημα 7.1 είναι άτοπο. □

Πρόταση 11.1: Οι συναρτήσεις $J_\nu(z)$ ή $J'_\nu(z)$ δεν μπορεί να έχουν κοινή ρίζα με τη συνάρτηση $AJ_\nu(z) + BzJ'_\nu(z), \quad A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \neq 0$ μια κοινή ρίζα των $J_\nu(z)$ ή $J'_\nu(z)$ με την $AJ_\nu(z)+BzJ'_\nu(z) = 0$. Τότε:

$$AJ_\nu(z_0) + BzJ'_\nu(z_0) = 0 \tag{11.1}$$

και

$$J_\nu(z_0) = 0 \tag{11.2}$$

ή

$$J'_\nu(z_0) = 0. \tag{11.3}$$

Αν ισχύει η (11.2) τότε απ' την (11.1) έπεται $J'_\nu(z) = 0$, άτοπο απ' το Θέωρημα 7.1. Αν ισχύει η (11.3) τότε απ' την (11.1) έπεται $J_\nu(z) = 0$, άτοπο απ' το Θέωρημα 11.1. □

Θεώρημα 11.3: Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της $J_\nu(z)$, τότε και οι $-z_0$, $\pm\overline{z_0}$ θα είναι, επίσης, ρίζες αυτής.

Απόδειξη. Αν $z_0 = 0$, είναι προφανές. Έστω $z_0 \neq 0$ μια ρίζα της $J_\nu(z)$. Τότε από την ισότητα

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}, \tag{11.4}$$

έπεται ότι το z_0 θα είναι ρίζα και του αθροίσματος $\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}$. Αυτή η σειρά όμως, είναι άρτια με πραγματικούς συντελεστές. Άρα, αν θέσουμε όπου z το $-z_0$ ή $\pm\overline{z_0}$, θα μηδενίζεται και πάλι το άθροισμα, άρα και η $J_\nu(z)$. □

Θεώρημα 11.4: Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της $J'_\nu(z)$, τότε και οι $-z_0$, $\pm\overline{z_0}$ θα είναι, επίσης, ρίζες αυτής.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την $J_\nu(z)$ ως προς z, παίρνουμε:

$$J'_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa\left(\frac{\nu}{2}+\kappa\right)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}, \tag{11.5}$$

Οπότε αν $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της $J'_\nu(z)$, θα είναι ρίζα και του αθροίσματος
$\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa\left(\frac{\nu}{2}+\kappa\right)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa}$. Η σειρά αυτή είναι άρτια με πραγματικούς συντελεστές.
Άρα και οι $-z_0$, $\pm\overline{z_0}$ μηδενίζουν τη σειρά, άρα και την $J'_\nu(z)$. □

Θεώρημα 11.5: Για $\nu > -1$ η συνάρτηση Bessel $J_\nu(z)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. Αφού $\nu \in \mathbb{R}$, αν $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της $J_\nu(z)$, απ' το Θεώρημα 11.3, θα είναι ρίζα και $\overline{z_0} \in \mathbb{C}$, δηλαδή

$$J_\nu(z_0) = 0 = J_\nu(\overline{z_0}). \tag{11.6}$$

Εφαρμόζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα Lommel, για $\gamma = 1$, $\alpha = z_0$, , $\beta = \overline{z_0}$, οπότε $\alpha \neq \beta$ και παίρνουμε:

$$(z_0^2 - \overline{z_0}^2)\int_0^1 tJ_\nu(z_0t)J_\nu(\overline{z_0}t)dt = \overline{z_0}J_\nu(z_0)J'_\nu(\overline{z_0}) - z_0J'_\nu(z_0)J_\nu(\overline{z_0}) \tag{11.7}$$

$$\overset{(11.6)}{\Longrightarrow} (z_0^2 - \overline{z_0}^2)\int_0^1 t|J_\nu(z_0t)|^2dt = 0 \overset{z_0\neq\overline{z_0}}{\Longrightarrow} \int_0^1 t|J_\nu(z_0t)|^2dt = 0, \text{ άτοπο.}$$

Έστω ότι $z_0 = \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$, τότε η (11.4) μας δίνει:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{\mathrm{i}y}{2}\right)^{2\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\kappa} = 0, \text{ άτοπο,}$$

αφού είναι θετικός αριθμός για $\nu > -1$. Άρα, όλες οι ρίζες της $J_\nu(z)$ για $\nu > -1$ είναι πραγματικές. Αν $\nu = -1$ τότε: $J_{-1}(z) = -J_1(z)$, όπου συμπεραίνουμε ότι το Θεώρημα ισχύει και για $\nu = -1$. □

Θεώρημα 11.6: Αν $\nu \geq 0$, η συνάρτηση $J'_\nu(z)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. Αφού $\nu \in \mathbb{R}$, αν $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε εργαζόμενοι ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 11.5, επειδή η (11.7) μας δίνει πάλι το δεξί μέλος της ισότητας μηδέν, καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $z_0 = \mathrm{i}y$, τότε απ' την (11.5) θα έχουμε:

$\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}+\kappa\right)}{\Gamma(\nu+\kappa+1)\kappa!}\Big(\frac{y}{2}\Big)^{2\kappa} = 0$, άτοπο, αφού είναι θετικός αριθμός για $\nu \geq 0$. □

Θεώρημα 11.7: Η συνάρτηση $J_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$, έχει άπειρο αριθμό ριζών.

Απόδειξη. Η δ.ε. Bessel είναι

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0. \tag{11.8}$$

Για $\nu = \dfrac{1}{2}$, οι λύσεις της (11.8) είναι οι $J_{1/2}(z)$ και $J_{-1/2}(z)$. Επειδή $J_{1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin z$ και $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos z$, οι ρίζες αυτών είναι οι ρίζες του $\sin z$ και $\cos z$, αντίστοιχα. Όμως το $\sin z$ και $\cos z$, είναι οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε.

$$v''(z) + v(z) = 0. \tag{11.9}$$

Μπορούμε λοιπόν, να μετατρέψουμε την (11.8) σε μορφή Schrödinger

$$u''(z) + U(z)u(z) = 0 \tag{11.10}$$

με τον μετασχηματισμό

$$y(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, u(z). \tag{11.11}$$

Οι δ.ε. (11.8) και (11.10) έχουν τις ίδιες ρίζες. Κατόπιν, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα σύγκρισης των ριζών του Sturm, μεταξύ των ριζών των λύσεων των δ.ε. (11.9) και (11.10). Πράγματι, παραγωγίζουμε την (11.11) ως προς z, για να πάρουμε την $y'(z)$ και την $y''(z)$:

$y'(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(\dfrac{1}{2}z^{-3/2}\Big)u(z) + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}z^{-1/2}u'(z)$ και

$y''(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(\dfrac{3}{4}\Big)z^{-5/2}u(z) + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(-1)z^{-3/2}u'(z) + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}z^{-1/2}u''(z)$

και αντικαθιστούμε στην δ.ε. (11.8) τις συναρτήσεις $y(z)$, $y'(z)$ και $y''(z)$, οπότε η (11.8) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
&z^2\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\frac{3}{4}\Big)z^{-5/2}u(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)z^{-3/2}u'(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{-1/2}u''(z)\Big] + \\
&+ z\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\frac{1}{2}z^{-3/2}\Big)u(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{-1/2}u'(z)\Big] + (z^2-\nu^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{-1/2}u(z) = 0 \\
&\Rightarrow z^{3/2}u''(z) + \Big[\frac{1}{4}z^{-1/2} + (z^2-\nu^2)z^{-1/2}\Big]u(z) = 0 \\
&\Rightarrow u''(z) + \Big[1 + \frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{z^2}\Big]u(z) = 0.
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Οι ρίζες των λύσεων της δ.ε. (11.12) είναι ίδιες με τις ρίζες των λύσεων της δ.ε. (11.8). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα σύγκρισης των ριζών του Sturm των λύσεων των δ.ε. (11.12) και (11.9). Έτσι, οι ρίζες των λύσεων της (11.12) εναλλάσσονται με τις ρίζες των λύσεων της δ.ε. (11.9). Αφού κάθε λύση της δ.ε. (11.9) έχει άπειρες πραγματικές ρίζες, κάθε λύση της δ.ε. (11.12), άρα και της (11.8), θα έχει επίσης άπειρες πραγματικές ρίζες. □

Παρατήρηση 11.1: Οι πραγματικές ρίζες της συνάρτησης $J_\nu(z)$ είναι συμμετρικές ως προς το μηδέν, αφού ισχύει: $J_\nu(-z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$.

Σημείωση 11.2: Συμβολίζουμε με $j_{\nu n}$, $n = 1, 2, \dots$ τις θετικές πραγματικές ρίζες της $J_\nu(z)$ και με $j'_{\nu n}$, $n = 1, 2, \dots$ τις θετικές πραγματικές ρίζες της $J'_\nu(z)$.

Θεώρημα 11.8: Η μικτή συνάρτηση Bessel $f_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BzJ'_\nu(z)$ για $\nu > -1$, έχει άπειρες πραγματικές απλές ρίζες, με πιθανή εξαίρεση το μηδέν.

Απόδειξη. Έστω $j_{\nu\kappa}$ και $j_{\nu\kappa+1}$ δύο διαδοχικές θετικές ρίζες της $J_\nu(z)$. Τότε $J_\nu(j_{\nu\kappa}) = 0 = J_\nu(j_{\nu\kappa+1})$ αλλά απ' την Πρόταση 11.1 η $f_\nu(z)$ δεν μηδενίζεται για $j_{\nu\kappa}$ και $j_{\nu\kappa+1}$ και $J'_\nu(j_{\nu\kappa}) \neq 0$, $J'_\nu(j_{\nu\kappa+1}) \neq 0$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$f_\nu(j_{\nu\kappa}) = AJ_\nu(j_{\nu\kappa}) + Bj_{\nu\kappa}J'_\nu(j_{\nu\kappa}) \Rightarrow f_\nu(j_{\nu\kappa}) = Bj_{\nu\kappa}J'_\nu(j_{\nu\kappa})$ και

$f_\nu(j_{\nu\kappa+1}) = AJ_\nu(j_{\nu\kappa+1}) + Bj_{\nu\kappa+1}J'_\nu(j_{\nu\kappa+1}) \Rightarrow f_\nu(j_{\nu\kappa}) = Bj_{\nu\kappa+1}J'_\nu(j_{\nu\kappa+1})$.

Επειδή η $J_\nu(z)$ είναι συνεχής συνάρτηση, οι $J'_\nu(j_{\nu\kappa})$ και $J'_\nu(j_{\nu\kappa+1})$ έχουν διαφορετικό πρόσημο. Άρα και οι $f_\nu(j_{\nu\kappa})$ και $f_\nu(j_{\nu\kappa+1})$ θα είναι ετερόσημες κι επειδή η $f_\nu(z)$ είναι συνεχής, θα έχει μια ρίζα μεταξύ των $j_{\nu\kappa}$, $j_{\nu\kappa+1}$. Άρα, θα έχει άπειρες πραγματικές ρίζες για $\nu > -1$.

Έστω z_0 μια διπλή ρίζα της $f_\nu(z)$. Τότε: $f_\nu(z_0) = 0$ και $f'_\nu(z_0) = 0$, δηλαδή:

$$AJ_\nu(z_0) + Bz_0J'_\nu(z_0) = 0, \tag{11.13}$$

$$AJ'_\nu(z_0) + BJ'_\nu(z_0) + Bz_0J''_\nu(z_0) = 0. \tag{11.14}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (11.14) με z_0, οπότε απ' την (11.13) και την δ.ε. Bessel προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&Az_0J'_\nu(z_0) + Bz_0J'_\nu(z_0) + Bz_0^2J''_\nu(z_0) = 0 \overset{(11.13)}{\Longrightarrow} \\
&Az_0J'_\nu(z_0) - AJ_\nu(z_0) - \frac{AJ_\nu(z_0)}{z_0J'_\nu(z_0)}\Big[-z_0J'_\nu(z_0) - (z^2-\nu^2)J_\nu(z_0)\Big] = 0 \\
&Az_0^2[J'_\nu(z_0)]^2 - Az_0J_\nu(z_0)J'_\nu(z_0) + Az_0J_\nu(z_0)J'_\nu(z_0) + AJ_\nu^2(z_0)(z^2-\nu^2) = 0 \\
&\Rightarrow z_0^2[J'_\nu(z_0)]^2 + J_\nu^2(z_0)(z^2-\nu^2) = 0
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Όμως, απ' το δεύτερο ολοκλήρωμα του Lommel, για $\gamma = 1$ και $\alpha = z_0$, έχουμε:

$$2z_0^2\int_0^1 tJ_\nu^2(z_0t)dt = z_0^2[J'_\nu(z_0)]^2 + (z^2-\nu^2)J_\nu^2(z_0), \tag{11.16}$$

η οποία εξ αιτίας της (11.15) δίνει: $\displaystyle\int_0^1 tJ_\nu^2(z_0t)dt = 0$, πράγμα άτοπο.

Άρα, όλες οι ρίζες της $f_\nu(z)$ είναι απλές. □

Πρόταση 11.2: Αν $\nu > -1$ και $B \neq 0$, τότε υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της $f_\nu(z)$ μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_\nu(z)$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα δείξαμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_\nu(z)$ υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f_\nu(z)$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχουν δύο ρίζες της $f_\nu(z)$, οι z_1 και z_2 τέτοιες ώστε:

$$j_{\nu\kappa} < z_1 < z_2 < j_{\nu\kappa+1}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi_\nu(z) = \dfrac{f_\nu(z)}{J_\nu(z)}$ για $z \in [z_1, z_2]$, τότε: $\phi_\nu(z_1) = \phi_\nu(z_2) = 0$ και η $\phi_\nu(z)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[z_1, z_2]$. Άρα, απ' το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $z_0 \in [z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε $\phi'_\nu(z_0) = 0$. Επειδή $\phi_\nu(z) = \dfrac{f_\nu(z)}{J_\nu(z)}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi_\nu(z) = \frac{AJ_\nu(z) + BzJ'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = A + Bz\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)}. \tag{11.17}$$

Παραγωγίζουμε την (11.17) ως προς z:

$$\begin{aligned}
\phi'_\nu(z) &= B\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} + Bz\frac{J''_\nu(z)J_\nu(z) - [J'_\nu(z)]^2}{J^2_\nu(z)} \\
&= \frac{B}{zJ^2_\nu(z)}\Big[zJ'_\nu(z)J_\nu(z) + z^2J''_\nu(z)J_\nu(z) - z^2[J'_\nu(z)]^2\Big].
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε το γινόμενο $z^2J''_\nu(z)$ από την δ.ε. Bessel, οπότε:

$$\begin{aligned}
\phi'_\nu(z) &= \frac{B}{zJ^2_\nu(z)}\Big[zJ'_\nu(z)J_\nu(z) + J_\nu(z)[-zJ'_\nu(z) - (z^2-\nu^2)J_\nu(z)] - z^2[J'_\nu(z)]^2\Big] \\
&= \frac{B}{zJ^2_\nu(z)}\Big[zJ'_\nu(z)J_\nu(z) - zJ'_\nu(z)J_\nu(z) - (z^2-\nu^2)J^2_\nu(z) - z^2[J'_\nu(z)]^2\Big] \\
&= -\frac{B}{zJ^2_\nu(z)}\Big[z^2[J'_\nu(z)]^2 + (z^2-\nu^2)J^2_\nu(z)\Big].
\end{aligned}$$

Άρα: $\phi_\nu(z_0) = -\dfrac{B}{z_0J^2_\nu(z_0)}\Big[z_0^2[J'_\nu(z_0)]^2 + (z_0^2-\nu^2)J^2_\nu(z_0)\Big] = 0$, άτοπο, λόγω της (11.16).

Άρα μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_\nu(z)$ υπάρχει μία και μόνο ρίζα της $f_\nu(z)$. □

Παρατήρηση 11.2: Απ' την Πρόταση 11.2 προκύπτει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_\nu(z)$, υπάρχει, για $\nu \geq 0$, μία μόνο ρίζα της $J'_\nu(z)$.

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.