Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Ολοκληρώματα Lommel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 7

10 Ολοκληρώματα Lommel

Πρόταση 10.1: Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^\gamma zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz=\gamma\big[\alpha J_\nu'(\alpha\gamma)J_\nu(\beta\gamma)-\beta J_\nu'(\beta\gamma)J_\nu(\alpha\gamma)\big],\quad \nu>-1 \tag{10.1}$$

όπου α, β σταθερές και $\alpha\neq\beta$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις δ.ε. Bessel

$$z^2u''(z)+zu'(z)+(\alpha^2z^2-\nu^2)u(z)=0 \tag{10.2}$$

$$z^2v''(z)+zv'(z)+(\beta^2z^2-\nu^2)v(z)=0, \tag{10.3}$$

οι οποίες έχουν αντίστοιχα λύσεις τις συναρτήσεις: $u(z)=J_\nu(\alpha z)$ και $v(z)=J_\nu(\beta z)$. Πολλαπλασιάζουμε την (10.2) με $v(z)$, την (10.3) με $u(z)$, οπότε:

$z^2u''(z)v(z)+zu'(z)v(z)+(\alpha^2z^2-\nu^2)u(z)v(z)=0$

$z^2v''(z)u(z)+zv'(z)u(z)+(\beta^2z^2-\nu^2)v(z)u(z)=0$

και αφαιρούμε κατά μέλη:

$z^2\big[u''(z)v(z)-v''(z)u(z)\big]+z\big[u'(z)v(z)-u(z)v'(z)\big]+(\alpha^2-\beta^2)z^2u(z)v(z)=0 \overset{z\neq 0}{\Longrightarrow}$

$\dfrac{d}{dz}\Big\{z\big[u'(z)v(z)-u(z)v'(z)\big]\Big\}=(\beta^2-\alpha^2)zu(z)v(z).$

Ολοκληρώνουμε την προκύπτουσα ως προς z από 0 έως γ, οπότε:

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^\gamma zu(z)v(z)dz=z\big[u'(z)v(z)-u(z)v'(z)\big]_{z=0}^{\gamma}. \tag{10.4}$$

Θέτουμε όπου $u(z)=J_\nu(\alpha z)$, $u'(z)=\alpha J_\nu'(\alpha z)$ και $v(z)=J_\nu(\beta z)$, $v'(z)=\beta J_\nu'(\beta z)$, οπότε η ισότητα (10.4) μας δίνει:

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^\gamma zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz=\gamma\big[\alpha J_\nu'(\alpha\gamma)J_\nu(\beta\gamma)-\beta J_\nu'(\beta\gamma)J_\nu(\alpha\gamma)\big],$$

η οποία είναι η αποδεικτέα. □

Πρόταση 10.2: Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$2\alpha^2\int_0^\gamma zJ_\nu^2(\alpha z)dz=\gamma^2\alpha^2\big(J_\nu'(\alpha\gamma)\big)^2+(\alpha^2\gamma^2-\nu^2)J_\nu^2(\alpha\gamma),\quad \nu>-1 \tag{10.5}$$

όπου α σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη δ.ε. (10.2) η οποία έχει λύση την $u(z) = J_\nu(\alpha z)$. Πολλαπλασιάζουμε την (10.2) με $2u'(z)$, οπότε προκύπτει:

$2z^2 u''(z)u'(z) + 2z\big(u'(z)\big)^2 + 2(\alpha^2 z^2 - \nu^2)u(z)u'(z) = 0.$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $2\alpha^2 z u^2(z)$, οπότε:

$$2z^2 u''(z)u'(z) + 2z\big(u'(z)\big)^2 + 2(\alpha^2 z^2 - \nu^2)u(z)u'(z) + 2\alpha^2 z u^2(z) - 2\alpha^2 z u^2(z) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dz}\Big[z^2\big(u'(z)\big)^2\Big] + \frac{d}{dz}\Big[(\alpha^2 z^2 - \nu^2)u^2(z)\Big] - 2\alpha^2 z u^2(z) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dz}\Big\{z^2\big(u'(z)\big)^2 + (\alpha^2 z^2 - \nu^2)u^2(z)\Big\} = 2\alpha^2 z u^2(z).$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ισότητα ως προς z από 0 έως γ, έχουμε:

$$2\alpha^2 \int_0^\gamma z u^2(z)dz = \Big[z^2\big(u'(z)\big)^2 + (\alpha^2 z^2 - \nu^2)u^2(z)\Big]_{z=0}^{\gamma}. \tag{10.6}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι: $u(z) = J_\nu(\alpha z)$ και $u'(z) = \alpha J_\nu'(\alpha z)$, η (10.6) γίνεται:

$$2\alpha^2 \int_0^\gamma z J_\nu^2(\alpha z)dz = \gamma^2\alpha^2\big(J_\nu'(\alpha\gamma)\big)^2 + (\alpha^2\gamma^2 - \nu^2)J_\nu^2(\alpha\gamma),$$

η οποία είναι η αποδεικτέα. □

Σημείωση 10.1: Την προϋπόθεση $\nu > -1$ στα ολοκληρώματα Lommel, την θεωρούμε για τη σύγκλιση των δυναμοσειρών, που υπάρχουν στο δεξί μέλος των (10.1) και (10.5).

Παρατήρηση 10.1: Ισχύουν αντίστοιχα ολοκληρώματα Lommel για τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel και αποδεικνύονται ομοίως, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την τροποποιημένη δ.ε. Bessel.

Άσκηση

Να δειχθεί ότι ισχύει:

1. $(\alpha^2 - \beta^2)\displaystyle\int_0^\gamma x I_n(\alpha x)I_n(\beta x)dx = \gamma\big[\beta I_n'(\beta\gamma)I_n(\alpha\gamma) - \alpha I_n(\beta\gamma)I_n'(\alpha\gamma)\big],$
2. $2\alpha^2\displaystyle\int_0^\gamma x I_n^2(\alpha x)dx = (\alpha^2\gamma^2 + n^2)I_n^2(\alpha\gamma) - \alpha^2\gamma^2\big(I_n'(\alpha\gamma)\big)^2,$

όπου $n > -1$ και $\alpha \neq \beta$.

Λύση:

1. Θεωρούμε τις δ.ε. Bessel

$$x^2u''(x) + xu'(x) - (\alpha^2x^2 + n^2)u(x) = 0 \tag{10.7}$$

$$x^2v''(x) + xv'(x) - (\beta^2x^2 + n^2)v(x) = 0, \tag{10.8}$$

οι οποίες έχουν αντίστοιχα λύσεις τις συναρτήσεις: $u(x) = I_n(\alpha x)$ και $v(x) = I_n(\beta x)$. Πολλαπλασιάζουμε την (10.7) με $v(x)$, την (10.8) με $u(x)$, οπότε:

$x^2u''(x)v(x) + xu'(x)v(x) - (\alpha^2x^2 + n^2)u(x)v(x) = 0$

$x^2v''(x)u(x) + xv'(x)u(x) - (\beta^2x^2 + n^2)v(x)u(x) = 0$

και αφαιρούμε κατά μέλη:

$$x^2\big[u''(x)v(x) - v''(x)u(x)\big] + x\big[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\big] - (\alpha^2 - \beta^2)x^2u(x)v(x) = 0 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow}$$
$$\frac{d}{dx}\Big\{x\big[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\big]\Big\} = (\alpha^2 - \beta^2)xu(x)v(x).$$

Ολοκληρώνουμε την προκύπτουσα ως προς x από 0 έως γ, οπότε:

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^\gamma xu(x)v(x)dx = x\big[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\big]_{x=0}^{\gamma}. \tag{10.9}$$

Θέτουμε όπου $u(x) = I_n(\alpha x)$, $u'(x) = \alpha I_n'(\alpha x)$ και $v(x) = I_n(\beta x)$, $v'(x) = \beta I_n'(\beta x)$, οπότε η ισότητα (10.9) μας δίνει:

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^\gamma xI_n(\alpha x)I_n(\beta x)dx = \gamma\big[\beta I_n'(\beta\gamma)I_n(\alpha\gamma) - \alpha I_n(\beta\gamma)I_n'(\alpha\gamma)\big].$$

2. Θεωρούμε τη δ.ε. (10.7) η οποία έχει λύση την $u(x) = I_n(\alpha x)$. Πολλαπλασιάζουμε την (10.7) με $2u'(x)$, οπότε προκύπτει:

$2x^2u''(x)u'(x) + 2xu'(x)u'(x) - 2(\alpha^2x^2 + n^2)u(x)u'(x) = 0.$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $2\alpha^2xu^2(x)$, οπότε:

$$2x^2u''(x)u'(x) + 2x\big(u'(x)\big)^2 - 2(\alpha^2x^2 + n^2)u(z)u'(z) + 2\alpha^2xu^2(x) - 2\alpha^2xu^2(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}\big[x^2\big(u'(x)\big)^2\big] - \frac{d}{dx}\big[(\alpha^2x^2 + n^2)u^2(x)\big] + 2\alpha^2xu^2(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}\big\{(\alpha^2x^2 + n^2)u^2(x) - x^2\big(u'(x)\big)^2\big\} = 2\alpha^2xu^2(x).$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ισότητα ως προς x από 0 έως γ, έχουμε:

$$2\alpha^2\int_0^\gamma xu^2(x)dx = \big[(\alpha^2x^2 + n^2)u^2(x) - x^2\big(u'(x)\big)^2\big]_{x=0}^{\gamma}. \tag{10.10}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι: $u(x) = I_n(\alpha x)$ και $u'(x) = \alpha I_n'(\alpha x)$, η (10.10) γίνεται:

$$2\alpha^2\int_0^\gamma xI_n^2(\alpha x)dx = (\alpha^2\gamma^2 + n^2)I_n^2(\alpha\gamma) - \alpha^2\gamma^2\big(I_n'(\alpha\gamma)\big)^2.$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.