Τίτλος Μαθήματος: Ειδικές Συναρτήσεις

Ενότητα: Αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Bessel

Όνομα Καθηγήτριας: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 3

6 Αναδρομικές Σχέσεις των συναρτήσεων Bessel

Θεώρημα 6.1: Να δειχθεί ότι ισχύουν οι κάτωθι αναδρομικές σχέσεις:

$$(i)\ \frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x) \tag{6.1}$$

$$(ii)\ \frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{6.2}$$

$$(iii)\ J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \tag{6.3}$$

$$(iv)\ J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \tag{6.4}$$

$$(v)\ J_n'(x) = \frac{1}{2}\big\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\big\} \tag{6.5}$$

$$(vi)\ J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \tag{6.6}$$

όπου n εν γένει μιγαδικός αριθμός.

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)r!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2r+n}. \tag{6.7}$$

Πολλαπλασιάζουμε με x^n και τα δύο μέλη της ισότητας:

$$x^n J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)r!} \frac{x^{2r+2n}}{2^{2r+n}}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{2(r+n)}{\Gamma(n+r+1)r!}\frac{x^{2r+2n-1}}{2^{2r+n}} = x^n \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{2(r+n)}{(n+r)\Gamma(n+r)r!}\frac{x^{2r+n-1}}{2^{2r+n}} \\
&= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r-1+1)r!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2r+(n-1)} \\
&= x^n J_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

που είναι η αποδεικτέα.

(ii) Πολλαπλασιάζουμε την (6.7) με x^{-n} και παραγωγίζουμε την προκύπτουσα ως προς x:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)r!}\frac{d}{dx}(x^{2r+n-n})\frac{1}{2^{2r+n}} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)r!}\frac{2r}{2^{2r+n}}x^{2r-1}\\
&= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)r!}\frac{r}{2^{2r+n-1}}x^{2r-1}\\
&\overset{r-1\leftrightarrow s}{=} \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{\Gamma(n+s+2)(s+1)!}\frac{s+1}{2^{2(s+1)+n-1}}x^{2(s+1)-1}\\
&= -x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{\Gamma(n+s+1+1)s!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s+n+1}\\
&= -x^{-n}J_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

που είναι η αποδεικτέα.

(iii) Απ' την (6.1) εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου του γινομένου δύο συναρτήσεων προκύπτει:

$$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(x)\} = x^nJ_{n-1}(x) \Rightarrow nx^{n-1}J_n(x) + x^nJ_n'(x) = x^nJ_{n-1}(x).$$

Διαιρούμε με x^n, οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισότητα:

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x).$$

(iv) Απ' την (6.2) εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου του γινομένου δύο συναρτήσεων προκύπτει:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x) \Rightarrow -nx^{-n-1}J_n(x) + x^{-n}J_n'(x) = -x^{-n}J_{n+1}(x).$$

Διαιρούμε με x^{-n}, οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισότητα:

$$J_n'(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x).$$

(v) Προκύπτει, αμέσως, προσθέτοντας τις (6.3) και (6.4):

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

(iv) Προκύπτει, αμέσως, αφαιρώντας την (6.4) απ' την (6.3):

$$0 = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x}J_n(x) \Rightarrow \frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x). \qquad \square$$

Θεώρημα 6.2: Όλα τα αποτελέσματα του θεωρήματος 6.1 ισχύουν, όταν οι συναρτήσεις Bessel $1^{ου}$ είδους $J_n(x)$, αντικατασταθούν με τις συναρτήσεις Bessel $2^{ου}$ είδους $Y_n(x)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την πρώτη σχέση: $\dfrac{d}{dx}\{x^nY_n(x)\} = x^nY_{n-1}(x)$. Οι άλλες σχέσεις αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο.
Θεωρούμε δύο περιπτώσεις: $n \in \mathbb{Z}$ και $n \notin \mathbb{Z}$.

(i) $n \notin \mathbb{Z}$, Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\} &= \frac{d}{dx}\Big\{\frac{\cos(n\pi)\{x^n J_n(x)\} - \{x^n J_{-n}(x)\}}{\sin(n\pi)}\Big\} \\
&= \frac{1}{\sin(n\pi)}\Big[\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} - \frac{d}{dx}\{x^n J_{-n}(x)\}\Big] \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sin(n\pi)}\Big[\cos(n\pi)\big(x^n J_{n-1}(x)\big) - \big(-x^n J_{-n+1}(x)\big)\Big] \\
&= \frac{x^n}{\sin(n\pi)}\Big[\cos(n\pi)J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^n}{\sin\big((n-1)\pi + \pi\big)}\Big[\cos\big((n-1)\pi + \pi\big)J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)\Big] \\
&= \frac{x^n}{-\sin\big((n-1)\pi\big)}\Big[-\cos\big((n-1)\pi\big)J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)\Big] \\
&= \frac{x^n}{\sin\big((n-1)\pi\big)}\Big[\cos\big((n-1)\pi\big)J_{n-1}(x) - J_{-(n-1)}(x)\Big] \\
&= x^n Y_{n-1}(x). \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

$(*)$ Η ισότητα ισχύει διότι $\frac{d}{dx}\{x^n J_{-n}(x)\} = \frac{d}{dx}\{x^n(-1)^n J_n(x)\} = (-1)^n\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} =$ $(-1)^n x^n J_{n-1}(x)$ και $-[(-1)^n x^n J_{n-1}(x)] = (-1)^{n-1}x^n J_{n-1}(x) = x^n J_{-(n-1)}(x)$.

(ii) $n \in \mathbb{Z}$,
Ως γνωστόν $Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x)$. Άρα παίρνοντας το όριο για $\nu \to n$ της σχέσης $\frac{d}{dx}\{x^\nu Y_\nu(x)\} = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$, που είναι το ζητούμενο. □

Σημείωση 6.1: Οι κυλινδρικές συναρτήσεις $C_n(x)$, οι οποίες ορίζονται ως:

$$C_n(x) = AJ_n(x) + BY_n(x), \quad A, B \text{ σταθερές}$$

και οι οποίες είναι λύσεις της δ.ε. Bessel, ικανοποιούν (να το δείτε) τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν οι $J_n(x)$ και $Y_n(x)$.

Πρόταση 6.1: Να δειχθεί ότι:
(i) $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$ και (ii) $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$.

Απόδειξη. (i) Αντικαθιστούμε στην (5.1) όπου ν το $1/2$, οπότε προκύπτει:

$$J_{1/2}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(1/2+\kappa+1)\kappa!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\kappa+1/2} = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa z^{2\kappa+1}2^{1/2}}{\Gamma(\kappa+3/2)\kappa!\sqrt{z}\,2^{2\kappa+1}}.$$

Επειδή: $\Gamma(\kappa+3/2)=\dfrac{\big(2(\kappa+1)\big)!\sqrt{\pi}}{2^{2(\kappa+1)}(\kappa+1)!}=\dfrac{(2\kappa+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2\kappa+1}\kappa!}$, διότι $\big(2(\kappa+1)\big)!=2(\kappa+1)\big[2(\kappa+1)-1\big]$, τότε:

$$J_{1/2}(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}z^{2\kappa+1}2^{1/2}2^{2\kappa+1}\kappa!}{(2\kappa+1)!\sqrt{\pi}\sqrt{z}2^{2\kappa+1}\kappa!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}z^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

(ii) Προκύπτει ομοίως απ' την (5.1) αν αντικαταστήσουμε το ν με $-1/2$ και λάβουμε υπ' όψιν μας ότι: $\Gamma(\kappa+1/2)=\dfrac{(2\kappa)!\sqrt{\pi}}{2^{2\kappa}\kappa!}$ και $\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}z^{2\kappa}}{(2\kappa)!}=\cos z$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να δειχθούν οι σχέσεις:

$$\textbf{i)}\ \ J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}\sin x-\cos x\Big),\ \ J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}\cos x+\sin x\Big)$$

$$\textbf{ii)}\ \ J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\Big(\frac{3}{x^2}-1\Big)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\Big\},\ \ J_{-5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\Big(\frac{3}{x^2}-1\Big)\cos x+\frac{3}{x}\sin x\Big\}$$

$$\textbf{iii)}\ \ Y_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\ \ Y_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$\textbf{iv)}\ \ Y_{3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}\cos x+\sin x\Big),\ \ Y_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}\sin x-\cos x\Big).$$

Λύση:

Για να δείξουμε τις ζητούμενες σχέσεις θα χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές μας σχέσεις: $J_{1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}sinx$ και $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}cosx$, την αναδρομική σχέση (6.6) και την αντίστοιχη για την $Y_n(x)$ για κατάλληλη τιμή του n.

i) Η αναδρομική σχέση (6.6) για $n=\dfrac{1}{2}$ και $n=-\dfrac{1}{2}$ μας δίνει, αντίστοιχα:

$$J_{3/2}(x)+J_{-1/2}(x)=\frac{2\frac{1}{2}}{x}J_{1/2}(x)\Rightarrow J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)$$
$$\Rightarrow J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx\Rightarrow J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}sinx-cosx\Big),$$

και

$$J_{1/2}(x)+J_{-3/2}(x)=\frac{2(-\frac{1}{2})}{x}J_{-1/2}(x)\Rightarrow J_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}J_{-1/2}(x)-J_{1/2}(x)$$
$$\Rightarrow J_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx\Rightarrow J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}cosx+sinx\Big).$$

ii) Ομοίως, η αναδρομική σχέση (6.6) για $n=\frac{3}{2}$ και $n=-\frac{3}{2}$ μας δίνει, αντίστοιχα:

$$
\begin{aligned}
&J_{5/2}(x)+J_{1/2}(x)=\frac{2\frac{3}{2}}{x}J_{3/2}(x)\Rightarrow J_{5/2}(x)=\frac{3}{x}J_{3/2}(x)-J_{1/2}(x)\\
&\Rightarrow J_{5/2}(x)=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}sinx-cosx\Big)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx\\
&\Rightarrow J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\Big(\frac{3}{x^2}-1\Big)sinx-\frac{3}{x}cosx\Big\},
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&J_{-5/2}(x)+J_{-1/2}(x)=\frac{2(-\frac{3}{2})}{x}J_{-3/2}(x)\Rightarrow J_{-5/2}(x)=-\frac{3}{x}J_{-3/2}(x)-J_{-1/2}(x)\\
&\Rightarrow J_{-5/2}(x)=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}cosx+sinx\Big)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx\\
&\Rightarrow J_{-5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{\Big(\frac{3}{x^2}-1\Big)cosx+\frac{3}{x}sinx\Big\}
\end{aligned}
$$

iii) Για την απόδειξη αυτών των σχέσεων χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης $Y_n(x)$ στον οποίο θέτουμε $n=\frac{1}{2}$ και $n=-\frac{1}{2}$, αντίστοιχα. Οπότε:

$$
\begin{aligned}
Y_{1/2}(x)&=\frac{cos(\pi/2)J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)}{sin(\pi/2)}=-J_{-1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx,\\
Y_{-1/2}(x)&=\frac{cos(-\pi/2)J_{-1/2}(x)-J_{1/2}(x)}{sin(-\pi/2)}=\frac{-J_{1/2}(x)}{-1}=J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx
\end{aligned}
$$

iv) Η αναδρομική σχέση (6.8) για $n=\frac{1}{2}$ και $n=-\frac{1}{2}$ μας δίνει, αντίστοιχα:

$$
\begin{aligned}
&Y_{3/2}(x)+Y_{-1/2}(x)=\frac{2\frac{1}{2}}{x}Y_{1/2}(x)\Rightarrow Y_{3/2}(x)=\frac{1}{x}Y_{1/2}(x)-Y_{-1/2}(x)\\
&\Rightarrow Y_{3/2}(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx\Rightarrow Y_{3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}cosx+sinx\Big),
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&Y_{1/2}(x)+Y_{-3/2}(x)=\frac{2(-\frac{1}{2})}{x}Y_{-1/2}(x)\Rightarrow Y_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}Y_{-1/2}(x)-Y_{1/2}(x)\\
&\Rightarrow Y_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx\Rightarrow Y_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{1}{x}sinx-cosx\Big)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2. Να δειχθεί ότι:

i) $x^2J_n''(x)=xJ_{n+1}(x)+\{n(n-1)-x^2\}J_n(x)$

ii) $4J_n''(x)=J_{n-2}(x)-2J_n(x)+J_{n+2}(x)$.

Λύση:

i) Επειδή η $J_n(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Bessel

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0,$$

έχουμε

$$x^2 J_n''(x) = -x J_n'(x) - (x^2 - n^2) J_n(x).$$

Χρησιμοποιώντας την (6.4), η ανωτέρω ισότητα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
x^2 J_n''(x) &= -x\big(\frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)\big) - (x^2 - n^2) J_n(x) \\
x^2 J_n''(x) &= -n J_n(x) + x J_{n+1}(x) - (x^2 - n^2) J_n(x) \\
x^2 J_n''(x) &= x J_{n+1}(x) + \{n^2 - n - x^2\} J_n(x),
\end{aligned}$$

που είναι η αποδεικτέα.

ii) Για την απόδειξη αυτής της σχέσης, χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση (6.5) θέτοντας όπου n το $n+1$ και το $n-1$, οπότε προκύπτουν, αντίστοιχα, οι ισότητες:

$2J_{n+1}'(x) = J_n(x) - J_{n+2}(x) \quad (*)$
$2J_{n-1}'(x) = J_{n-2}(x) - J_n(x) \quad (**)$

Επίσης, παραγωγίζουμε την αναδρομική σχέση (6.5) ως προς x:

$2J_n''(x) = J_{n-1}'(x) - J_{n+1}'(x)$

και αντικαθιστούμε τις $(*)$ και $(**)$, οπότε:

$$\begin{aligned}
&2J_n''(x) = \frac{J_{n-2}(x) - J_n(x)}{2} - \frac{J_n(x) - J_{n+2}(x)}{2} \\
&\Rightarrow 4J_n''(x) = J_{n-2}(x) - J_n(x) - J_n(x) + J_{n+2}(x) \\
&\Rightarrow 4J_n''(x) = J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x).
\end{aligned}$$

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι:

i) $\displaystyle\int_0^b x^3 J_2(x)dx = b^3 J_3(b)$, **ii**) $\displaystyle\int_0^b x J_0(ax)dx = \frac{b}{a} J_1(ab)$,

iii) $\displaystyle\int_0^b x^3 J_0(ax)dx = \frac{b^3}{a} J_1(ab) - 2\frac{b^2}{a^2} J_2(ab)$,

iv) $\displaystyle\int_0^b x^4 J_1(x)dx = b^4 J_2(b) - 2b^3 J_3(b) = (8b^2 - b^4) J_0(b) + (4b^3 - 16b) J_1(b)$,

v) $\displaystyle\int_0^b x^2 J_0(ax)dx = \frac{b^2}{a} J_1(ab) + \frac{b}{a^2} J_0(ab) - \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} J_0(u)du.$

Λύση:

i) Χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση (6.1) για $n = 3$, δηλαδή: $\dfrac{d}{dx}\{x^3 J_3(x)\} =$

$x^3 J_2(x)$ και αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης:

$$\int_0^b x^3 J_2(x) = \int_0^b \frac{d}{dx}\{x^3 J_3(x)\}dx = x^3 J_3(x)\Big|_{x=0}^{b} = b^3 J_3(b).$$

ii) Θέτουμε $ax = u \Rightarrow x = \dfrac{u}{a}$, $dx = \dfrac{du}{a}$, $(x = 0 \to u = 0,\ x = b \to u = ab)$, οπότε το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης γίνεται:

$$\int_0^b xJ_0(ax)dx = \int_0^{ab} \left(\frac{u}{a}\right) J_0(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} uJ_0(u)du \underset{n=1}{\overset{(6.1)}{=}} \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} \frac{d}{du}[uJ_1(u)]du$$
$$= \frac{1}{a^2} uJ_1(u)\Big|_{u=0}^{ab} = \frac{ab}{a^2}J_1(ab) = \frac{b}{a}J_1(ab).$$

iii) Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το **ii**), οπότε το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης γίνεται:

$$\int_0^b x^3 J_0(ax)dx = \int_0^{ab} \left(\frac{u}{a}\right)^3 J_0(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a^4}\int_0^{ab} u^3 J_0(u)du = \frac{1}{a^4}\int_0^{ab} u^2[uJ_0(u)]du$$
$$\underset{n=1}{\overset{(6.1)}{=}} \frac{1}{a^4}\int_0^{ab} u^2 \frac{d}{du}[uJ_1(u)]du = \frac{1}{a^4}\left\{u^2 uJ_1(u)\Big|_{u=0}^{ab} - \int_0^{ab} 2uuJ_1(u)du\right\}$$
$$\underset{n=2}{\overset{(6.1)}{=}} \frac{1}{a^4}\left\{a^3 b^3 J_1(ab) - 2\int_0^{ab} \frac{d}{du}[u^2 J_2(u)]du\right\} = \frac{b^3}{a}J_1(ab) - \frac{2}{a^4}u^2 J_2(u)\Big|_{u=0}^{ab}$$
$$= \frac{b^3}{a}J_1(ab) - 2\frac{b^2}{a^2}J_2(ab).$$

iv) Αποδεικνύουμε την πρώτη ισότητα, ξεκινώντας απ 'το αριστερό της μέλος:

$$\int_0^b x^4 J_1(x)dx = \int_0^b x^2[x^2 J_1(x)]dx \underset{n=2}{\overset{(6.1)}{=}} \int_0^b x^2 \frac{d}{dx}[x^2 J_2(x)]dx$$
$$= x^2 x^2 J_2(x)\Big|_{x=0}^{b} - 2\int_0^b x^3 J_2(x)dx \underset{n=3}{\overset{(6.1)}{=}} b^4 J_2(b) - 2\int_0^b \frac{d}{dx}\{x^3 J_3(x)\}dx$$
$$= b^4 J_2(b) - 2x^3 J_3(x)\Big|_{x=0}^{b} = b^4 J_2(b) - 2b^3 J_3(b).$$

Για να δείξουμε τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση (6.6), αρχικά για $n = 2$ και $x = b$, αντικαθιστώντας το $J_3(x)$ και ύστερα για $n = 1$ και $x = b$, αντικαθιστώντας το $J_2(x)$. Οπότε:

$$b^4 J_2(b) - 2b^3 J_3(b) = b^4 J_2(b) - 2b^3\left[\frac{4}{b}J_2(b) - J_1(b)\right] = b^4 J_2(b) - 8b^2 J_2(b) + 2b^3 J_1(b)$$
$$= (b^4 - 8b^2)\left[\frac{2}{b}J_1(b) - J_0(b)\right] + 2b^3 J_1(b)$$
$$= (4b^3 - 16b)J_1(b) + (8b^2 - b^4)J_0(b).$$

v) Θέτουμε $ax = u \Rightarrow x = \dfrac{u}{a}$, $dx = \dfrac{du}{a}$, για $x = 0$ το $u = 0$ και για $x = b$ το $u = ab$, το ολοκλήρωμα της ζητούμενης ισότητας γίνεται:

$$\begin{aligned}\int_0^b x^2 J_0(ax)dx &= \int_0^{ab}\Big(\frac{u}{a}\Big)^2 J_0(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} u^2 J_0(u)du = \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} u[uJ_0(u)]du\\ &= \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} u\frac{d}{du}[uJ_1(u)]du = \frac{1}{a^3}\Big[u^2 J_1(u)\Big|_{u=0}^{ab} - \int_0^{ab} uJ_1(u)du\Big]\\ &= \frac{b^2}{a}J_1(ab) - \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} u[-J_0'(u)]du\\ &= \frac{b^2}{a}J_1(ab) + \frac{1}{a^3}\Big[uJ_0(u)\Big|_{u=0}^{ab} - \int_0^{ab} J_0(u)du\Big]\\ &= \frac{b^2}{a}J_1(ab) + \frac{b}{a^2}J_0(ab) - \frac{1}{a^3}\int_0^{ab} J_0(u)du.\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι:

i) $\dfrac{d}{dx}\big\{xJ_n(x)J_{n+1}(x)\big\} = x[J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)]$,

ii) $\dfrac{d}{dx}\big\{J_n^2(x) + J_{n+1}^2(x)\big\} = 2\Big(\dfrac{n}{x}J_n^2(x) - \dfrac{n+1}{x}J_{n+1}^2(x)\Big)$,

iii) $2xJ_n^2(x) = \dfrac{d}{dx}\big[x^2\big(J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\big)\big]$.

Λύση:

i) Για να δείξουμε τη ζητούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με x^n τη συνάρτηση στο άγκιστρο στο αριστερό μέλος της και χρησιμοποιούμε τις αναδρομικές σχέσεις του θεωρήματος 6.1, οπότε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big\{xJ_n(x)J_{n+1}(x)\big\} &= \frac{d}{dx}\big\{x^{-n}J_n(x)x^{n+1}J_{n+1}(x)\big\}\\ &= \frac{d}{dx}\big\{x^{-n}J_n(x)\big\}x^{n+1}J_{n+1}(x) + x^{-n}J_n(x)\frac{d}{dx}\big\{x^{n+1}J_{n+1}(x)\big\}\\ &\underset{(6.2)}{\overset{(6.1),n\to n+1}{=}} \big[-x^{-n}J_{n+1}(x)\big]x^{n+1}J_{n+1}(x) + x^{-n}J_n(x)\big[x^{n+1}J_n(x)\big]\\ &= -xJ_{n+1}^2(x) + xJ_n^2(x)\\ &= x[J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)].\end{aligned}$$

ii) Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης, κάνοντας την παραγώγιση και χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις του θεωρήματος 6.1, τότε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big\{J_n^2(x) + J_{n+1}^2(x)\big\} &= 2J_n(x)J_n'(x) + 2J_{n+1}(x)J_{n+1}'(x)\\ &\underset{(6.3),n\to n+1}{\overset{(6.4)}{=}} 2J_n(x)\big[\frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)\big] + 2J_{n+1}(x)\big[J_n(x) - \frac{n+1}{x}J_{n+1}(x)\big]\\ &= 2\Big(\frac{n}{x}J_n^2(x) - \frac{n+1}{x}J_{n+1}^2(x)\Big).\end{aligned}$$

iii) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της παραγώγισης στο δεύτερο μέλος της ζητούμενης ισότητας:

$$\frac{d}{dx}\big[x^2\big(J_n^2(x)-J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\big)\big]=\frac{d}{dx}[x^2J_n^2(x)]-\frac{d}{dx}[x^2J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)]$$
$$=2xJ_n^2(x)+2x^2J_n(x)J_n'(x)-\frac{d}{dx}[x^2J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)] \qquad (*).$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (6.1) και (6.2), ο τελευταίος όρος της σχέσης $(*)$ γίνεται:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)] &= \frac{d}{dx}[x^{-n}J_{n-1}(x)x^{n+2}J_{n+1}(x)]=\frac{d}{dx}[x^{-(n-1)}J_{n-1}(x)x^{n+1}J_{n+1}(x)]\\
&=\frac{d}{dx}[x^{-(n-1)}J_{n-1}(x)]x^{n+1}J_{n+1}(x)+x^{-(n-1)}J_{n-1}(x)\frac{d}{dx}[x^{n+1}J_{n+1}(x)]\\
&=-x^{-(n-1)}J_n(x)x^{n+1}J_{n+1}(x)+x^{-(n-1)}J_{n-1}(x)x^{n+1}J_n(x)\\
&=-x^2J_n(x)J_{n+1}(x)+x^2J_n(x)J_{n-1}(x)\\
&=x^2J_n(x)[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]\overset{(6.5)}{=}2x^2J_n(x)J_n'(x),\end{aligned}$$

οπότε, αντικαθιστώντας στη σχέση $(*)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big[x^2\big(J_n^2(x)-J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\big)\big] &= 2xJ_n^2(x)+2x^2J_n(x)J_n'(x)-2x^2J_n(x)J_n'(x)\\
&=2xJ_n^2(x).\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού ορισμού των συναρτήσεων Bessel $J_n(x)$: $J_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\phi-n\phi)\,d\phi$, να δειχθεί ότι:

i) $J_0(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(xt)}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt$, **ii**) $J_0(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x\frac{\cos t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\,dt$.

Λύση:

i) Αρχικά, θέτουμε στον ολοκληρωτικό ορισμό $n=0$, ο οποίος γίνεται:

$J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos(x\sin\phi)\,d\phi=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\phi)\,d\phi.$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτουμε $t=\sin\phi \Rightarrow \phi=\sin^{-1}t$ και $d\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, για $\phi=0$ το $t=0$ και για $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ το $t=1$, έτσι:

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(xt)}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt.$$

ii) Όπως και στο **i**), θέτουμε στον ολοκληρωτικό ορισμό $n=0$, ο οποίος γίνεται:

$J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos(x\sin\phi)\,d\phi=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\phi)\,d\phi.$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτουμε $t = x\sin\phi \ \Rightarrow\ \phi = \sin^{-1}\left(\dfrac{t}{x}\right)$ και $d\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-t^2}}$, για $\phi = 0$ το $t = 0$ και για $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ το $t = x$, έτσι:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\cos t}{(x^2-t^2)^{1/2}}\,dt.$$

Άσκηση 6. Να δειχθεί ότι:

i) $\dfrac{d}{dx}\big[x^n J_n(ax)\big] = ax^n J_{n-1}(ax)$,

ii) $\dfrac{d}{dx}\big[x^{-\frac{n}{2}} J_n(\sqrt{ax})\big] = \dfrac{1}{2}a^{1/2}x^{-\frac{n+1}{2}} J_{n+1}(\sqrt{ax})$,

iii) $J_4(x) = \Big(\dfrac{48}{x^3} - \dfrac{8}{x}\Big)J_1(x) - \Big(\dfrac{24}{x^2} - 1\Big)J_0(x)$,

iv) $J_{n+2}(x)J_{-n}(x) - J_{-(n+2)}(x)J_n(x) = \dfrac{4(n+1)\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x^2}$.

Λύση:

Για να δείξουμε τις παραπάνω ισότητες θα χρησιμοποιήσουμε τις αναδρομικές σχέσεις του Θεωρήματος 6.1.

i) Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης στο οποίο θέτουμε $ax = y \ \Rightarrow\ x = \dfrac{y}{a}$ και $adx = dy \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{1}{a}dy$, οπότε:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big[x^n J_n(ax)\big] &= \frac{d}{\frac{1}{a}dy}\Big[\Big(\frac{y}{a}\Big)^n J_n(y)\Big] = a\frac{d}{dy}\Big[\frac{y^n}{a^n}J_n(y)\Big] = a^{1-n}\frac{d}{dy}\Big[y^n J_n(y)\Big]\\
&\underset{x\to y}{\overset{(6.1)}{=}} a^{1-n}\Big[y^n J_{n-1}(y)\Big] = a^{1-n}\Big[(ax)^n J_{n-1}(ax)\Big]\\
&= a^{1-n}\Big[a^n x^n J_{n-1}(ax)\Big] = ax^n J_{n-1}(ax).
\end{aligned}$$

ii) Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης στο οποίο θέτουμε $\sqrt{ax} = y \ \Rightarrow\ ax = y^2 \ \Rightarrow\ x = \dfrac{y^2}{a}$ και $adx = 2ydy \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{2y}{a}dy$, οπότε:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big[x^{-\frac{n}{2}} J_n(\sqrt{ax})\big] &= \frac{d}{\frac{2y}{a}dy}\Big[\Big(\frac{y^2}{a}\Big)^{-\frac{n}{2}} J_n(y)\Big] = \frac{a}{2y}\frac{d}{dy}\Big[\frac{y^{-n}}{a^{-n/2}}J_n(y)\Big] = \frac{a^{1+\frac{n}{2}}}{2y}\frac{d}{dy}\Big[y^{-n}J_n(y)\Big]\\
&\underset{x\to y}{\overset{(6.2)}{=}} \frac{a^{1+\frac{n}{2}}}{2y}\Big[-y^{-n}J_{n+1}(y)\Big] = \frac{a^{1+\frac{n}{2}}}{2\sqrt{ax}}\Big[-(ax)^{-n/2}J_{n+1}(\sqrt{ax})\Big]\\
&= \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{2x^{1/2}}\Big[-a^{-n/2}x^{-n/2}J_{n+1}(\sqrt{ax})\Big] = -\frac{a^{1/2}}{2}x^{-\frac{n+1}{2}}J_{n+1}(\sqrt{ax}).
\end{aligned}$$

iii) Χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση (6.6) στην οποία θέτουμε $n = 3$, οπότε:

$2\frac{3}{x}J_3(x) = J_2(x) + J_4(x) \Rightarrow J_4(x) = \frac{6}{x}J_3(x) - J_2(x) \quad (*)$
Στην ίδια αναδρομική σχέση θέτουμε $n = 2$, οπότε:
$2\frac{2}{x}J_2(x) = J_1(x) + J_3(x) \Rightarrow J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) \quad (**)$
Χρησιμοποιούμε ξανά την ίδια αναδρομική σχέση στην οποία τώρα θέτουμε $n = 1$, οπότε:
$2\frac{1}{x}J_1(x) = J_0(x) + J_2(x) \Rightarrow J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x) \quad (***)$
Αντικαθιστούμε τις σχέσεις $(**), (***)$ στην σχέση $(*)$, επομένως η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned} J_4(x) &= \frac{6}{x}\Big[\frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x)\Big] - J_2(x) = \frac{24}{x^2}J_2(x) - \frac{6}{x}J_1(x) - J_2(x) \\ &\overset{(***)}{=} \frac{24}{x^2}\Big[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\Big] - \frac{6}{x}J_1(x) - \frac{2}{x}J_1(x) + J_0(x) \\ &= \Big(\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}\Big)J_1(x) - \Big(\frac{24}{x^2} - 1\Big)J_0(x). \end{aligned}$$

iv) Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ δίνεται από τη σχέση: $J_n(x)J'_{-n}(x) - J'_n(x)J_{-n}(x) = -\frac{2\sin(n\pi)}{\pi x}$, στην οποία θέτουμε όπου n το $n+1$, έτσι:

$$J_{n+1}(x)J'_{-(n+1)}(x) - J'_{n+1}(x)J_{-(n+1)}(x) = -\frac{2\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x}. \qquad (1*)$$

Στην αναδρομική σχέση (6.5) αντικαθιστούμε όπου n το $n+1$ και το $-(n+1)$, ώστε να απαλείψουμε τις παραγώγους $J'_{n+1}(x)$ και $J'_{-(n+1)}(x)$, αντίστοιχα, από την σχέση $(1*)$. Έτσι:

$$J'_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\{J_n(x) - J_{n+2}(x)\}, \qquad (2*)$$

$$J'_{-(n+1)}(x) = \frac{1}{2}\{J_{-(n+2)}(x) - J_{-n}(x)\}. \qquad (3*)$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην $(1*)$, οπότε έχουμε:

$$\frac{J_{n+1}(x)}{2}\big\{J_{-(n+2)}(x) - J_{-n}(x)\big\} - \frac{J_{-(n+1)}(x)}{2}\big\{J_n(x) - J_{n+2}(x)\big\} = -\frac{2\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow J_{n+1}(x)J_{-(n+2)}(x) - J_{n+1}(x)J_{-n}(x) - J_{-(n+1)}(x)J_n(x) + J_{-(n+1)}(x)J_{n+2}(x) = \\ &= -\frac{4\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x}. \qquad (4*) \end{aligned}$$

Στην αναδρομική σχέση (6.6) αντικαθιστούμε όπου n το $n+1$ και το $-(n+1)$, ώστε να απαλείψουμε τα $J_{n+1}(x)$ και $J_{-(n+1)}(x)$, αντίστοιχα, από την σχέση $(4*)$. Έτσι:

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2(n+1)}\{J_n(x) + J_{n+2}(x)\}, \qquad (5*)$$

$$J_{-(n+1)}(x) = -\frac{x}{2(n+1)}\{J_{-(n+2)}(x) + J_{-n}(x)\}. \qquad (6*)$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην $(4*)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{2(n+1)}\big\{J_n(x)+J_{n+2}(x)\big\}J_{-(n+2)}(x)-\frac{x}{2(n+1)}\big\{J_n(x)+J_{n+2}(x)\big\}J_{-n}(x)\\
&+\frac{x}{2(n+1)}\big\{J_{-(n+2)}(x)+J_{-n}(x)\big\}J_n(x)-\frac{x}{2(n+1)}\big\{J_{-(n+2)}(x)+J_{-n}(x)\big\}J_{n+2}(x)\\
&=-\frac{4\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x}\\
&\Rightarrow\frac{x}{n+1}\big\{J_n(x)J_{-(n+2)}(x)-J_{n+2}(x)J_{-n}(x)\big\}=-\frac{4\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x}\\
&J_n(x)J_{-(n+2)}(x)-J_{n+2}(x)J_{-n}(x)=-\frac{4\sin\big((n+1)\pi\big)}{\pi x^2}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 7. Να δειχθούν οι παρακάτω ισότητες:

1) $J_3(x)=3J_1(x)+4J_1''(x)$, 2) $J_{n+2}=\big[2n+1-\dfrac{2n(n^2-1)}{x^2}\big]J_n(x)+2(n+1)J_n''(x)$,

3) $J_n(x)Y_n''(x)-J_n''(x)Y_n(x)=-\dfrac{2}{\pi x^2}$

4) $8J_n'''(x)=J_{n-3}(x)-3J_{n-1}(x)+3J_{n+1}(x)-J_{n+3}(x)$,

5) $(n+1)J_{n+1}(x)[J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)]=nJ_n(x)[J_n(x)+J_{n+2}(x)]$,

6) $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{t}J_1^2(t)dt=\frac{1}{2}[1-J_0^2(x)-J_1^2(x)]$.

Λύση:

Για να δείξουμε τις παραπάνω ισότητες, θα χρησιμοποιήσουμε τις αναδρομικές σχέσεις του θεωρήματος 6.1.

1) Από την αναδρομική σχέση (6.5) για $n=1$ παίρνουμε:

$J_0(x)-J_2(x)=2J_1'(x)\Rightarrow 2J_1''(x)=J_0'(x)-J_2'(x)\quad(*)$.

Από την (6.1) για $n=0$ παίρνουμε: $J_0'(x)=-J_1(x)$, και από την (6.5) για $n=2$ παίρνουμε: $2J_2'(x)=J_1(x)-J_3(x)\Rightarrow J_2'(x)=\frac{1}{2}\big(J_1(x)-J_3(x)\big)$, οπότε με αντικατάσταση στην $(*)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&2J_1''(x)=-J_1(x)-\frac{1}{2}J_1(x)+\frac{1}{2}J_3(x)\Rightarrow\frac{1}{2}J_3(x)=2J_1''(x)+\frac{3}{2}J_1(x)\Rightarrow\\
&J_3(x)=3J_1(x)+4J_1''(x)
\end{aligned}$$

2) Η συνάρτηση $J_n(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση Bessel, δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned}
&x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0\Rightarrow J_n''(x)+\frac{1}{x}J_n'(x)+\big(1-\frac{n^2}{x^2}\big)J_n(x)=0\\
&\Rightarrow 2(n+1)J_n''(x)+\frac{2(n+1)}{x}J_n'(x)+\big[2(n+1)-\frac{2n^2(n+1)}{x^2}\big]J_n(x)=0\quad(*)
\end{aligned}$$

Από την (6.4) έχουμε: $xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$ και από την (6.6) αναδρομική σχέση για $n\leftrightarrow n+1$, παίρνουμε:

$\dfrac{2(n+1)}{x}J_{n+1}(x) = J_n(x) + J_{n+2}(x) \Rightarrow J_{n+1}(x) = \dfrac{x}{2(n+1)}\big(J_n(x) + J_{n+2}(x)\big)$ και

$\dfrac{2(n+1)}{x}J_n'(x) = \dfrac{2n(n+1)}{x^2}J_n(x) - J_n(x) - J_{n+2}(x)$, οπότε αναικαθιστώντας στη σχέση $(*)$, έχουμε:

$$2(n+1)J_n''(x) + \frac{2n(n+1)}{x^2}J_n(x) - J_n(x) - J_{n+2}(x) + \big[2(n+1) - \frac{2n^2(n+1)}{x^2}\big]J_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow J_{n+2}(x) = \big[2n+1+\frac{2n(1-n^2)}{x^2}\big]J_n(x) + 2(n+1)J_n''(x)$$

$$\Rightarrow J_{n+2}(x) = \big[2n+1-\frac{2n(n^2-1)}{x^2}\big]J_n(x) + 2(n+1)J_n''(x)$$

3) Είναι

$$\begin{aligned} J_n(x)Y_n''(x) - J_n''(x)Y_n(x) &= J_n(x)\frac{\cos(n\pi)J_n''(x) - J_{-n}''(x)}{\sin(n\pi)} - J_n''(x)\frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \\ &= \frac{1}{\sin(n\pi)}[J_n''(x)J_{-n}(x) - J_n(x)J_{-n}''(x)], \quad (*) \end{aligned}$$

όμως,

$$\begin{aligned} &J_n(x)J_{-n}'(x) - J_{-n}(x)J_n'(x) = -\frac{2\sin(n\pi)}{\pi x} \Rightarrow \\ &J_n'(x)J_{-n}'(x) + J_n(x)J_{-n}''(x) - J_{-n}'(x)J_n'(x) - J_{-n}(x)J_n''(x) = \frac{2\sin(n\pi)}{\pi x^2} \Rightarrow \\ &J_n(x)J_{-n}''(x) - J_{-n}(x)J_n''(x) = \frac{2\sin(n\pi)}{\pi x^2}, \end{aligned}$$

οπότε: $(*) = \dfrac{1}{\sin(n\pi)}\big(-\dfrac{2\sin(n\pi)}{\pi x^2}\big) = -\dfrac{2}{\pi x^2}$, δηλαδή

$$J_n(x)Y_n''(x) - J_n''(x)Y_n(x) = -\frac{2}{\pi x^2}$$

4) Ως γνωστόν: $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \Rightarrow 2J_n''(x) = J_{n-1}'(x) - J_{n+1}'(x)$,
εφαρμόζουμε την (6.5) για $n \leftrightarrow n-1, n+1$ αντίστοιχα:
$2J_n''(x) = \dfrac{1}{2}\big(J_{n-2}(x) - J_n(x)\big) - \dfrac{1}{2}\big(J_n(x) - J_{n+2}(x)\big)$, πολλαπλασιάζουμε με 4 και παραγωγίζουμε: $8J_n'''(x) = 2J_{n-2}'(x) - 2J_n'(x) - 2J_n'(x) + 2J_{n+2}(x)$,
εφαρμόζουμε πάλι την (6.5) για $n \leftrightarrow n-2, n, n+1$ αντίστοιχα και παίρνουμε:
$8J_n'''(x) = (J_{n-3}(x) - J_{n-1}(x)) - 2(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) + (J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x))$, οπότε

$$8J_n'''(x) = J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)$$

5) Ισχύει η σχέση: $\dfrac{2n}{x}J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$, η οποία για $n \leftrightarrow n+1$ γίνεται:
$\dfrac{2(n+1)}{x}J_{n+1}(x) = J_{n+2}(x) + J_n(x)$, επομένως:

$$\begin{aligned} (n+1)J_{n+1}(x)[J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] &= (n+1)\frac{x}{2(n+1)}\big[J_n(x) + J_{n+2}(x)\big]\frac{2n}{x}J_n(x) \\ &= nJ_n(x)[J_n(x) + J_{n+2}(x)] \end{aligned}$$

6) Η αναδρομική σχέση (6.3) για $n = 1$, γίνεται: $J_1'(t) = J_0(t) - \frac{1}{t}J_1(t)$, την πολλαπλασιάζουμε με $J_1(t)$:

$J_1'(t)J_1(t) = J_0(t)J_1(t) - \frac{1}{t}J_1^2(t) \Rightarrow \frac{1}{t}J_1^2(t) = J_0(t)J_1(t) - J_1'(t)J_1(t),$

και χρησιμοποιώντας ότι $J_0'(t) = -J_1(t)$ (το οποίο προκύπτει από την αναδρομική σχέση (6.2) για $n = 0$), τότε:

$\frac{1}{t}J_1^2(t) = -J_0(t)J_0'(t) - J_1'(t)J_1(t) \Rightarrow \frac{1}{t}J_1^2(t) = -\frac{[J_0^2(t)]'}{2} - \frac{[J_1^2(t)]'}{2}.$

Ολοκληρώνοντας τώρα την τελευταία ισότητα από 0 έως x, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{t}J_1^2(t)dt &= -\frac{1}{2}\int_0^x \big([J_0^2(t)]' + [J_1^2(t)]'\big)dt = -\frac{1}{2}[J_0^2(x) + J_1^2(x)] + \frac{1}{2}[J_0^2(0) + J_1^2(0)] \\ &= \frac{1}{2}[1 - J_0^2(x) - J_1^2(x)].\end{aligned}$$

Άσκηση 8. Να δειχθεί ότι:

$$\int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} = -\frac{\pi}{2\sin(n\pi)}\frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)}.$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: $J_n(x)J_{-n}'(x) - J_n'(x)J_{-n}(x) = -\frac{2\sin(n\pi)}{\pi x}.$

Επειδή στο δεύτερο μέλος έχουμε τον όρο $\frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)}$, ξεκινούμε παραγωγίζοντας το κλάσμα αυτό: $\Big(\frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)}\Big)' = \frac{J_{-n}'(x)J_n(x) - J_{-n}(x)J_n'(x)}{J_n^2(x)} = -\frac{2\sin(n\pi)}{\pi x J_n^2(x)}.$

Είναι προφανές ότι ολοκληρώνοντας την τελευταία ισότητα, έχουμε:

$$-\frac{2\sin(n\pi)}{\pi}\int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} = \frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)} \Rightarrow \int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} = -\frac{\pi}{2\sin(n\pi)}\frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)}.$$

Άσκηση 9. Με τη βοήθεια των αναδρομικών σχέσεων, να δειχθεί ότι η συνάρτηση Bessel $J_n(x)$ ικανοποιεί τη δ.ε. Bessel: $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Λύση:

Παραγωγίζουμε την αναδομική σχέση (6.3) ως προς x, οπότε:

$J_n''(x) = J_{n-1}'(x) + \frac{n}{x^2}J_n(x) - \frac{n}{x}J_n'(x). \quad (*)$

Επίσης, η αναδρομική σχέση (6.4) για $n \leftrightarrow n-1$ γίνεται:

$$J_{n-1}'(x) = \frac{n-1}{x}J_{n-1}(x) - J_n(x) \overset{(6.3)}{\Rightarrow} J_{n-1}'(x) = \frac{n-1}{x}\big[J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x)\big] - J_n(x). \quad (**)$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&J_n''(x) = \frac{n-1}{x}\left[J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x)\right] - J_n(x) + \frac{n}{x^2}J_n(x) - \frac{n}{x}J_n'(x) \Rightarrow \\
&J_n''(x) = \frac{n-1}{x}J_n'(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}J_n(x) - J_n(x) + \frac{n}{x^2}J_n(x) - \frac{n}{x}J_n'(x) \Rightarrow \\
&J_n''(x) = \frac{n-1-n}{x}J_n'(x) + \frac{n^2-n+n-x^2}{x^2}J_n(x) \Rightarrow \\
&x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-n^2)y(x) = 0.
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

Μασσαλάς Χ. (2010) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Cutenberg.

Σιαφαρίκας Π. (2009) *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Hochstadt H. (1986) *The function of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. N.Y..

Lebedev N.N. (1972) *Special functions and their Applications*, Dover Publications.

Luke Y. L. (1969) *The special functions and their Approximations-Volume I*, Academic Press.

Watson G. N. (1966) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press.