Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ

Ενότητα: Το Θεώρημα Gauss - Bonnet

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα Gauss - Bonnet

Το Θεώρημα των Gauss - Bonnet αποτελεί αναμφισβήτητα ένα από τα πιο σημαντικά (αν όχι το πιο σημαντικό) αποτελέσματα της διαφορικής γεωμετρίας των επιφανειών. Μέσω του θεωρήματος αυτού αναδεικνύεται μια απρόσμενη και βαθιά σχέση μεταξύ τοπικών ποσοτήτων μιας επιφάνειας, όπως η καμπυλότητα Gauss και η γεωδαισιακή καμπυλότητα και της τοπολογίας της επιφάνειας (ολική έννοια). Έχει επιπλέον, σημαντικές γενικεύσεις σε μεγαλύτερες διαστάσεις, δίνοντας ώθηση στη γεωμετρία και τοπολογία του εικοστού αιώνα. Το Θεώρημα των Gauss - Bonnet έχει δύο κύριες εκδοχές, μια τοπική και μια ολική. Η τοπική εκδοχή αφορά κανονικές περιοχές οι οποίες είναι απλές (δηλαδή ομοιομορφικές με έναν κλειστό δίσκο) και μικρές (δηλαδή βρίσκονται στην εικόνα μιας τοπικής παραμέτρησης της επιφάνειας). Η ολική εκδοχή του θεωρήματος αφορά οποιαδήποτε κανονική περιοχή σε μια επιφάνεια και ανάγεται μέσω μιας διαδικασίας "κοψιμάτων" της περιοχής αυτής σε απλές και μικρές περιοχές, ώστε να εφαρμοστεί η τοπική εκδοχή του θεωρήματος Gauss - Bonnet. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιεί την έννοια της τριγωνοποίησης μιας επιφάνειας όπου εδώ εισάγεται μια σημαντική τοπολογική αναλλοίωτη, η χαρακτηριστική των Euler - Poincaré.

Η τριγωνοποίηση μιας επιφάνειας είναι μια μη τετριμμένη μαθηματική διαδικασία και μας οδηγεί στον σημαντικό κλάδο των μαθηματικών, την αλγεβρική τοπολογία. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση χωρίς απόδειξη του θεωρήματος των Gauss - Bonnet, κυρίως μέσω κατανόησης της διατύπωσής του, αλλά και κάποιων σημαντικών εφαρμογών που προκύπτουν από αυτό. Προτρέπουμε τους φοιτητές για εκπόνηση διπλωματικών εργασιών στα θέματα αυτά.

Πριν διατυπώσουμε την πρώτη εκδοχή του θεωρήματος Gauss - Bonnet χρειαζόμαστε να θυμίσουμε από την ανάλυση την έννοια του ολοκληρώματος μιας πραγματικής συνάρτησης επί ενός ανοικτού χωρίου προσαρμοσμένη στην περίπτωση των επιφανειών (βλ. και Marsen - Tromba: Διανυσματικός Λογισμός).

Έστω M ένα τμήμα μιας κανονικής επιφάνειας με παραμέτρηση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to$

$X(U) = M$, $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ και έστω $f : M \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση. (Στην περίπτωσή μας θα είναι $f = K : M \to \mathbb{R}$, η καμπυλότητα Gauss της M). Θέλουμε να ορίσουμε την έννοια ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int_M f dA$, όπου dA το στοιχειώδες εμβαδό στο U. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2, \end{aligned}$$

συνεπώς $dA = \|X_u \times X_v\| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$. Εναλλακτικά, έχουμε ότι

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2},$$

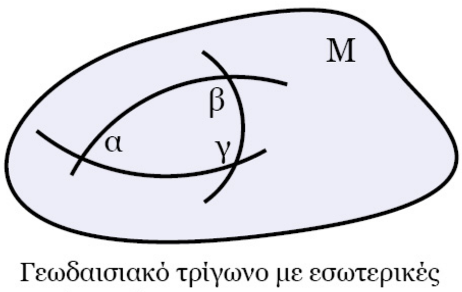
όπου $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ μια από τις τρείς ελάσσονες Ιακωβιανές ορίζουσες του 3×2 πίνακα $[dX]^t = (X_u, X_v)$ (βλ. σχετικούς συμβολισμούς στο Ανοικτό Μάθημα *Διαφορική Γεωμετρία*). Θεωρούμε τη σύνθεση $\hat{f} = f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$\int_M f dA = \int \int_U \hat{f}(u,v) \|X_u \times X_v\| dudv.$$

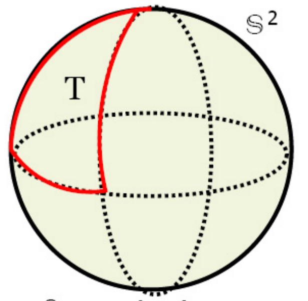
Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση X. Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο είχε αποδειχθεί από τον Gauss, μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί τον πρόγονο του θεωρήματος Gauss - Bonnet. Αφορά γεωδαισιακά τρίγωνα σε μια επιφάνεια, δηλαδή τρίγωνα των οποίων οι πλεύρες είναι τμήματα γεωδαισιακών καμπυλών.

Θεώρημα 5.1. *(Gauss) Έστω T ένα γεωδαισιακό τρίγωνο σε μια κανονική επιφάνεια M με εσωτερικές γωνίες α, β, γ. Αν K είναι η καμπυλότητα Gauss της M, τότε*

$$\int_T K dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$



Γεωδαισιακό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες α, β, γ



Γεωδαισιακό τρίγωνο στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$

Παρατήρηση. Είναι προφανές ότι για την περίπτωση που $M = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ τότε $K = 0$, απ΄ όπου προκύπτει η γνωστή ισότητα $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ για επίπεδο τρίγωνο. Συνεπώς, η καμπυλότητα "δημιουργεί μη Ευκλείδεια γεωμετρία". Θα διατυπώσουμε τώρα την τοπική εκδοχή του θεωρήματος Gauss - Bonnet και στη συνέχεια θα εξηγήσουμε τους όρους που εμφανίζονται στην διατύπωση αυτή.

Θεώρημα 5.2. *(Gauss - Bonnet, πρώτη τοπική εκδοχή)*
Έστω M μια προσανατολίσιμη κανονική επιφάνεια με τοπική παραμέτρηση $X : U \to M$ τέτοια ώστε το σύνολο $X(U)$ να είναι απλά συνεκτικό. Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to M$ μια κανονική, απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη στο $X(U)$, με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Έστω $D = \mathrm{Int}(\gamma) \subset X(U) \subset M$ το εσωτερικό της γ και $k_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η γεωδαισιακή καμπυλότητά της. Αν K είναι η καμπυλότητα Gauss της M και $L \in \mathbb{R}^+$ η περίοδος της γ, τότε ισχύει

$$\int_0^L k_g(s)ds = 2\pi - \int_D KdA.$$

Πόρισμα 5.1. *Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μια κανονική, απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη (επίπεδη) καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Αν $L \in \mathbb{R}^+$ είναι η περίοδος της γ και $k_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η γεωδαισιακή της καμπυλότητα, τότε*

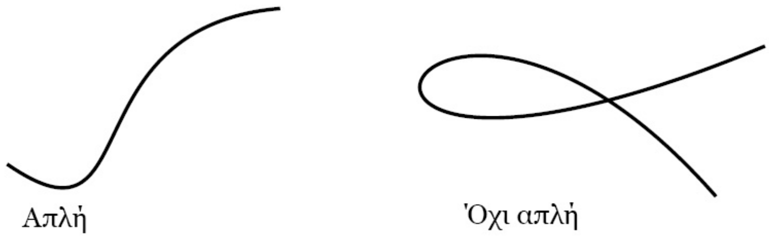
$$\int_0^L k_g(s)ds = 2\pi.$$

Επεξηγήσεις. Όλες οι παρακάτω έννοιες είναι δυνατόν να οριστούν αυστηρά. Εδώ δίνουμε απλώς διαισθητική περιγραφή.

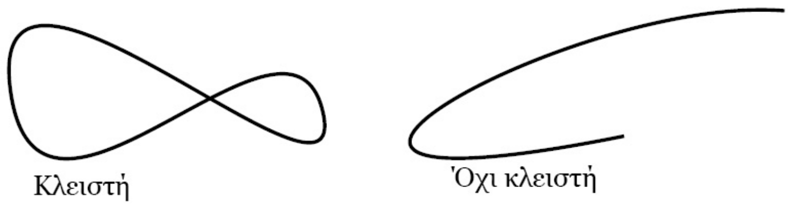
1) <u>Προσανατολίσιμη επιφάνεια.</u> Την έννοια αυτή έχουμε χρησιμοποιήσει αρκετές φορές στο ανοικτό μάθημα *Διαφορική Γεωμετρία*. Σημαίνει ότι η επιφάνεια M επιδέχεται μια απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$.

2) <u>Απλά συνεκτικό χωρίο του $\mathbb{R}^3$.</u> Είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^3$ το οποίο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι δεν έχει οπές. Ισοδύναμα, κάθε απλή, κλεστή καμπύλη στο M μπορεί να "συρρικνωθεί" σε ένα σημείο. Για παράδειγμα η σφαίρα $M = \mathbb{S}^2$ είναι απλά συνεκτικό σύνολο ενώ ο δακτύλιος (torus) $M = \mathbb{T}^2$ δεν είναι απλά συνεκτικό.

3) <u>Απλή καμπύλη.</u> Είναι μια καμπύλη η οποία δεν έχει αυτοτομές.



4) Κλειστή καμπύλη. Είναι μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \to M$ τέτοια ώστε $\gamma(a) = \gamma(b)$.



5) Θετικά προσανατολισμένη καμπύλη σε επιφάνεια. Ο προσανατολισμός αναφέρεται ως προς τη συγκεκριμένη παραμέτρηση X της επιφάνειας. Σχετίζεται με τον δείκτη στροφής (rotation index) της καμπύλης, έννοια που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει. Για τις ανάγκες μας αρκεί η έννοια του προσανατολισμού καμπύλης όπως έχει χρησιμοποιηθεί στο μάθημα Πραγματική Ανάλυση IV (Θεώρημα Stokes κλπ). Εκεί, μια καμπύλη γ σε μια επιφάνεια M ονομάζεται θετικά προσανατολισμένη όταν εφαρμόζοντας τον κανόνα των τριών δακτύλων το κάθετο διάνυσμα N της επιφάνειας δείχνει στην κατεύθυνση του αντίχειρα.
6) Περίοδος της καμπύλης. Δηλώνει το πόσες φορές διαγράφουμε το ίχνος της καμπύλης.

Ορισμός 5.1. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια. Μια συνεχής περιοδική συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \to M$ με περίοδο $L \in \mathbb{R}^+$ αποτελεί παραμέτρηση μιας κατά τμήματα κανονικής καμπύλης (ή ενός καμπυλόγραμμου πολυγώνου) στην M εάν υπάρχει μια διαμέριση*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = L$$

του διαστήματος $[0, L]$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

1. *$\gamma(t) = \gamma(t^*)$ εάν και μόνο εάν $(t - t^*) = kL$, $k \in \mathbb{Z}$,*

2. *η συνάρτηση $\gamma|_{t_i, t_{i+1}} : (t_i, t_{i+1}) \to \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη για $i = 0, 1, \ldots, n-1$,*

3. *οι μονόπλευρες παράγωγοι*

$$\dot{\gamma}^-(t_i) = \lim_{t \to t_i^-} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t)}{t_i - t}, \qquad \dot{\gamma}^+(t_i) = \lim_{t \to t_i^+} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t)}{t_i - t}$$

υπάρχουν, είναι μη μηδενικές και δεν είναι παράλληλες.

Για μια τέτοια καμπύλη ορίζονται οι εσωτερικές γωνίες ως οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφπτόμενες σε κάθε κορυφή της καμπύλης. Αντίστοιχα, ορίζονται οι εξωτερικές γωνίες.

Θεώρημα 5.3. *(Gauss - Bonnet, δεύτερη τοπική εκδοχή)*
Έστω M μια κανονική προσανατολίσιμη επιφάνεια με τοπική παραμέτρηση $X : U \to M$ τέτοια ώστε το σύνολο $X(U) \subset M$ είναι απλά συνεκτικό. Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to M$ μια κατά τμήματα κανονική, απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη στην M με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Έστω $D = \mathrm{Int}(\gamma)$ το εσωτερικό της γ και $k_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ σε κάθε κανονικό (λείο) τμήμα της. Αν $L \in \mathbb{R}^+$ είναι η περίοδος της γ, K η καμπυλότητα Gauss της M και $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ οι εσωτερικές γωνίες των κορυφών της γ, τότε ισχύει

$$\int_0^L k_g(s)ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \int_D K dA.$$

Παρατήρηση. Αν οι εσωτερικές γωνίες αντικατασταθούν με τις εξωτερικές γωνίες τότε το δεξί μέλος παίρνει τη μορφή

$$2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i - \int_D K dA.$$

Το θεώρημα αυτό έχει ενδιαφέροντα πορίσματα όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Πόρισμα 5.2. *(Θεώρημα Gauss). Αν $\gamma : \mathbb{R} \to M$ είναι ένα γεωδαισιακό τρίγωνο σε μια επιφάνεια M με εσωτερικές γωνίες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, τότε*

$$\int_T K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi,$$

όπου T το εσωτερικό του τριγώνου και K η καμπυλότητα Gauss της M.

Απόδειξη. Στο προηγούμενο θεώρημα είναι $n = 3$ και σε κάθε τμήμα της γ η γεωδαισιακή καμπυλότητα είναι $k_g = 0$. □

Πόρισμα 5.3. *Έστω ένα κανονικό n-γωνο του επιπέδου του οποίου οι ακμές είναι ευθύγραμμα τμήματα και με εσωτερικές του γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Τότε ισχύει*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$$

Απόδειξη. Είναι $K = 0$ και $k_g = 0$, άρα το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 5.3. □

Πόρισμα 5.4. *Έστω ένα καμπυλόγραμμο n-γωνο D της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ του οποίου οι πλευρές είναι τόξα μέγιστων κύκλων (δηλαδή ένα γεωδαισιακό n-γωνο). Τότε ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > (n-2)\pi$$

Απόδειξη. Είναι $K = 1$ για τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και $k_g = 0$, άρα από το Θεώρημα εώρημα 5.3 προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + \int_D 1dA = (n-2)\pi + \text{ Εμβαδό}(D),$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. □

Πόρισμα 5.5. *Για $n = 3$ το Πόρισμα 5.4 μας λέει ότι το εμβαδό E ενός σφαιρικού τριγώνου με εσωτερικές γωνίες α, β, γ ισούται με $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Απόδειξη. Είναι $\alpha + \beta + \gamma = \pi + E$ άρα $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. □

Η προηγούμενη σχέση για το εμβαδό σφαιρικού τριγώνου είναι χαρακτηριστική ισότητα της σφαιρικής (ή ελλειπτικής) γεωμετρίας. Θυμίζουμε ότι αν το τρίγωνο είναι επίπεδο, τότε ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = E$.

Πόρισμα 5.6. *Για ένα γεωδαισιακό n-γωνο της ψευδοσφαίρας ($K = -1$) ισχύει $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-2)\pi$. Συνεπώς, το εμβαδό E ενός n-γωνου στην ψευδοσφαίρα είναι $E = (n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n$. Για $n = 3$ προκύπτει η κλασική σχέση $E = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ που αποτελεί την χαρακτηριστική ισότητα για το εμβαδό ενός τριγώνου στην υπερβολική γεωμετρία.*

Ερχόμαστε τώρα στην ολική εκδοχή του θεωρήματος Gauss - Bonnet. Όπως και προηγουμένως, θα δώσουμε εξηγήσεις για την ορολογία στη συνέχεια.

Θεώρημα 5.4. *(Gauss - Bonnet, ολική εκδοχή)*
Έστω M μια προσανατολίσιμη, συμπαγής κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss K και χαρακτηριστική του Euler $\mathcal{X}(M)$. Τότε ισχύει

$$\int_M K dA = 2\pi \mathcal{X}(M).$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ονομάζεται ολική καμπυλότητα (total curvature) της M. Σημειώνουμε ότι υπάρχει και άλλη εκδοχή του θεωρήματος αυτού, την οποία δεν θα αναφέρουμε εδώ.

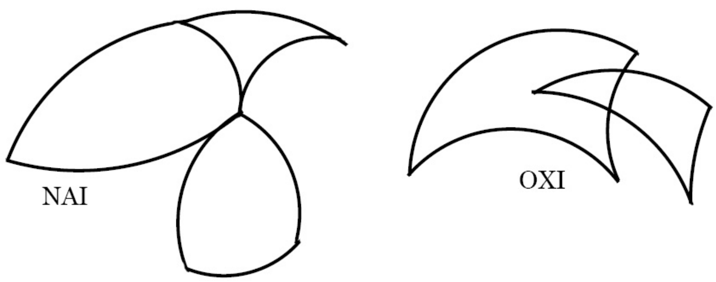
Επεξηγήσεις. 1) Συμπαγής επιφάνεια M σημαίνει κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και φραγμένο, δηλαδή η M περιέχεται σε μια μπάλα του $\mathbb{R}^3$. Καμμιά φορά χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία ο παραπλανητικός όρος "κλειστή επιφάνεια χωρίς σύνορο".

2) Το αριστερό μέλος αφορά ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : M \to \mathbb{R}$ σε ολόκληρη την συμπαγή επιφάνεια και όχι απλώς σε ένα τμήμα της $X(U) \subset M$ μέσω μιας παραμέτρησης $X : U \to M$. Στην ειδική περίπτωση όπου η $f : M \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη $f|_{M \setminus X(U)} \equiv 0$, τότε ορίζουμε

$$\int_M f dA = \int\int_U f(X(u,v)) \|X_u \times X_v\| dudv.$$

Διαφορετικά ο ορισμός είναι πιο περίπλοκος (χρειαζόμαστε διαμέριση της μονάδας κλπ).

3) Η πιο σημαντική έννοια είναι εδώ η χαρακτηριστική του Euler για μια τριγωνοποίηση μιας επιφάνειας. Μια τριγωνοποίηση (triangulation) μιας επιφάνειας M είναι μια κάλυψη της M με εικόνες τριγώνων, οι οποίες έχουν την εξής ιδιότητα: Αν δύο τρίγωνα τέμνονται, τότε η τομή τους είναι είτε μια κοινή ακμή, είτε μια κοινή κορυφή και μόνο.



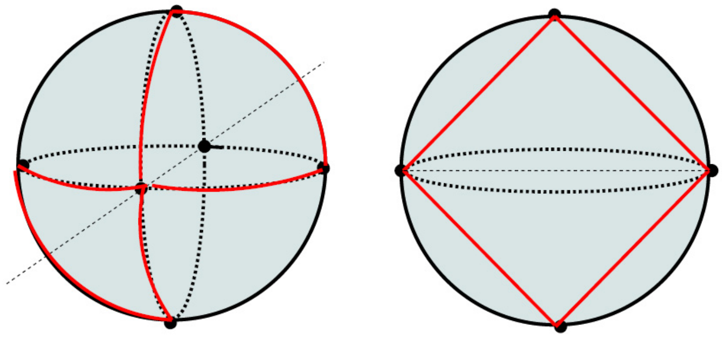
Ισχύει το εξής

Θεώρημα 5.5. *Κάθε συμπαγής επιφάνεια επιδέχεται μια πεπερασμένη τριγωνοποίηση.*

Έστω K ο αριθμός των κορυφών, A ο αριθμός των ακμών και E ο αριθμός των εδρών μιας τριγωνοποίησης της συμπαγούς επιφάνειας M. Η χαρακτηριστική του Euler (ή Euler - Poincaré) της M είναι ο αριθμός

$$\mathcal{X}(M) = E - A + K.$$

Παράδειγμα 5.1. Παρακάτω φαίνονται δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις της σφαίρας. Για την πρώτη τριγωνοποίηση είναι $K = 6, A = 12, E = 8$ άρα $\mathcal{X}(\mathbb{S}^2) = K - A + E = 6 - 12 + 8 = 2$. Για τη δεύτερη τριγωνοποίηση είναι $K = 4, A = 6, E = 4$, άρα $\mathcal{X}(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$.



Το αποτέλεσμα δεν είναι τυχαίο. Πράγματι, ισχύει το εξής σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 5.6. 1) *Η χαρακτηριστική του Euler όπως ορίστηκε είναι ανεξάρτητη της τριγωνοποίησης της επιφάνειας.*
2) *Αν M, M' είναι δύο ομοιομορφικές επιφάνειες, τότε $\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M')$. Συνεπώς, η χαρακτηριστική του Euler είναι μια τοπολογική αναλλοίωτη.*

Σημειώστε επίσης ότι στο παραπάνω παράδειγμα, οι δύο τριγωνοποιήσεις της σφαίρας έγιναν με τριγωνοποιήσεις ομοιομορφικές με ένα κυρτό πολύτοπο (γενίκευση του κανονικού πολυέδρου). Θυμίζουμε ότι γενικά για ένα κυρτό πολύτοπο ισχύει ο τύπος του Euler $K + E = A + 2$, ο οποίος μνημονεύεται για ευκολία με την φράση "Κωνσταντίνος και Ελένη Άγιοι και οι δύο".

Παράδειγμα 5.2. Για τον δακτύλιο (torus) $\mathbb{T}^2$ ισχύει $\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) = 0$. Αυτό είναι λίγο πιο δύσκολο να αποδειχθεί.

Παράδειγμα 5.3. Για τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ με $K = 1$ είδαμε ότι $\mathcal{X}(\mathbb{S}^2) = 2$. Τότε από το Θεώρημα Gauss - Bonnet προκύπτει ότι

$$\text{Εμβαδό}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} K dA = 4\pi.$$

Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτο, αλλά το ενδιαφέρον είναι ότι αν παραμορφώσουμε τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ κατά συνεχή τρόπο (δηλαδή προκύψει μια επιφάνεια M ομοιομορφική με την σφαίρα $\mathbb{S}^2$) τότε

$$\int_M K dA = 4\pi.$$

Με άλλα λόγια, η καμπυλότητα της νέας επιφάνειας M αλλάζει, αλλά η ολική καμπυλότητα παραμένει σταθερή.

Θα κλείσουμε τη σερά αυτή των Ανοικτών Μαθημάτων *Διαφορική Γεωμετρία* και *Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ* διατυπώνοντας το σημαντικό *θεώρημα ταξινόμησης των προσανατολίσιμων συμπαγών επιφανειών.*

Ορισμός 5.2. *Ένα χερούλι (handle) σε μια επιφάνεια M είναι μια κανονική περιοχή $H \subset M$ ομοιομορφική με έναν κλειστό (πεπερασμένο) κυκλικό κύλινδρο και τέτοια ώστε το σύνολο $M \setminus H$ να είναι συνεκτικό. Έστω $g \in \mathbb{N}_0$. Μια σφαίρα με g το πλήθος χερούλια είναι μια επιφάνεια M η οποία περιέχει g το πλήθος ξένων ανά δύο χερουλιών $H_1, \ldots, H_g$, κατά τέτοιον τρόπο ώστε, το σύνολο $M \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_g)$ να είναι ομοιομορφικό με μια σφαίρα στην οποία έχουν αφαιρεθεί $2g$ το πλήθος ξένες ανά δύο γεωδαισιακές μπάλλες.*

Σημείωση. 1) Μια γεωδαισιακή μπάλλα (geodesic ball) είναι το σύνολο $B_{\epsilon_p}(p) = \exp_p(B_{\epsilon_p}(0))$ (βλ. σχετικά με εκθετική απεικόνιση Κεφάλαιο 3).
2) Ο αριθμός g των χερουλιών ισούται με τον αριθμό των οπών μιας επιφάνειας M και ονομάζεται γένος (genus) της M.

Θεώρημα 5.7. (*Ταξινόμησης των προσανατολίσιμων συμπαγών επιφανειών*)
Κάθε προσανατολίσιμη συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μια σφαίρα με $g \geq 0$ χερούλια και της οποίας η χαρακτηριστική του Euler ισούται με $2 - 2g$. Ειδικότερα:

1. *Δύο προσανατολίσιμες συμπαγείς επιφάνειες είναι ομοιομορφικές εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια χαρακτηριστική του Euler.*

2. *Η σφαίρα είναι η μόνη προσανατολίσιμη συμπαγής επιφάνεια με θετική χαρακτηριστική του Euler.*

3. *Ο δακτύλιος (torus) είναι η μόνη προσανατολίσιμη συμπαγής επιφάνεια με χαρακτηριστική του Euler ίση με το μηδέν.*

Παρατήρηση. Στον $\mathbb{R}^3$ δεν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες οι οποίες να μην είναι προσανατολίσιμες.

Υπάρχουν πολλές πηγές όπου μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, ανάλογα με τις λεπτομέρειες που επιθυμεί να δεί. Για παράδειγμα, οι παρακάτω

P. Andrews: *The classifications of surfaces*, Amer. Math. Monthly, 95 (1988) 861-867.
M. A. Armstrong: *Basic Topology*, Mc Graw Hill, 1979
J. Gallier - D. Xu: *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surface*, Springer, 2013
C. Thomassen: *The Jordan - Schönffies theorem and the classification of surfaces*, Amer. Math. Monthly, 99 (1992) 116-131.

5.1 Λυμένα παραδείγματα

Σημειώνουμε ότι οι παρακάτω λύσεις είναι σε κάποια σημεία συνοπτικές.

Παράδειγμα 5.4. *Έστω M μια συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο της M στο οποίο η καμπυλότητα Gauss μηδενίζεται.*

Λύση

Από το Θεώρημα Gauss - Bonnet (ολική εκδοχη) έχουμε ότι

$$\int_M K dA = 2\pi \mathcal{X}(M) = 4\pi(1-g) \leq 0.$$

Λόγω της συμπάγειας της M υπάρχει ένα σημείο $p \in M$ τέτοιο ώστε $K(p) > 0$, συνεπώς λόγω της συνέχειας της $K : M \to \mathbb{R}$ υπάρχει μια περιοχή U του p ώστε $K|_U > 0$. Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα άλλο σημείο $q \in M$ ώστε $K(q) < 0$. Πράγματι, αν αυτό δεν συνέβαινε τότε θα είχαμε

$$0 \geq \int_M K dA \geq \int_U K dA > 0,$$

άτοπο. Συνεπώς, λόγω της συνεκτικότητας της M η συνεχής συνάρτηση K πρέπει να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο της M.

Παράδειγμα 5.5. *Θεωρούμε τον δακτύλιο (torus) $\mathbb{T}^2$ ως επιφάνεια εκ περιστροφής που προκύπτει περιστρέφοντας τον κύκλο $(x-\alpha)^2 + z^2 = r^2$ περί τον άξονα z:*

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \,:\, (x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 - r^2)^2 - 4\alpha^2(x^2. + y^2) = 0\}$$

Περιγράψτε μια παραμέτρηση του δακτυλίου $\mathbb{T}^2$, υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και επιβεβαιώστε αναλυτικά ότι $\int_T K dA = 0$.

Λύση

Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι η τιμή του ολοκληρώματος προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Gauss - Bonnet, επειδή για τον δακτύλιο το γένος είναι $g = 1$ άρα $\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) = 2 - 2g = 0$, οπότε $\int_T K dA = 2\pi\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) = 0$. Θα το υπολογίσουμε όμως χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Gauss - Bonnet.

Μια τοπική παραμέτρηση του δακτυλίου $\mathbb{T}^2$ είναι η

$$X(u, v) = \big((\alpha + r\cos u)\cos v, (\alpha + r\cos u)\sin v, r\sin u\big), \quad 0 < u, v < 2\pi.$$

Ένας άμεσος υπολογισμός δίνει ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης είναι:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (\alpha + r\cos u)^2$$
$$e = r, \quad f = 0, \quad g = \cos u(\alpha + r\cos u).$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss $K : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ είναι

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(\alpha + r\cos u)}.$$

Το στοιχείο εμβαδού στον $\mathbb{T}^2$ είναι $dA = \sqrt{EG - F^2}dudv = r(\alpha + r\cos u)dudv$ συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{T}^2} KdA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos u du dv = 0.$$

Παράδειγμα 5.6. *Δώστε παράδειγμα συνεκτικής επιφάνειας M η οποία περιέχει δύο σημεία τα οποία δεν μπορούν να συνδεθούν με μια γεωδαισιακή. Ποιά είναι η συνηθισμένη τοπολογική υπόθεση στην M ώστε να αποφεύγεται αυτό το πρόβλημα;*

Λύση

Έστω Π ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ και p, q δύο σημεία του Π. Θεωρούμε r ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος pq. Τότε η επιφάνεια $\Pi \setminus \{r\} \subset \mathbb{R}^3$ είναι το ζητούμενο παράδειγμα.

Η συνηθισμένη τοπολογική υπόθεση προκειμένου να αποφεύγεται το παραπάνω πρόβλημα είναι η πληρότητα της (M, d) όπου η συνάρτηση $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ επάγεται από την μετρική της M. Το σημαντικό θεώρημα των Hopf - Rinow αναφέρει ότι η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με τα εξής:

1. Για κάθε $p \in M$ η εκθετική απεικόνιση $\exp_p : T_pM \to M$ ορίζεται σε όλον τον εφαπτόμενο χώρο T_pM,

2. κάθε ζεύγος σημείων της M μπορούν να συνδεθούν με μια γεωδαισιακή καμπύλη που ελαχιστοποιεί το μήκος.

3. Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο της M είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 5.7. *Έστω M μια συμπαγής επιφάνεια της οποίας η καμπυλότητα Gauss είναι παντού θετική. Αποδείξτε ότι η M είναι αμφιδιαφορική με τη σφαίρα.*

Λύση

Είναι $K > 0$ παντού άρα $\int_M KdA > 0$ συνεπώς από το Θεώρημα Gauss - Bonnet είναι

$$\int_M KdA = 4\pi(1-g) > 0,$$

από όπου προκύπτει ότι $g < 1$. Επειδή οι δυνατές τιμές του γένους g μιας επιφάνειας είναι $g = 0, 1, 2, \ldots$, προκύπτει ότι $g = 0$, συνεπώς η M είναι αμφιδιαφορική με τη σφαίρα. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η κυλινδρική επιφάνεια-πούρο είναι αμφιδιαφορική με τη σφαίρα, αλλά στο κυλινδρικό της κομμάτι είναι $K = 0$.

Παράδειγμα 5.8. *Έστω M μια προσανατολίσιμη επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ και έστω γ_1, γ_2 δύο γεωδαισιακές με αρχή ένα σημείο $p \in M$. Αποδείξτε ότι οι γ_1, γ_2 δεν μπορούν να ξανασυναντηθούν σε ένα σημείο $q \in M$, έτσι ώστε τα ίχνη τους να περικλείουν ένα απλά συνεκτικό χωρίο D της M.*

Λύση

Ας υποθέσουμε το αντίθετο και έστω α_1, α_2 οι εξωτερικές γωνίες των σημείων τομής των γ_1, γ_2. Τότε από την δεύτερη εκδοχή του τοπικού Θεωρήματος Gauss - Bonnet έχουμε ότι

$$\int_D KdA = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Αλλά $\alpha_1, \alpha_2 < \pi$ συνεπώς $\alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$, οπότε $2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$. Επειδή όμως $K \leq 0$ παντού, είναι $\int_D KdA \leq 0$, άτοπο.

5.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

B. I. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.