Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ

Ενότητα: Γεωδαισιακές καμπύλες

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

Γεωδαισιακές καμπύλες

Ως γνωστόν οι ευθείες γραμμές παίζουν καθοριστικό ρόλο στη γεωμετρία του επιπέδου. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ορίσουμε εκείνες τις καμπύλες σε μια επιφάνεια, οι οποίες θα έχουν τον αντίστοιχο ρόλο των ευθειών στο επίπεδο.

Υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο τρόποι να χαρακτηρίσουμε τις ευθείες γραμμές (ή πιο γενικά τα ευθύγραμμα τμήματα) μεταξύ όλων των επίπεδων καμπυλών: ο πρώτος είναι γεωμετρικός (ολικός) και ο δεύτερος είναι αναλυτικός (τοπικός). Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σταθερών σημείων του επιπέδου (γεωμετρική ή ολική περιγραφή). Ταυτόχρονα, είναι εκείνη η καμπύλη της οποίας το διάνυσμα ταχύτητας είναι σταθερό, υπό την έννοια ότι η διεύθυνσή του είναι σταθερή ή ότι παραμένει παράλληλο με τον εαυτό του (αναλυτική ή τοπική περιγραφή).

Ο πρώτος τρόπος χαρακτηρισμός (γεωμετρικός - ολικός) δεν είναι ο πλέον ενδεδειγμένος προκειμένου να γενικευθεί στις επιφάνειες. Ο λόγος είναι ότι, όπως θα δούμε, καμπύλες που ελαχιστοποιούν το μήκος μεταξύ δύο σημείων σε μια επιφάνεια μπορεί να μήν υπάρχουν καθόλου. Επιπλέον, ακόμα και να υπάρχουν μπορεί να μην είναι μοναδικές.

Ο δεύτερος χαρακτηρισμός (αναλυτικός - τοπικός) θα δούμε ότι είναι πιο πρόσφορος προκειμένου να γενικευθεί σε μια επιφάνεια, αλλά σίγουρα απαιτεί να αντιμετωπίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μια διαφορετική οπτική από αυτή που το γνωρίζαμε από τα σχολικά μαθήματα γεωμετρίας.

Βέβαια, η προσέγγιση αυτή απαιτεί να ορίσουμε αυστηρά τί ακριβώς σημαίνει παραλληλία κατά μήκος μιας καμπύλης, κάτι το οποίο απαιτεί να ορίσουμε την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας καμπύλης σε μια επιφάνεια. Αν και ουσιαστικά θα ακολουθήσουμε αυτή την προσέγγιση, θα παρακάμψουμε σε αυτή τη φάση τις έννοιες αυτές και θα παρουσιάσουμε τη γενική θεωρία γεωδαισιακών χωρίς απευθείας αναφορά σε συναλλοίωτη παράγωγο. Αυτό θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και έστω $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη στην M με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου τέτοια ώστε $\gamma(0) = p \in M$. Έχουμε δει ότι το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(0)$ της δεύτερης παραγώγου ("επιτάχυνση") στο σημείο p αναλύεται ως

$$\ddot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0)^{\tan} + \ddot{\gamma}(0)^{\mathrm{norm}},$$

στην εφαπτομενική συνιστώσα $\ddot{\gamma}(0)^{\tan} \in T_pM$ και στην κάθετη συνιστώσα $\ddot{\gamma}(0)^{\mathrm{norm}} \in (T_pM)^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$.

Ορισμός 4.1. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Μια καμπύλη $\gamma :\to M$ (με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου) στην M ονομάζεται γεωδαισιακή (geodesic) εάν η εφαπτομενική συνιστώσα της δεύτερης παραγώγου $\ddot{\gamma}(t)$ μηδενίζεται, δηλαδή ισχύει*

$$\ddot{\gamma}(t)^{\tan} = 0 \tag{3}$$

για κάθε $t \in I$.

Η σχέση ισοδυναμεί με το ότι, για κάθε $t \in I$, είτε το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(t)$ είναι κάθετο στον T_pM είτε $\ddot{\gamma}(t) = 0$. Ισοδύναμα, η γ είναι μια γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot{\gamma}(t)$ είναι παράλληλο κατά μήκος της γ, δηλαδή

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$$

Πράγματι, εξ ορισμού το $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ είναι η προβολή του $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \circ \gamma)\big|_{t=0} = \ddot{\gamma}$ στον $T_{\gamma(t)}M$.

Παρατηρήσεις. 1) Η σχέση (3) ισοδυναμεί με το ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\dot{\gamma}(t)$ είναι παράλληλο κατά μήκος της γ, αλλά όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου δεν θα αναπτύξουμε προς το παρόν την έννοια αυτή.

2) Η έννοια της γεωδαισιακής έχει την εξής φυσική ερμηνεία. Η τροχιά $\gamma(t)$ ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται σε μια επιφάνεια και στο οποίο δεν δρα καμμιά δύναμη παρά μόνο αυτή η οποία κρατά το σωματίδιο στη επιφάνεια (κάθετη δύναμη), είναι μια γεωδαισιακή. Πράγματι, από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι $F(t) = k\ddot{\gamma}(t)$ και η F είναι κάθετη στον εφαπτόμενο χώρο T_pM, συνεπώς το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(t)$ είναι κάθετο στον T_pM άρα η τροχιά $\gamma(t)$ είναι μια γεωδαισιακή.

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$, $p \in \mathbb{S}^2$ και $Z \in T_p\mathbb{S}^2$ ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο p. Επειδή $\langle p, Z\rangle = 0$ το σύνολο $\{p, Z\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση ενός επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ (το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων) που τέμνει την σφαίρα κατά έναν μέγιστο κύκλο. Μια παραμέτρηση του κύκλου αυτού είναι η $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$

$$\gamma(s) = (\cos s)p + (\sin s)Z$$

Τότε προκύπτει άμεσα ότι $\ddot{\gamma}(s) = -\gamma(s)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$, συνεπώς $\ddot{\gamma}^{\tan} = 0$ (γιατί;). Άρα ο μέγιστος αυτός κύκλος είναι μια γεωδαισιακή της σφαίρας που διέρχεται από το σημείο $\gamma(0) = p$. *Το ερώτημα που τίθεται αμέσως εδώ είναι αν υπάρχουν άλλες γεωδαισιακές στην σφαίρα.*

Πρόταση 4.1. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια γεωδαισιακή στην M. Τότε η "ταχύτητα" $\|\dot{\gamma}\| : I \to \mathbb{R}$ της γ είναι σταθερή, δηλαδή η καμπύλη έχει παραμέτρηση ανάλογη του μήκους τόξου.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τον εξής υπολογισμό:

$$\frac{d}{dt}(\|\dot{\gamma}(t)\|^2) = \frac{d}{dt}\langle\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 2\langle\ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\rangle = 2\left\langle\ddot{\gamma}(t)^{\tan}, \dot{\gamma}(t)\right\rangle = 0$$

$\square$

Από την παραπάνω πρόταση ουσιαστικά προκύπτει (θέλει μια μικρή απόδειξη) ότι μια αναπαραμέτρηση με μοναδιαία ταχύτητα μιας γεωδαισιακής γ, είναι γεωδαισιακή. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι γεωδαισιακές έχουν μοναδιαία ταχύτητα.

Ορισμός 4.2. *Έστω M μια κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη στην M με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Η <u>γεωδαισιακή καμπυλότητα</u> $k_g : I \to \mathbb{R}$ της γ ορίζεται ως*

$$k_g(s) = \langle N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)\rangle .$$

Παρατηρήσεις. 1) Αποδεικνύεται ότι η γεωδαισιακή καμπυλότητα εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης, άρα είναι μια εσωτερική ποσότητα της επιφάνειας M.

2) Επειδή το διάνυσμα $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετο στο $N(\gamma(s))$, το σύνολο $\{\dot{\gamma}(s), N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_{\gamma(s)}M$ της M στο σημείο $\gamma(s) \in M$ και το σύνολο $\{\dot{\gamma}(s), N(\gamma(s)), N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον, επειδή η γ έχει παραμέτρηση κατά μήκος τόξου, το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(s)$ είναι κάθετο στο $\dot{\gamma}(s)$ (πράγματι η σχέση $\langle\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 1$ δίνει ότι $\langle\ddot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 0$). Συνεπώς, το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(0) \in \mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως

$$\ddot{\gamma}(0) = k_p(Z)N + k_g(0)(N \times \gamma) = \ddot{\gamma}(0)^{\mathrm{perp}} + \ddot{\gamma}(0)^{\tan},$$

όπου $k_p(Z) = \langle\ddot{\gamma}(0), N(p)\rangle$ είναι η κάθετη καμπυλότητα της M στο γ και $k_g(0) = \langle\ddot{\gamma}(0), N(p) \times \dot{\gamma}(0)\rangle$ είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ στο σημείο $p = \gamma(0)$.

3) Η γεωδαισιακή καμπυλότητα αποτελεί ένα μέτρο του πόσον απέχει μια καμπύλη με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου επί μιας επιφάνειας, να είναι γεωδαισιακή. Δηλαδή,

ισχύει ότι η γ είναι γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν $k_g = 0$. Πράγματι, αν η γ είναι γεωδαισιακή τότε $\ddot{\gamma}(s)^{\tan} = 0$, οπότε το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(s)$ είναι παράλληλο στο $N(\gamma(s))$ και κάθετο στο $N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)$, άρα $k_g(s) = 0$. Αντίστροφα, αν $k_g(s) = 0$ τότε το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(s)$ είναι κάθετο στο $N(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)$, συνεπώς το $\ddot{\gamma}(s)$ παράλληλο $N(\gamma(s))$ (γιατί;), απ΄ όπου προκύπτει ότι $\ddot{\gamma}(s)^{\tan} = 0$, άρα η γ είναι γεωδαισιακή.

4) Προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει τη σχέση
$$k_g(s)^2 = \|\ddot{\gamma}(s)^{\tan}\|^2.$$

Πρόταση 4.2. *Έστω M μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ και έστω $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη στην M με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Έστω $k : I \to \mathbb{R}$ η καμπυλότητα της γ ως καμπύλης στον $\mathbb{R}^3$ και έστω $k_n, k_g : I \to \mathbb{R}$ η κάθετη και η γεωδαισιακή καμπυλότητα αντίστοιχα. Τότε ισχύει η σχέση*
$$k(s)^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2.$$

Παράδειγμα 4.2. Κάθε (τμήμα) ευθείας σε μια επιφάνεια είναι γεωδαισιακή. Συγκεκριμένα, κάθε ευθεία σε μια επιφάνεια επιδέχεται μια παραμέτρηση ώστε να είναι γεωδαισιακή.

Παράδειγμα 4.3. Οι γεννήτορες ενός γενικευμένου κυλίνδρου είναι γεωδαισιακές.

Παράδειγμα 4.4. Κάθε κάθετη τομή μιας επιφάνειας M είναι γεωδαισιακή.

Μια <u>κάθετη τομή</u> (normal section) της M είναι η τομή C της M με ένα επίπεδο Π τέτοιο ώστε το Π να είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της M σε κάθε σημείο της C. (Αυτό προκύπτει από το θεώρημα Meusnier)

Παράδειγμα 4.5. Κάθε μέγιστος κύκλος μιας σφαίρας είναι γεωδαισιακή καμπύλη. Αυτό είναι άμεσο από το προηγούμενο παράδειγμα, επειδή οι μέγιστοι κύκλοι προκύπτουν από κάθετες τομές επιπέδων που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας.

Παράδειγμα 4.6. Έστω $\gamma = (r, 0, z) : I \to \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη στο επίπεδο xz τέτοια ώστε $r(s) > 0$ και $\dot{r}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$ για κάθε $s \in I$. Τότε η απεικόνιση $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$
αποτελεί μια παραμέτρηση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής M. Ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο $X(u,v) \in M$ παράγεται από τα διανύσματα
$$X_u = \begin{pmatrix} \dot{r}(u)\cos v \\ \dot{r}(u)\sin v \\ \dot{z}(u) \end{pmatrix}, \quad X_v = \begin{pmatrix} -r(u)\sin v \\ r(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Διατηρώντας το $v \in \mathbb{R}$ σταθερό η καμπύλη $\gamma_1 : I \to M$ με τύπο

$$\gamma_1(u) = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια παραμέτρηση κατά μήκος τόξου ενός <u>μεσημβρινού</u> (meridian) της M. Εύκολα βλέπουμε ότι $\langle \ddot{\gamma}, X_u \rangle = \langle \ddot{\gamma}_1, X_v \rangle = 0$, δηλαδή $\ddot{\gamma}_1 \perp \operatorname{span}\{X_u, X_v\}$, οπότε $(\ddot{\gamma}_1)^{\tan} = 0$, άρα η $\gamma_1 : I \to M$ είναι μια γεωδαισιακή της M. Παρόμοια, διατηρώντας το $u \in \mathbb{R}$ σταθερό (έστω $u = u_0$) η καμπύλη $\gamma_2 : I \to M$ με τύπο

$$\gamma_2(v) = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια παραμέτρηση ενός <u>παραλλήλου</u> (parallel) της M. Με έναν απλό υπολογισμό προκύπτει ότι

$$\langle \ddot{\gamma}_2, X_u \rangle = -\dot{r}(u_0) r(u_0), \quad \langle \ddot{\gamma}_2, X_v \rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη $\gamma_2 : I \to M$ είναι μια γεωδαισιακή της M εάν και μόνο εάν $\dot{r}(u_0) = 0$, δηλαδή το u_0 είναι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $r : I \to \mathbb{R}$. *Και σε αυτό το παράδειγμα, τίθεται το ερώτημα αν η M έχει και άλλες γεωδαισιακές (βλ. Θεώρημα Clairaut)*

Από τα προηγούμενα παραδείγματα φαίνεται ότι το πρόβλημα εύρεσης των γεωδαισιακών καμπυλών σε μια επιφάνεια δεν είναι ιδιαιτέρως εύκολο. Στο επόμενο θεώρημα θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο όμως και αυτό στην πλήρη γενικότητά του δεν είναι πάντα εύκολο να επιλυθεί.

Θεώρημα 4.1. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια και $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια τοπική παραμέτρηση της M με θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης*

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t.$$

Αν $(u, v) : I \to U$ είναι μια καμπύλη στο U κλάσης C^2 τότε η καμπύλη

$$\gamma : X \circ (u, v) : I \to X(U) \subset M$$

είναι μια γεωδαισιακή της M εάν και μόνο εάν ισχύουν οι εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(E\dot{u} + F\dot{v}\big) &= \frac{1}{2}\big(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2\big) \\ \frac{d}{dt}\big(F\dot{u} + G\dot{v}\big) &= \frac{1}{2}\big(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2\big) \end{aligned}$$

Στο ερώτημα κατά πόσον από κάθε σημείο μιας επιφάνειας διέρχεται μια γεωδαισιακή καμπύλη με "δοσμένη αρχική ταχύτητα" απαντά το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια, $p \in M$ και $Z \in T_pM$. Τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

τοπικά ορισμένη και που να ικανοποιεί τις συνθήκες $\gamma(0) = p$ και $\dot{\gamma}(0) = Z$.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού ουσιαστικά βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα των Picard - Lindelöf σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών.

Πρόταση 4.3. *Έστω M_1, M_2 δύο κανονικές επιφάνειες και $\varphi : M_1 \to M_2$ μια ισομετρία. Τότε η καμπύλη $\gamma_1 : I \to M_1$ είναι μια γεωδαισιακή στην M_1 εάν και μόνο εάν η σύνθεση $\gamma_2 = \varphi \circ \gamma_1 : I \to M_2$ είναι μια γεωδαισιακή στην M_2.*

Εφαρμογή. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση για να βρούμε όλες τις γεωδαισιακές του ορθού κυκλικού κυλίνδρου $M = \mathbb{S}^1 \times I$, $I = [0, 1]$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι κύκλοι $x^2 + y^2 = 1$ είναι γεωδαισιακές του M ως κάθετες τομές. Θεωρούμε την απεικόνιση $X : \mathbb{R}^2 \to M$ με $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ από το επίπεδο xy στον κύλινδρο. Η απεικόνιση αυτή είναι μια τοπική ισομετρία (γιατί;)

Γνωρίζουμε ότι οι γεωδαισιακές καμπύλες του επιπέδου είναι οι ευθείες, οπότε παίρνουμε τις εικόνες μέσω της X των ευθειών $y = mx + c$ που δεν είναι παράλληλες με τον άξονα x. Αυτές έχουν τη μορφή $\gamma(u) = (\cos u, \sin u, mu + c)$ (όπου θέσαμε $x = u, y = v$), οι οποίες είναι κυκλικές έλικες βήματος $2\pi|m|$. Για $m = 0$ παίρνουμε τις ήδη γνωστές κυκλικές γεωδαισιακές. Τέλος, μια άλλη κλάση γεωδαισιακών προκύπτει αν πάρουμε τις εικόνες μέσω της X των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες με τον άξονα y. Αυτές είναι οι γεννήτορες του κυλίνδρου.

Παράδειγμα 4.7. Θα βρούμε τις γεωδαισιακές της σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Θεωρούμε την παραμέτρηση της σφαίρας με γεωγραφικές συντεταγμένες

$$X(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)$$

(θ =γεωγραφικό πλάτος, φ =γεωγραφικό μήκος). Γνωρίζουμε ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της σφαίρας για την παραμέτρηση αυτή είναι $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2$, άρα $E = 1, F = 0, G = \cos^2\theta$. Θα αναζητήσουμε γεωδαισιακές $\gamma(t) = X\big(\theta(t), \varphi(t)\big)$ μοναδιαίας ταχύτητας $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$. Η σχέση αυτή δίνει $\|\dot{\theta}X_\theta + \dot{\varphi}X_\varphi\| = 1$ από όπου μετά από πράξεις παίρνουμε ότι

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2\theta = 1. \tag{4}$$

Από την δεύτερη διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών του Θεωρήματος 4.1 προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\cos^2\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\varphi}\cos^2\theta = \Omega$$

για μια σταθερά Ω, συνεπώς $\dot{\varphi}^2 = \dfrac{\Omega^2}{\cos^4\theta}$. Αν $\Omega = 0$, τότε $\dot{\varphi}^2 = 0$, δηλαδή η φ είναι σταθερή, οπότε η γ είναι τμήμα ενός μεσημβρινού. Έστω ότι $\Omega \neq 0$, άρα $\dot{\varphi} \neq 0$. Τότε η συνθήκη (4) δίνει $\dot{\theta}^2 = 1 - \dot{\varphi}^2\cos^2\theta = 1 - \frac{\Omega^2}{\cos^2\theta}$. Άρα

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\cos^2\theta}}{\frac{\Omega^2}{\cos^4\theta}} = \cos^2\theta(\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1)$$

ή

$$\frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \cos^2\theta(\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1),$$

από όπου παίρνουμε

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \cos^2\theta(\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \pm\cos\theta\sqrt{\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1} \Rightarrow d\varphi = \pm\frac{1}{\cos\theta\sqrt{\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1}} \\ &\Rightarrow \pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1}}, \qquad \varphi_0 \text{ σταθερά.} \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = \tan\theta$, άρα $du = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$. Συνεπώς, προκύπτει τελικά ότι

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1}}\right)$$

άρα

$$\pm\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1}}$$

άρα $\tan\theta = \pm\sqrt{\Omega^{-2} - 1}\sin(\varphi - \varphi_0)$. Από αυτό προκύπτει ότι οι συντεταγμένες $x = \cos\theta\cos\varphi$, $y = \cos\theta\sin\varphi$, $z = \sin\theta$ της $\gamma(t)$ ικανοποιούν την εξίσωση $z = ax + by$, όπου $a = \pm\sqrt{\Omega^{-2} - 1}\sin\varphi_0$ και $b = \pm\sqrt{\Omega^{-2} - 1}\cos\varphi_0$. Με άλλα λόγια η γ προκύπτει από την τομή της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η γ είναι τμήμα ενός μέγιστου κύκλου.

Ένας εναλλακτικός τρόπος εντοπισμού γεωδαισιακών για επιφάνειες εκ περιστροφής είναι χρησιμοποιώντας το παρακάτω ενδιαφέρον θεώρημα.

Θεώρημα 4.3. *(Clairaut) Έστω M μια κανονική επιφάνεια εκ περιστροφής και $\gamma : I \to M$ μια γεωδαισιακή με παραμέτρηση κατά μηκός τόξου. Έστω $\rho : M \to \mathbb{R}^+$ η συνάρτηση απόστασης ενός σημείου $\gamma(s) \in M$ και του άξονα περιστροφής και έστω $\theta : I \to M$ η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\dot{\gamma}(s)$ και ένος μεσημβρινού που διέρχεται από το $\gamma(s)$. Τότε το γινόμενο $\rho(s)\sin\theta(s)$ είναι σταθερό κατά μήκος της γεωδαισιακής γ. Το αντίστροφο ισχύει εάν η καμπύλη γ είναι τμήμα κάποιου παραλλήλου της M.*

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την βασική ιδιότητα των γεωδαισιακών που είναι ότι τοπικά ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε μια επιφάνεια. Η άποψη αυτή γενικεύει την ιδιότητα των ευθειών στο επίπεδο ως καμπύλες που ελαχιστοποιούν την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Για την προσέγγιση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία λογισμού μεταβολών, μια από τις πιο παλαιές περιοχές των μαθηματικών.

Ορισμός 4.3. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη κλάσης C^2. Έστω $[a, b]$ ένα συμπαγές υποδιάστημα του I.*

1. *Το συναρτησοειδές μήκους (length functional) $L_{[a,b]}$ ορίζεται ως*

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

2. *Το συναρτησοειδές ενέργειας (energy functional) $E_{[a,b]}$ ορίζεται ως*

$$E_{[a,b]}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Ορισμός 4.4. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια, $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη κλάσης C^2.*

1. *Μια κύμανση (variation) της γ είναι μια απεικόνιση κλάσης C^2 της μορφής*

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times I \to M$$

τέτοια ώστε $\Phi_0(s) = \Phi(0, s) = \gamma(s)$ για κάθε $s \in I$. Εάν το διάστημα I είναι συμπαγές ($I = [a, b]$) τότε μια κύμανση Φ ονομάζεται γνήσια (proper) εάν για κάθε $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ισχύουν οι σχέσεις $\Phi_t(a) = \gamma(a)$ και $\Phi_t(b) = \gamma(b)$.

2. *Μια καμπύλη $\gamma : I \to M$ κλάσης C^2 ονομάζεται κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς μήκους εάν κάθε γνήσια κύμανση Φ της $\gamma|_{[a,b]}$ ικανοποιεί την σχέση*

$$\frac{d}{dt}\left(L_{[a,b]}(\Phi_t)\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

Το παρακάτω θεώρημα αναφέρει ότι οι γεωδαισιακές καμπύλες σε μια επιφάνεια χαρακτηρίζονται ως κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς μήκους τα οποία όπως αποδεικνύεται είναι τα ίδια με αυτά του συναρτησοειδούς ενέργειας.

Θεώρημα 4.4. *Έστω $\gamma : I = [a,b] \to M$ μια καμπύλη κλάσης C^2 με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Τότε η γ είναι ένα κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς μήκους εάν και μόνο εάν η γ είναι μια γεωδαισιακή της M*

Απόδειξη. (Σύντομη σκιαγράφηση).
Έστω $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times I \to M$ με $(t,s) \mapsto \Phi(t,s)$ μια γνήσια κύμανση της $\gamma : I \to M$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(L_{[a,b]}(\Phi_t)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\int_a^b \|\dot{\gamma}_t(s)\| ds\right)\Big|_{t=0} \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\langle \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial s}\rangle} ds\Big|_{t=0} \\ &= \ldots = -\int_a^b \langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,s), \ddot{\gamma}(s)^{\tan}\rangle ds. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για κάθε γνήσια κύμανση Φ της γ εάν και μόνο εάν η γ είναι μια γεωδαισιακή. □

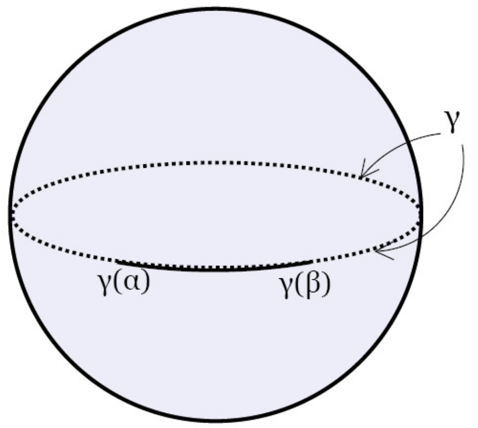
Θα θέλαμε στη συνέχεια να συζητήσουμε σε έναν βαθμό τις ελαχιστικές ιδιότητες των γεωδαισιακών. Θα αρχίσουμε με μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

1. Αν η $\gamma : I \to M$ είναι μια καμπύλη με ελάχιστο μήκος που ενώνει δύο σημεία $\gamma(a), \gamma(b) \in M$, τότε το συναρτησοειδές $L_{[a,b]}$ ελαχιστοποιείται για $t = 0$, άρα

$$\frac{d}{dt}\left(L_{[a,b]}(\Phi_t)\right)\Big|_{t=0} = 0,$$

   συνεπώς η γ είναι μια γεωδαισιακή της επιφάνειας M.

2. Αν η $\gamma : I \to M$ είναι μια γεωδαισιακή που ενώνει τα $\gamma(a), \gamma(b)$, τότε η γ είναι μεν ένα κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς $L_{[a,b]}$, αλλά δεν είναι απαραίτητα μια καμπύλη ελάχιστου μήκους μεταξύ των $\gamma(a), \gamma(b)$. Πάρτε για παράδειγμα τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και τα σημεία της $\gamma(a), \gamma(b)$ επί του ισημερινού γ, ο οποίος είναι μια γεωδαισιακή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το τμήμα της γ που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ των $\gamma(a), \gamma(b)$ είναι το μικρό τμήμα της γ μεταξύ των $\gamma(a), \gamma(b)$ και όχι το μεγάλο.



3. Μια καμπύλη ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων μιας επιφάνειας M μπορεί και να μην υπάρχει καθόλου. Πάρτε για παράδειγμα $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Τότε δεν υπάρχει καμπύλη ελάχιστου μήκους που να ενώνει τα σημεία $p = (-1,0)$ και $q = (1,0)$. Παρόλα αυτά, αποδεικνύεται ότι αν μια επιφάνεια M είναι κλειστή (ως τοπολογικός χώρος) τότε αν δύο σημεία $p, q \in M$ μπορούν να ενωθούν με μια καμπύλη στην M, τότε υπάρχει καμπύλη ελάχιστου μήκους που να τα ενώνει. Για παράδειγμα, το επίπεδο $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ και η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ είναι κλειστές επιφάνειες, ενώ η $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ δεν είναι κλειστή.

Θα προχωρήσουμε τώρα σε κάποια ελαφρώς πιο εξειδικευμένα θέματα. Έστω M μια κανονική επιφάνεια, $p \in M$ και έστω

$$T_p^1 M = \{W \in T_p M \,:\, \|W\| = 1\}$$

ο μοναδιαίος κύκλος στον εφαπτόμενο χώρο T_pM. Τότε κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $Z \in T_pM$ μπορεί να γραφτεί ως

$$Z = r_Z e_Z,$$

όπου $r_Z = \|Z\|$ και $e_Z = \frac{1}{\|Z\|} Z$. Για $W \in T_p^1 M$ έστω $\gamma_W : (a_W, b_W) \to M$ η μέγιστη γεωδαισιακή τέτοια ώστε $a_W, b_W \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $\gamma_W(0) = p$, $\dot{\gamma_W}(0) = W$ (τέτοια γεωδαισιακή υπάρχει). Αποδεικνύεται ότι ο προγματικός αριθμός

$$\epsilon_p = \inf\{-a_W, b_W \,:\, W \in T_p^1 M\}$$

είναι θετικός, συνεπώς το σύνολο (ανοικτή μπάλα)

$$B_{\epsilon_p}(0) = \{Z \in T_pM \,:\, |Z| < \epsilon_p\}$$

είναι μη κενό.

Ορισμός 4.5. *Η <u>εκθετική απεικόνιση</u> (exponetial map)* $\exp_p : B_{\epsilon_p}(0) \subset T_pM \to M$ *ορίζεται ως*

$$\exp_p(Z) = \begin{cases} p & \textit{αν} \;\; Z = 0 \\ \gamma_{\epsilon_Z}(r_Z) & \textit{αν} \;\; Z \neq 0. \end{cases}$$

Παρατηρήσεις. 1) Ο όρος "εκθετική απεικόνιση" εξηγείται καλύτερα μελετώντας διαφορική γεωμετρία σε μεγαλύτερες διαστάσεις, δηλαδή σε πολλαπλότητες. Εκεί είναι δυνατόν να οριστεί κατά φυσικό τρόπο έννοια γεωδαισιακής σε συμπαγείς ομάδες πινάκων, όπως για παράδειγμα η ορθογώνια ομάδα $O(n)$. Τότε αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη εκθετική απεικόνιση στο ουδέτερο σημείο $I \in O(n)$ (ταυτοτικός πίνακας) δίνεται ως η συνηθισμένη εκθετική απεικόνιση πινάκων, δηλαδή $\exp_I(A) = e^A$, $A \in T_IO(n)$.

2) Αν $W \in T_p^1M$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\lambda_W : (-\epsilon_p, \epsilon) \to T_pM$, $\lambda_W(t) = tW$ απεικονίζεται μέσω της εκθετικής απεικόνισης στη γεωδαισιακή γ_W, δηλαδή τοπικά ισχύει $\gamma_W = \exp_p \circ \lambda_W$. Συνεπώς, τοπικά η εκθετική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε γεωδαισιακές.

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $\exp_p$ είναι διαφορίσιμη και ότι το διαφορικό $d(\exp_p)_0 : T_pM \to T_pM$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση Id_{T_pM} στον εφαπτόμενο χώρο T_pM. Συνεπώς, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης υπάρχει $r_p \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε αν $U_p = B_{r_p}(0)$ και $V_p = \exp_p(U_p)$, τότε η απεικόνιση $\exp_p|_{U_p} : U_p \to V_p$ είναι μια αμφιδιαφόριση, η οποία παραμετρικοποιεί το ανοικτό υποσύνολο V_p της επιφάνειας M. Το σύνολο αυτό (χάρτης της M) έχει ιδαίτερη σημασία στη διαφορική γεωμετρία και ονομάζεται <u>κανονική περιοχή</u> (normal neighborhood) του $p \in M$.

Παράδειγμα 4.8. Έστω $\mathbb{S}^2$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ και $p = (1, 0, 0)$ ο βόρειος πόλος. Τότε ο μοναδιαίος κύκλος στον εφαπτόμενο χώρο $T_p\mathbb{S}^2$ δίνεται ως

$$T_p^1\mathbb{S}^2 = \{(0, \cos\theta, \sin\theta) \,:\, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Η εκθετική απεικόνιση $\exp_p : T_p\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ της $\mathbb{S}^2$ στο p δίνεται από τη σχέση

$$\exp_p(s(0, \cos\theta, \sin\theta)) = (\cos s)(1, 0, 0) + (\sin s)(0, \cos\theta, \sin\theta).$$

Είναι σαφές ότι η εκθετική απεικόνιση περιοριστένη στην ανοικτή μπάλα

$$B_\pi(0) = \{Z \in T_p\mathbb{S}^2 \,:\, |Z| < \pi\}$$

είναι 1-1 , συνεπώς η γεωδαισιακή $\gamma(s) = \exp_p(s(0, \cos\theta, \sin\theta))$ αποτελεί την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων p και $\gamma(r)$, για κάθε $r < \pi$. *Προτρέπουμε τον αναγνώστη να κάνει ένα σχήμα του παραδείγματος αυτού.*

Ερχόμαστε τώρα στο κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού.

Θεώρημα 4.5. *Έστω M μια κανονική επιφάνεια. Τότε οι γεωδαισιακές καμπύλες ελαχιστοποιούν τοπικά την απόσταση μεταξύ των άκρων τους.*

Απόδειξη. Έστω $p \in M$, $U = B_r(0) \subset T_pM$ και $V = \exp_p(U)$ έτσι ώστε ο περιορισμός

$$\varphi = \exp_p|_U : U \to V$$

της εκθετικής απεικόνισης στο p να είναι αμφιδιαφόριση. Ορίζουμε μια μετρική ds^2 στην περιοχή U ως

$$ds^2(Z, W) = \langle d\varphi(Z), d\varphi(W)\rangle$$

για κάθε Z, W διανυσματικά πεδία στο U. Με την μετρική αυτή η απεικόνιση φ γίνεται ισομετρία. Από τον τρόπο ορισμού της εκθετικής απεικόνισης προκύπτει ότι οι γεωδαισιακές στο U που διέρχονται από το σημείο $0 = \varphi^{-1}(p)$ είναι ακριβώς οι ευθείες

$$\lambda_Z : t \mapsto tZ \quad (Z \in T_pM).$$

Έστω τώρα $q \in B_r(0) \setminus \{0\}$ και $\lambda_q : [0, 1] \to B_r(0)$ η καμπύλη $\lambda_q(t) = tq$. Θεωρούμε $\sigma : [0, 1] \to U$ οποιαδήποτε καμπύλη U τέτοια ώστε $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = q$. Ορίζουμε δύο διανυσματικά πεδία X και X_{rad} κατά μήκος της σ ως εξής: $X : t \mapsto \sigma(t)$ και

$$X_{\text{rad}} : t \mapsto \frac{ds^2(\dot\sigma(t), X(t))}{ds^2(X(t), X(t))}\sigma(t).$$

Τότε προκύπτει ότι

$$\|X_{\text{rad}}(t)\| = \frac{\|ds^2(\dot\sigma(t), X(t))\|}{\|ds^2(X(t), X(t))\|}$$

και

$$\frac{d}{dt}\|X(t)\| = \frac{d}{dt}\sqrt{ds^2(X(t), X(t))} = \frac{ds^2(\dot\sigma(t), X(t))}{\|X(t)\|}$$

από τις οποίες παίρνουμε ότι $\|X_{\text{rad}}(t)\| \geq \frac{d}{dt}\|X(t)\|$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \int_0^1 \|\dot\sigma(t)\|dt \geq \int_0^1 \|X_{\text{rad}}(t)\|dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt}\|X(t)\|dt \\ &= \|X(1)\| - \|X(0)\| = \|q\| = L(\lambda_q). \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει ότι η καμπύλη λ_q είναι η καμπύλη ελάχιστου μήκους που ενώνει τα σημεία p και q. □

Παράδειγμα 4.9. Έστω M μια επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμέτρηση $\tilde X : I \times \mathbb{R} \to M$

$$\tilde X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(s)\cos v \\ r(s)\sin v \\ z(s) \end{pmatrix}$$

όπου $(r, 0, z) : I \to \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη στο επίπεδο xz, τέτοια ώστε $r(s) > 0$ και $\dot{r}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$ για κάθε $s \in I$. Στο Ανοικτό Μάθημα *Διαφορική Γεωμετρία* έχουμε αποδείξει ότι η καμπυλότητα Gauss K της M ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{r}(s) + K(s)r(s) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι $K \equiv -1$ (μονίμως αρνητική) και λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση προκύπτει η γενική λύση $r(s) = ae^s + be^{-s}$. Επιλέγοντας τις συναρτήσεις $r, z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ να ικανοποιούν τις

$$r(s) = e^{-s}, \quad z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}}dt$$

λαμβάνουμε την παραμέτρηση $\tilde{X} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της ψευδοσφαίρας (pseudosphere) με θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = [d\tilde{X}][d\tilde{X}]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix}.$$

Εισάγουμε τώρα μια νέα μεταβλητή $u > 0$ από τη σχέση $s(u) = -\ln u$ και έτσι παίρνουμε μια νέα παραμέτρηση $X : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to M$ της ψευδοσφαίρας, όπου $X(u, v) = \tilde{X}(s(u), v)$. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$X_u = s_u X_s = -\frac{1}{u} X_s$$

από όπου προκύπτουν τα θεμαλιώδη ποσά πρώτης τάξης της παραμέτρησης X:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t = \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή καθορίζει (επάγει) τη μετρική

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}(dv^2 + du^2)$$

στο άνω ημιεπίπεδο

$$\mathbb{H} = \{(v, u) \in \mathbb{R}^2 \, : \, u > 0\}$$

Η μετρική αυτή ονομάζεται υπερβολική μετρική του άνω ημιεπιπέδου. Ο υπερβολικός χώρος (ή επίπεδο) (hyperbolic space) $(\mathbb{H}^2, ds^2)$ *έχει ιδιαίτερη γεωμετρική και ιστορική σημασία μια και είναι ένα μοντέλο μη Ευκλείδειας γεωμετρίας.*

Θα βρούμε τώρα τις γεωδαισιακές καμπύλες του υπερβολικού επιπέδου. Έστω $\gamma = (v, u) : I \to \mathbb{H}^2$ μια γεωδαισιακή με παραμέτρηση κατά μήκος τόξου. Τότε $\dot{\gamma} = (\dot{v}, \dot{u})$ και

$$\|\dot{\gamma}\|^2_{\mathbb{H}^2} = ds^2(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \frac{1}{u^2}(\dot{v}^2 + \dot{u}^2) = 1$$

ή ισοδύναμα $\dot{v}^2 + \dot{u}^2 = u^2$. Από το Θεώρημα Clairaut ισχύει ότι η ποσότητα

$$r(s)\sin\theta(s) = \frac{1}{u^2}\dot{r} \equiv R$$

είναι σταθερή (πραγματικός αριθμός) κατά μήκος της γεωδαισιακής. Τότε προκύπτει ότι

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = u^2 R.$$

$a)$ Αν $R = 0$, τότε $\dot{v} = 0$ άρα η συνάρτηση v είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι οι κάθετες ευθείες $v = v_0$ του άνω ημιεπιπέδου $\mathbb{H}^2$ είναι γεωδαισιακές.
$b)$ Αν $R \neq 0$ τότε από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι $u^4R^2 + \dot{u}^2 = u^2$ και ισοδύναμα ότι $\frac{du}{dt} = \dot{u} = \pm u\sqrt{1 - R^2u^2}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \pm\frac{Ru}{\sqrt{1 - R^2u^2}}$$

και ισοδύναμα ότι

$$dv = \pm\frac{Ru}{\sqrt{1 - R^2u^2}}du.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε $R(v - v_0) = \pm\sqrt{1 - R^2u^2}$ άρα $(v - v_0) + u^2 = \frac{1}{R^2}$, το οποίο σημαίνει ότι η γεωδαισιακή είναι ένα ημικύκλιο στο $\mathbb{H}^2$ με κέντρο $(v_0, 0)$ και ακτίνα $\frac{1}{R}$.

4.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.
C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.
M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.
J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.
Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.
A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.