Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ

Ενότητα: Συναλλοίωτη παράγωγος και παράλληλη μεταφορά

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

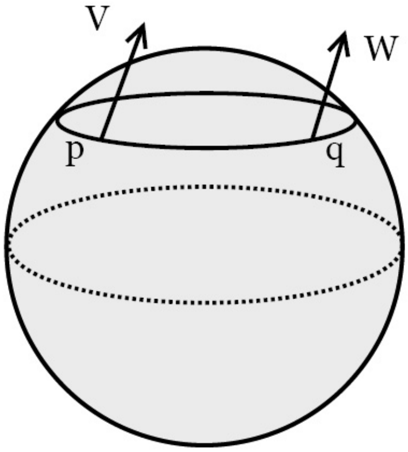
Συναλλοίωτη παράγωγος και παράλληλη μεταφορά

Ο αναγνώστης θα θυμάται πόσο σημαντική είναι η έννοια της παραλληλίας στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Ως γνωστόν οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες προκύπτουν από την άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων του Ευκλείδη, το οποίο αναφέρει ότι δοθέντος ενός σημείου p εκτός ευθείας L του επιπέδου, υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται απο το p και είναι παράλληλη με την L.

Είναι λοιπόν φυσικό να ονομάζουμε δύο διανύσματα V και W του $\mathbb{R}^3$ με σημεία εφαρμογής $p, q \in \mathbb{R}^3$ (άρα $V \in T_p\mathbb{R}^3, W \in T_q\mathbb{R}^3$) παράλληλα εάν το W προκύπτει με παράλληλη μετατόπιση του V από το σημείο p στο σημείο q. Το ερώτημα είναι πώς θα μπορούμε να συγκρίνουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα άλλο σημείο της $\mathbb{S}^2$ και να αποφανθούμε εάν αυτά είναι "παράλληλα;" (βλ. Σχήμα 3.1). Ίσως ένα σαφέστερο ερώτημα (ιδαιτέρως αν επιθυμούμε γενικεύσεις σε αντικείμενα πέραν των επιφανειών) είναι το εξής: Δοθείσας μιας καμπύλης γ σε μια επιφάνεια M και ενός διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{X}$ (θα το γράφουμε $\vec{X}$) κατα μήκος της καμπύλης γ, είναι δυνατόν να ορίσουμε το $\vec{X}$ ως παράλληλο διανυσματικό πεδίο εάν η παράγωγός του κατά μήκος της γ είναι μηδέν; Προκειμένου να κάνουμε τους προβληματισμούς αυτούς συγκεκριμένους, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1. *Ένα λείο διανυσματικό πεδίο (vector field) σε μια επιφάνεια M είναι μια συνάρτηση $\vec{X} : M \to \mathbb{R}^3$ με τις ιδιότητες*

1. $\vec{X}(p) \in T_pM$ *για κάθε* $p \in M$.
2. *Για κάθε τοπική παραμέτρηση* $X : U \to M$ *η συνάρτηση* $\vec{X} \circ X : U \to \mathbb{R}^3$ *είναι διαφορίσιμη.*



Σχήμα 3.1: Παράλληλα διανυσματικά πεδία

Μπορούμε να παραγωγίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{X}$ σε μια επιφάνεια M γενικεύοντας την έννοια της παραγώγου κατά κατεύθυνση $\nabla_V f$ μια πραγματικής συνάρτησης $f : M \to \mathbb{R}$, όπου $V \in T_pM$.

Έστω $V \in T_pM$ και $\gamma : I \to M$ μια λεία καμπύλη στην M με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = V$. Η *παράγωγος του $\vec{X}$ στη διεύθυνση του διανύσματος V* είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$

$$D_V\vec{X} = \frac{d}{dt}(X \circ \gamma)\big|_{t=0}.$$

Καμμιά φορά συμβολίζεται και ως $\dot{\vec{X}}$ ή $\frac{d\vec{X}}{dt}$. Δεδομένου ότι ένας παρατηρητής επάνω στην επιφάνεια M μπορεί να διαπιστώσει μόνο την συνιστώσα του διανύσματος $D_V\vec{X}$ που βρίσκεται στον εφαπτόμενο χώρο T_pM, οδηγούμαστε στον εξής σημαντικό ορισμό:

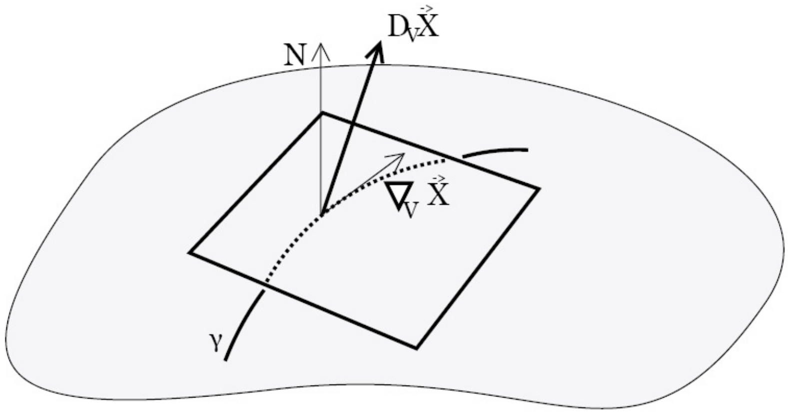
Ορισμός 3.2. 1) *Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$, $\vec{X}$ ένα διανυσματικό πεδίο στην M και $V \in T_pM$. Η <u>συναλλοίωτη παράγωγος</u> (covariant derivative) του $\vec{X}$ είναι το διάνυσμα*

$$\nabla_V\vec{X} = (D_V\vec{X})^{\tan} = D_V\vec{X} - \left\langle D_V\vec{X}, N\right\rangle N,$$

δηλαδή είναι η προβολη του διανύσματος $D_V\vec{X}$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM.
2) *Το διανυσματικό πεδίο $\vec{X}$ ονομάζεται <u>παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης γ</u> (parallel along γ) εάν $\nabla_{\gamma'(t)}\vec{X} = 0$ για κάθε $t \in I$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $D_{\gamma'(t)}\vec{X}$ είναι ένα πολλαπλάσιο του $N(\gamma(t))$ ή ισοδύναμα κάθετο στον T_pM. (βλ. Σχήμα 2)*

Η συναλλοίωτη παράγωγος συμβολίζεται καμμιά φορά και ως

$$\frac{D\vec{X}}{dt} \ \text{ή} \ \frac{\nabla}{dt}\vec{X}$$



Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης γ με $\gamma'(0) = V$.

Παράδειγμα 3.1. Έστω $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ το επίπεδο xy και $\gamma : I \to M$ $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$ μια επίπεδη καμπύλη, Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{X}$ στην M κατά μήκος της γ (δηλαδή $\vec{X}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ για κάθε $t \in I$) έχει τη μορφή $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$. Τότε

$$\nabla_{\gamma'(t)}\vec{X} = (D_{\gamma'(t)}\vec{X})^{\tan} = (x_1'(t), x_2'(t), 0),$$

άρα στην περίπτωση αυτή η συναλλοίωτη παράγωγος συμφωνεί με τη συνήθη παράγωγο του $\vec{X}$.

Παράδειγμα 3.2. Έστω $M = \mathbb{S}^2$ η μοναδιαία σφαίρα. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων της καμπύλης $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Η καμπύλη διέρχεται από τον ισημερινό της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή την τομή της $\mathbb{S}^2$ με το επίπεδο xy. Είναι $\ddot{\gamma}(t) = (-\cos t, \sin t, 0) = -\gamma(t)$, άρα το διάνυσμα $\ddot{\gamma}(t)$ είναι κάθετο στον $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$. Συνεπώς, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$.

Παράδειγμα 3.3. *(Το παράδειγμα αυτό μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού των συμβόλων του Christoffel.)* Έστω $X : U \to M$ μια τοπική παραμέτρηση της M. Τότε

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_u}X_u &= (X_{uu})^{\tan} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v \\
\nabla_{X_v}X_u &= (X_{uv})^{\tan} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v \\
\nabla_{X_v}X_v &= (X_{vv})^{\tan} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v.
\end{aligned}$$

Πρόταση 3.1. *Έστω $\gamma : [0,1] \to M$ μια καμπύλη με $\gamma(0) = p$, $X_0 \in T_pM$. Τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο $\vec{X}$ κατά μήκος της γ με την ιδιότητα $\vec{X}(p) = X_0$.*

Από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης (την οποία δεν παραθέτουμε) προκύπτει ότι η παράλληλη μεταφορά εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της M, άρα είναι εσωτερικό μέγεθος της επιφάνειας.

Πρόταση 3.2. *Η παράλληλη μεταφορά διατηρεί τα μήκη και τις γωνίες διανυσματικών πεδίων. Δηλαδή, αν $\vec{X}$ και $\vec{Y}$ είναι παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της καμπύλης γ από το σημείο p στο σημείο q, τότε $\|\vec{X}(p)\| = \|\vec{X}(q)\|$ και η γωνία μεταξύ των $\vec{X}(p)$ και $\vec{Y}(p)$ ισούται με τη γωνία των $\vec{X}(q)$ και $\vec{Y}(q)$.*

Άσκηση. Αποδείξτε ότι η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $X_0 = X_u$ με αρχή το σημείο p με $u = u_0, v = 0$ κατά μήκος του παραλλήλου $u = u_0$ $(u_0 \neq 0, \pi)$ της μοναδιαίας σφαίρας, έχει ως αποτέλεσμα την στροφή του X_0 κατά τη φορά δεικτών ορολογίου κατά γωνία $2\pi \cos u_0$.

Ορισμός 3.3. *Μια καμπύλη γ σε μια επιφάνεια M ονομάζεται γεωδαισιακή (geodesic) εάν το εφαπτόμενο διάνυσμά της είναι παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.*

Θα μελετήσουμε τις γεωδαισιακές καμπύλες στο επόμενο καφάλαιο, όπου θα δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό.

3.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.
C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.
M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.
J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.
Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.
A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.