Τμήμα Μαθηματικών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Εξεταζόμενο μάθημα: Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Παρασκευή 21 Ιουνίου 2024

Θέματα και Λύσεις

Θέμα 1ο

A) Να γράψετε το πολυώνυμο $p(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$ στη μορφή

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-2) + \alpha_2(x-2)^2 + \alpha_3(x-2)^3 + \alpha_4(x-2)^4,$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

B) Να γράψετε το πολυώνυμο Taylor $4^{ου}$ βαθμού της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$ στο $x_0 = 0$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Λύση: A) Έχουμε

$$\begin{aligned} p(x) &= p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{p'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{p^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\ &= 7 + 9(x-2) + 12(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4. \end{aligned}$$

B) Έχουμε διαδοχικά

$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f(0) = 1,$

$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(0) = 0,$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \Rightarrow f''(0) = -2,$

$f'''(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} \Rightarrow f'''(0) = 0,$

$f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 12.$

Συνεπώς το πολυώνυμο Taylor $4^{ου}$ βαθμού της $f(x)$ στο $x_0 = 0$ είναι

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Έχουμε: $\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{23}{30} = 0{,}7666\ldots$. Σημειώνουμε ότι $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}7470$.

Θέμα 2ο

A) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα: (A1) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\,dx$, (A2) $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

B) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα: (B1) $\int \text{ημ}(5x)\,\text{συν}(3x)\,dx$, (B2) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Λύση: A) (A1) Το τριώνυμο γράφεται

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι ώστε

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow x+8 = A(x+2) + B(x-1) \Leftrightarrow x+8 = (A+B)x + (2A-B).$$

Οπότε:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2. \end{cases}$$

Άρα:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-1}+\frac{-2}{x+2}\right)dx = 3\ln|x-1|-2\ln|x+2|+c.$$

(A2) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+x^2)\,dx &= \int (x)'\ln(1+x^2)\,dx \\
&= x\ln(1+x^2) - \int x\left(\ln(1+x^2)\right)'\,dx \\
&= x\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(B1) Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\quad \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

προκύπτει

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B)+\sin(A+B)\right).$$

Για $A=5x$ και $B=3x$ έχουμε:

$$\int \sin(5x)\cos(3x)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(2x)+\sin(8x)\right)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)-\frac{1}{16}\cos(8x)+c.$$

(B2) Θέτουμε $y=x^2$ και $dy=(x^2)'dx \Leftrightarrow dy=2x\,dx$. Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int x^3e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int ye^y\,dy = \frac{1}{2}\int y\left(e^y\right)'\,dx = \frac{1}{2}ye^y-\frac{1}{2}\int e^y\,dx = \frac{1}{2}ye^y-\frac{1}{2}e^y+c = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{x^2}+c.$$

Θέμα 3ο

Να διατυπώσετε το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας κατά Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ακολούθως να αποδείξετε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$.

Λύση: Βλέπετε το βιβλίο *Πραγματική Ανάλυση, 3η Έκδοση, Γεωργίου Δημήτριος, Ηλιάδης Σταύρος, Μεγαρίτης Αθανάσιος, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ.*

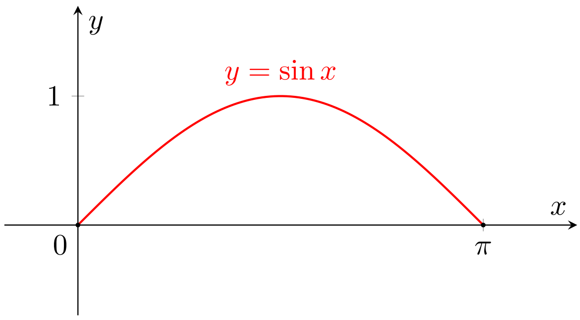
Θέμα 4ο

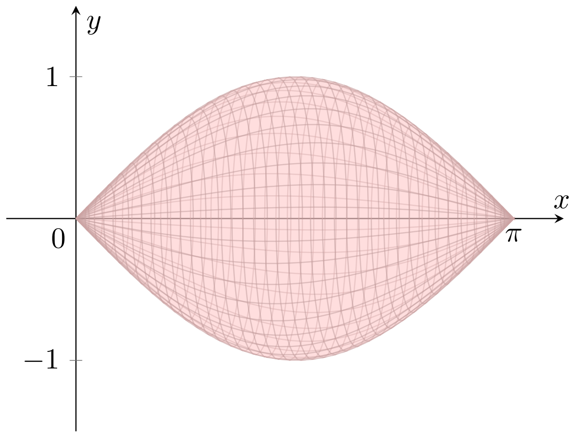
A) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y=\eta\mu\, x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ γύρω από τον άξονα $x'x$. Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα.

B) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $C:\mathbf{r}(t)=(3\sigma\upsilon\nu\, t, 3\eta\mu\, t, 4t)$, $t\in[0,2\pi]$.

Λύση: A) Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi$$
$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4} - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2\cdot 0)}{4} \right) \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$





B) Έχουμε

$$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} \, dt = \int_0^{2\pi} 5 \, dt = 10\pi.$$

Θέμα 5ο

A) Έστω $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann σε κάθε διάστημα $[\alpha, t]$, $t \geqslant \alpha$ τέτοιες ώστε $f(x) \geqslant 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$. Εάν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$, τότε να αποδείξετε (χρησιμοποιώντας το κριτήριο συγκρίσεως) ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει εάν και μόνον εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνει.

B) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$.

Λύση: A) Βλέπετε το βιβλίο *Πραγματική Ανάλυση, 3η Έκδοση, Γεωργίου Δημήτριος, Ηλιάδης Σταύρος, Μεγαρίτης Αθανάσιος, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ.*

B) Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^x \, dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \Big[e^x \Big]_t^0 + \lim_{t\to+\infty} \Big[-e^{-x} \Big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \left(1 - e^t\right) + \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-t} + 1\right) = 1 + 1 = 2.$$